MINUT 2019 (1), s. 76–90
ISSN 2719-3063

Katarzyna ADRIANOWICZ

Katedra Zastosowań Matematyki i Metod Sztucznej Inteligencji
Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Rozwiązywanie nierówności wymiernych

Streszczenie. Podczas każdego kursu matematyki na pierwszym roku studiów technicznych studenci wielokrotnie spotykają się z równaniami i nierównościami wymiernymi, których rozwiązanie jest jednym z etapów analizy różnych problemów. Nierówności wymierne są omawiane w szkole średniej tylko na matematyce na poziomie rozszerzonym, jest zatem spora grupa studentów, którzy nie nabyli umiejętności ich rozwiązywania. Mamy nadzieję, że niniejszy artykuł nie tylko pomoże studentom w uzupełnieniu wiedzy, ale przyda się również do powtórki lub podczas przygotowania do matury z matematyki na poziomie rozszerzonym.
Artykuł przedstawia algorytmiczne podejście do rozwiązywania tego typu nierówności. W dwóch metodach zaprezentowano krok po kroku, co należy zrobić, aby znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste spełniające rozwiązywaną nierówność wymierną.
Kolejne kroki wyróżnione zostały pogrubioną czcionką (bold) w celu łatwiejszego zapamiętania **jak** należy postępować. Jednak warto, aby Czytelnik nie ograniczył się tylko do zapamiętania „jak”, lecz wnikliwie zapoznał się z dalszą częścią opisu tłumaczącą, **dlaczego** i **po co** wykonywane są kolejne przekształcenia. Zrozumienie metody (a nie tylko jej zapamiętanie) umożliwi czytelnikom modyfikację prezentowanych algorytmów lub całkowitą zmianę postępowania, tak aby podobne zadanie rozwiązać sprytniej i szybciej. Pozwoli to odejść od algorytmicznego sposobu myślenia i wzbogacić warsztat matematyczny.

Słowa kluczowe: nierówności wymierne, wielomiany, wykresy wielomianów.

1. Wprowadzenie teoretyczne

Przez **nierówność wymierną** będziemy rozumieć taką nierówność, którą można zapisać w jednej z postaci:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0, \qquad \frac{A(x)}{B(x)} < 0, \qquad \frac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0, \qquad \frac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0,$$

gdzie $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ oraz $B(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ to wielomiany zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych $a_0, \ldots a_n$ i $b_0, \ldots b_m$. Wielomian $A(x)$ ma stopień n, a $B(x)$ jest stopnia m, jeśli tylko $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$. Liczby n i m są naturalne, ale mogą również przyjmować wartość 0 ($n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

Autor korespondencyjny: K. Adrianowicz (Katarzyna.Adrianowicz@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 12.11.2019 r.

Pierwsze dwie z powyższych nierówności są ostre, a ostatnie dwie — słabe.

Nierównościami wymiernymi są na przykład:

- $\dfrac{3x^2-2x+7}{x^5+4x^3-x} > 2$,
- $\dfrac{1}{3x-2} \leqslant \dfrac{3x^2}{x+1}$,
- $2x^2-3x+4 > -2x$.

Do rozwiązywania nierówności wymiernych potrzebna jest umiejętność rozkładania wielomianów na czynniki (przedstawiania wielomianu w postaci iloczynowej). To zagadnienie realizowane jest w szkole średniej w ramach nauczania matematyki na poziomie podstawowym.

Poniższe twierdzenie gwarantuje, że taki rozkład na czynniki jest zawsze wykonalny[1].

Twierdzenie 1. *Każdy niezerowy wielomian można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów co najwyżej stopnia drugiego.*

Wynika z niego, że dowolny (ale niezerowy) wielomian można zapisać jako iloczyn czynników postaci

$$A(x-B)^r \quad \text{oraz} \quad (ax^2+bx+c)^s,$$

gdzie A, B, a, b, c to odpowiednie liczby rzeczywiste, $r, s \in \mathbb{N}$, a czynnik ax^2+bx+c jest już nierozkładalny, ponieważ ma ujemny wyróżnik (zwany powszechnie deltą), czyli $\Delta = b^2-4ac < 0$.

Wykorzystamy również fakt, że jeżeli dwie liczby o tych samych znakach (obie dodatnie lub obie ujemne) pomnożymy przez siebie, to dostaniemy liczbę dodatnią. Wynik dzielenia takich liczb jest również dodatni. Jeśli mnożymy lub dzielimy liczby o różnych znakach, to wynik zawsze będzie ujemny. Można to zapisać w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Znak ilorazu dwóch niezerowych liczb jest taki sam jak znak ich iloczynu.*

Z powyższego twierdzenia wynika, że zamiast sprawdzać, kiedy iloraz wyrażeń jest większy (lub mniejszy) od zera, można sprawdzić, kiedy ich iloczyn spełnia ten warunek. Zamiast nierówności

$$\frac{x-3}{x+1} > 0$$

można rozwiązać równoważną nierówność

$$(x-3)(x+1) > 0.$$

Przy słabej nierówności konieczne jest uwzględnienie założenia, wykluczające zerowanie się mianownika. Na przykład

$$\frac{x-3}{x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) \geqslant 0 \ \text{ i } x \neq -1.$$

[1] Zainteresowany Czytelnik może znaleźć więcej informacji na temat tego twierdzenia (wraz z dowodem) na przykład w [1].

2. Szkicowanie wykresu wielomianu

Ważnym etapem rozwiązywania nierówności wymiernych jest szkicowanie wykresu wielomianu otrzymanego podczas jej przekształcania. Pokażemy na kilku przykładach, jak własności wielomianów wpływają na wygląd ich wykresów. Z premedytacją zostało użyte słowo „szkicujemy” zamiast „rysujemy”, bo nie musi to być dokładny wykres funkcji. Nie interesuje nas, jakie **dokładnie wartości** wielomian przyjmuje poza miejscami zerowymi, a jedynie kiedy wartości wielomianu są **dodatnie**, a kiedy **ujemne**.

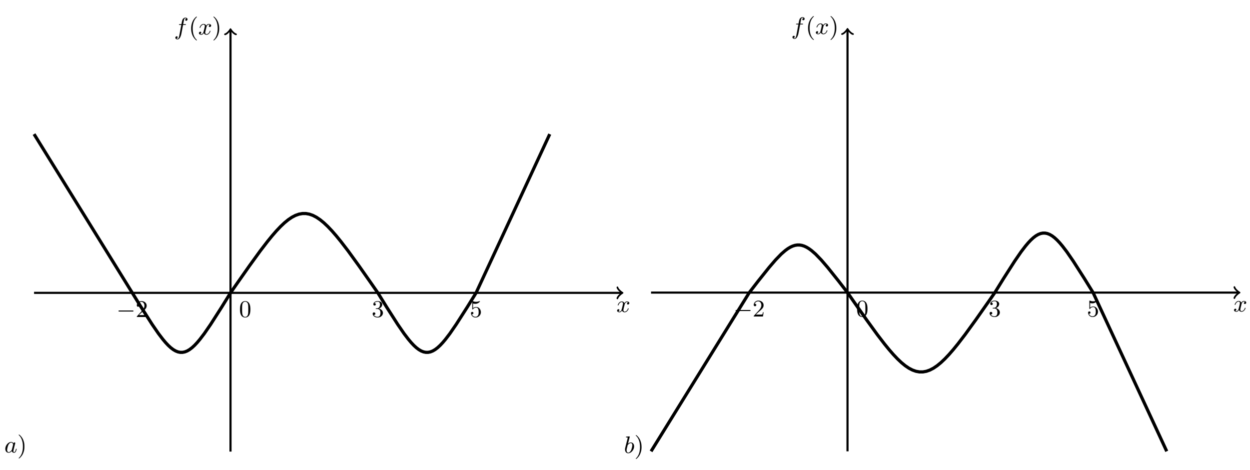
Przyjmijmy, że znamy postać iloczynową wielomianu. Z tej postaci łatwo odczytać jego miejsca zerowe. Na przykład wielomian $f(x) = 2x(x+2)(x-3)(x-5)$ ma miejsca zerowe: $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 5$.

Szkicowanie wykresu rozpoczynamy od zaznaczenia na osi argumentów (osi Ox) **wszystkich** miejsc zerowych wielomianu. Następnie rysujemy gładką linię, której jedyne punkty wspólne z osią Ox to zaznaczone miejsca zerowe[2].

Uwaga 1. Jeżeli współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu jest **dodatni**, to rozpoczynając szkicowanie wykresu od prawej strony, startujemy od dodatnich wartości — z góry. Wynika to z faktu, że dla argumentów większych od największego miejsca zerowego wartość wielomianu na pewno będzie dodatnia. Jeżeli współczynnik jest **ujemny**, to zaczynamy od ujemnej strony osi Oy — z dołu.

Uwaga 2. Należy pamiętać, że jeśli jakaś liczba jest wielokrotnym miejscem zerowym wielomianu, to ma to wpływ na wygląd wykresu. Przy **nieparzystej** wielokrotności wykres przecina oś Ox w miejscu zerowym, przechodząc na drugą stronę osi. Przy **parzystej** wielokrotności wykres nie przechodzi na drugą stronę osi, ale „odbija” się od niej.

Na rys. 1 pokazano szkice dwóch wielomianów, których wszystkie miejsca zerowe są nieparzystej wielokrotności. Zgodnie z uwagą 2 ich wykresy przecinają oś Ox w miejscach zerowych.



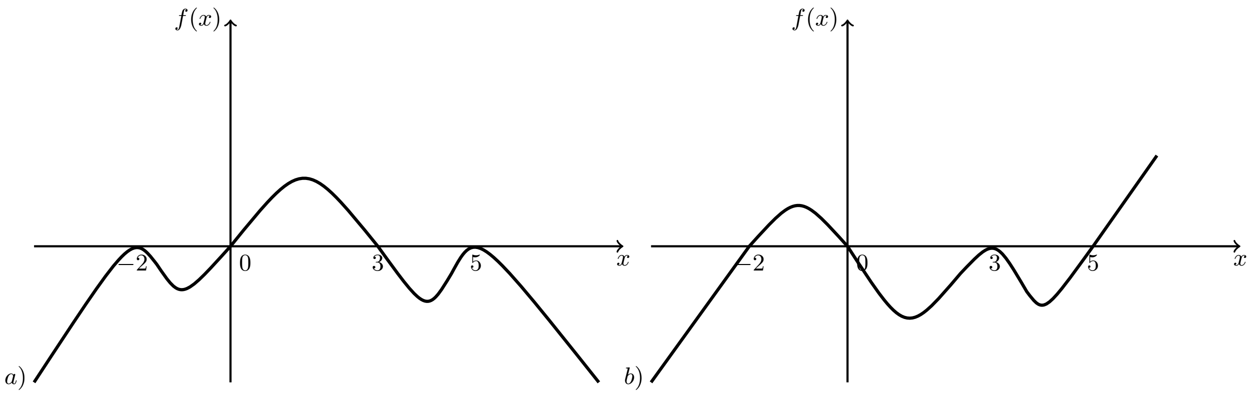
Rysunek 1. Szkice wykresów wielomianów: $a)$ $f(x) = 2x(x+2)(x-3)(x-5)$, $b)$ $f(x) = -3x^3(x+2)(x-3)^5(x-5)$.

[2] Wykorzystujemy tutaj (często nieświadomie) fakt, że każdy wielomian jest funkcją ciągłą.

Po lewej stronie narysowano wielomian $f(x) = 2x(x+2)(x-3)(x-5)$, którego współczynnik przy najwyższej potędze wynosi 2, więc jest większy od zera. Zgodnie z uwagą 1 zaczynamy szkicowanie wykresu od góry. Miejsca zerowe tej funkcji to: $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ — wszystkie jednokrotne.

Po prawej stronie narysowano wielomian $f(x) = -3x^3(x+2)(x-3)^5(x-5)$ o ujemnym współczynniku przy najwyższej potędze (-3). Jego miejsca zerowe to: $x_0 = -2$ (jednokrotne), $x_1 = 0$ (trzykrotne), $x_2 = 3$ (pięciokrotne), $x_3 = 5$ (jednokrotne). Linię wykresu zaczynamy szkicować od dołu i przeprowadzamy przez wszystkie miejsca zerowe.

Na rys. 2 pokazano szkice wykresów wielomianów, które mają wielokrotne miejsca zerowe. Wykres po lewej stronie przedstawia wielomian $f(x) = -4x(x+2)^2(x-3)(x-5)^2$. Współczynnik przy największej potędze x wynosi -4, czyli zgodnie z uwagą 1 krzywą zaczynamy szkicować od dołu. Miejsca zerowe to $x_0 = -2$ (dwukrotne), $x_1 = 0$ (jednokrotne), $x_2 = 3$ (jednokrotne), $x_3 = 5$ (dwukrotne). Wykres „odbija" się od osi Ox w punktach o parzystej krotności: $x_0 = -2$, $x_3 = 5$, a przechodzi na drugą stronę osi Ox w punktach o nieparzystej wielokrotności: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.



Rysunek 2. Szkice wykresów wielomianów: $a)$ $f(x) = -4x(x+2)^2(x-3)^2(x-5)$, $b)$ $f(x) = x^3(x+2)(x-3)^6(x-5)$.

Po prawej stronie rys. 2 mamy wielomian $f(x) = x^3(x+2)(x-3)^6(x-5)$. Współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni (wynosi 1), a $x_2 = 3$ jest jedynym miejscem zerowym o parzystej wielokrotności. Szkicowanie rozpoczynamy od góry, a wykres „odbija" się od osi Ox w punkcie $x_2 = 3$. W pozostałych miejscach zerowych wykres gładko przechodzi na drugą stronę osi.

3. Algorytm A

Pierwszą metodę rozwiązywania nierówności wymiernych omówimy na przykładzie konkretnej nierówności:

$$\frac{x+1}{x-2} \leqslant 3. \tag{1}$$

1. Ustalamy założenia

Zaczynamy od ustalenia warunków, jakie muszą być spełnione, żeby zadanie miało sens. Wyrażenia stojące w mianowniku nie mogą przyjmować wartości zero.

W rozważanym przykładzie (1) musimy założyć, że $x - 2 \neq 0$, czyli

$$x \neq 2. \tag{2}$$

2. Usunięcie mianowników.

Po ustaleniu założenia możemy przystąpić do przekształcania nierówności. Zaczynamy od pozbycia się wszystkich mianowników, które w niej występują. Najłatwiej byłoby to zrobić, mnożąc obie strony nierówności przez ten mianownik, który chcemy usunąć. W przypadku równania takie postępowanie byłoby jak najbardziej poprawne i skuteczne, ale jest **bardzo niebezpieczne** w przypadku nierówności.

Mnożąc nierówność przez liczbę, musimy wiedzieć, jaki znak ma ta liczba. Gdy jest ujemna trzeba pamiętać o zmianie zwrotu nierówności. Rozważając wyrażenie, w którym występuje zmienna (a tak często wygląda mianownik), zazwyczaj nie wiemy, czy ma ono wartość dodatnią, czy ujemną. Ponieważ kwadrat każdej liczby różnej od zera jest dodatni, więc bezpiecznie jest mnożyć obie strony nierówności przez kwadrat mianownika. Mnożąc nierówność przez liczbę dodatnią, mamy pewność, że zwrot nierówności pozostanie niezmieniony.

Zatem **mnożymy nierówność stronami przez kwadrat mianownika, którego chcemy się pozbyć:**

$$\frac{x+1}{x-2} \leqslant 3 \quad \big| \cdot (x-2)^2 \quad \text{dla } \ x \neq 2,$$

$$(x+1)(x-2) \leqslant 3(x-2)^2. \tag{3}$$

3. Wszystko na jedną stronę.

Przenosimy wszystkie składniki na jedną stronę (np. lewą) tak, aby po drugiej zostało zero.

W naszym przykładzie mamy

$$(x+1)(x-2) - 3(x-2)^2 \leqslant 0.$$

4. Rozkład na czynniki.

Otrzymany po lewej stronie wielomian rozkładamy na czynniki (przekształcamy do postaci iloczynowej). Oczywiście można wymnożyć wyrażenia po lewej stronie, uporządkować je i potem znanymi metodami rozłożyć wielomian na czynniki. Lepiej jednak ułatwić sobie pracę, wyłączając przed nawias powtarzający się czynnik

$$(x-2)\left[(x+1) - 3(x-2)\right] \leqslant 0.$$

Otrzymujemy

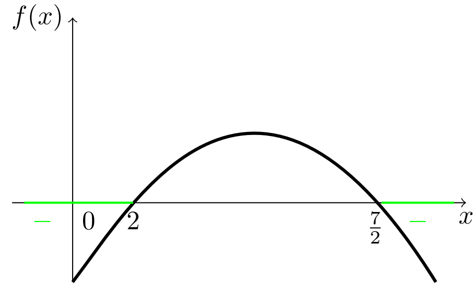
$$-2(x-2)(x-\frac{7}{2}) \leqslant 0. \tag{4}$$

5. Szkic wykresu.

Na osi argumentów zaznaczamy miejsca zerowe wielomianu otrzymanego po lewej stronie nierówności i szkicujemy jego wykres. Należy pamiętać, że szkicując wykres wielomianu, uwzględniamy **wszystkie** jego miejsca zerowe, również te, dla których ustaliliśmy w założeniach, że nie mogą być rozwiązaniami naszej nierówności.

Wielomian $f(x) = -2(x-2)(x-\frac{7}{2})$ ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = 2$ oraz $x_2 = \frac{7}{2}$. Szkic wykresu tego wielomianu (parabolę) pokazano na rys. 3.

Z tak utworzonego szkicu odczytujemy, dla jakich argumentów x funkcja (wielomian) przyjmuje odpowiednie wartości.



Rysunek 3. Szkic wykresu wielomianu $f(x) = -2(x-2)(x-\frac{7}{2})$.

W przypadku rozwiązywanej nierówności chodzi o wartości niedodatnie (mniejsze lub równe 0). Rozwiązaniem nierówności (4) są wszystkie liczby $x \in (-\infty, 2\rangle \cup \left\langle \frac{7}{2}, +\infty\right)$.

6. Odpowiedź.

Na koniec koniecznie trzeba jeszcze uwzględnić założenia ustalone w punkcie 1 algorytmu.

Ponieważ w punkcie 1 założyliśmy, że $x \neq 2$, rozwiązaniem nierówności (1) są liczby

$$x \in (-\infty, 2) \cup \left\langle \frac{7}{2}, +\infty \right).$$

Zauważmy, że nierówności (1) i (4) są **różne** (choć mocno ze sobą związane) — stąd różnice w ich rozwiązaniach.

Odpowiedź.

Nierówność $\dfrac{x+1}{x-2} \leqslant 3$ spełniają wszystkie liczby ze zbioru $(-\infty, 2) \cup \left\langle \frac{7}{2}, +\infty \right)$.

4. Algorytm B

Tu również omówimy sposób postępowania, rozwiązując konkretną nierówność wymierną:

$$\frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2} \geqslant 1 + \frac{2x^2}{(x+1)^3}. \tag{5}$$

1. Ustalamy założenia.

Wyrażenia stojące w mianowniku nie mogą przyjmować wartości zero.

W rozważanym przykładzie (5) należy założyć, że

$$(x+1)^2 \neq 0 \quad \wedge \quad (x+1)^3 \neq 0,$$

zatem

$$x \neq -1. \tag{6}$$

Liczba -1 nie może być rozwiązaniem tej nierówności.

2. Wszystko na jedną stronę.

Przenosimy wszystkie składniki na jedną stronę (np. lewą) tak, aby po drugiej zostało zero.

W naszym zadaniu
$$\frac{x^3+x^2+2x+1}{(x+1)^2}-1-\frac{2x^2}{(x+1)^3}\geqslant 0.$$

3. Wspólny mianownik.

Sprowadzamy wszystkie składniki do wspólnego mianownika — najlepiej, żeby był to najmniejszy wspólny mianownik. W rozwiązywanym przykładzie wspólnym mianownikiem będzie $(x+1)^3$.

Otrzymujemy
$$\frac{(x^3+x^2+2x+1)(x+1)}{(x+1)^2\cdot(x+1)}-\frac{(x+1)^3}{(x+1)^3}-\frac{2x^2}{(x+1)^3}\geqslant 0.$$

Następnie zapisujemy całe wyrażenie na jednej kresce ułamkowej:
$$\frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+1-(x^3+3x^2+3x+1)-2x^3}{(x+1)^3}\geqslant 0.$$

Należy pamiętać, że podczas odejmowania znak „−", stojący przed kreską ułamkową, dotyczy wszystkich składników licznika: aby to uwzględnić, wstawiamy nawiasy w odpowiednim miejscu.

Po zredukowaniu wyrazów podobnych otrzymujemy
$$\frac{x^4+x^3-2x^2}{(x+1)^3}\geqslant 0. \tag{7}$$

4. Rozkład na czynniki.

Zastosowanie tego algorytmu wymaga rozłożenia na czynniki zarówno licznika, jak i mianownika ułamka. Zgodnie z twierdzeniem 1 dla obu wielomianów można znaleźć rozkład na czynniki stopnia nie większego niż 2.

Zacznijmy od licznika ułamka występującego w nierówności (7). Najpierw wyłączmy x^2 przed nawias:
$$\frac{x^2(x^2+x-2)}{(x+1)^3}\geqslant 0.$$

Następnie dla otrzymanego trójmianu kwadratowego[3] liczymy wyróżnik (deltę), znajdujemy pierwiastki trójmianu i jego postać iloczynową. Mamy:
$$\Delta=1+8=9,\quad x_1=-2,\quad x_2=1,$$

czyli
$$x^2+x-2=(x-1)(x+2).$$

Mianownik już jest w postaci iloczynowej, zatem po rozłożeniu licznika dostajemy nierówność
$$\frac{x^2(x-1)(x+2)}{(x+1)^3}\geqslant 0. \tag{8}$$

[3] Taka jest poprawna nazwa tego, co zostało w nawiasie.

5. Usunięcie mianowników.

Można to zrobić na dwa sposoby[4]:

I. Zastosować sposób opisany w punkcie 2 algorytmu A:

$$\frac{x^2(x-1)(x+2)}{(x+1)^3} \geqslant 0 \quad \Big| \cdot (x+1)^6 \quad \text{dla} \ \ x \neq -1,$$

$$\frac{x^2(x-1)(x+2)}{(x+1)^3} \cdot (x+1)^6 \geqslant 0,$$

$$x^2(x-1)(x+2)(x+1)^3 \geqslant 0 \land x \neq -1.$$

II. Zamienić iloraz (dzielenie) na iloczyn (mnożenie).
Rozwiązywanie nierówności, gdy po jednej jej stronie jest zero, oznacza szukanie liczb, dla których wartość wyrażenia po drugiej stronie nierówności jest dodatnia lub ujemna, czyli związane jest z określeniem znaku tego wyrażenia. Zatem zgodnie z twierdzeniem 2 nie ma znaczenia, czy rozważamy dzielenie, czy mnożenie wyrażeń. Stąd:

$$\frac{x^2(x-1)(x+2)}{(x+1)^3} \geqslant 0$$

$$x^2(x-1)(x+2)(x+1)^3 \geqslant 0 \land x \neq -1.$$

Jak widać, przy obu podejściach (I lub II) rezultat jest taki sam. Otrzymujemy nierówność

$$x^2(x-1)(x+2)(x+1)^3 \geqslant 0. \tag{9}$$

6. Szkic wykresu.

Szkicujemy wykres wielomianu otrzymanego po lewej stronie nierówności i odczytujemy rozwiązanie.

Szkic wykresu wielomianu

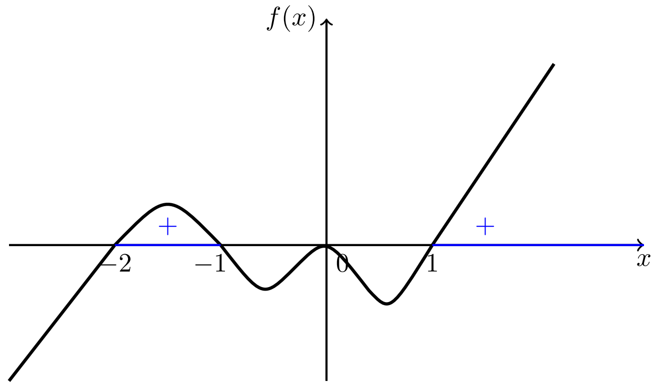
$$f(x) = x^2(x-1)(x+2)(x+1)^3$$

występującego po lewej stronie nierówności (9) pokazano na rys. 4. Szkicowanie wykresu rozpoczynamy od dodatnich wartości (z góry), ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze x wynosi 1 (jest dodatni). Wykres przecina oś w miejscach zerowych wielomianu, a w punkcie 0 „odbija” się od osi, bo jest to dwukrotne miejsce zerowe.

Z tak utworzonego rysunku odczytujemy, dla jakich argumentów x naszkicowana funkcja (wielomian) przyjmuje wartości większe lub równe zero. Otrzymujemy

$$x \in \langle -2, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty) \,.$$

[4] Czytelnik sam wybierze, który sposób mu bardziej odpowiada.



Rysunek 4. Szkic wykresu wielomianu $f(x) = x^2(x-1)(x+2)(x+1)^3$.

7. Odpowiedź.

Zgodnie z założeniami, w naszym zadaniu liczba -1 nie może być rozwiązaniem. Uwzględniając to w rozwiązaniu nierówności (9), dostajemy ostatecznie rozwiązanie nierówności (5).

Odpowiedź.

Nierówność (5) spełniają wszystkie liczby ze zbioru $\langle -2, -1) \cup \langle 1, +\infty)$.

5. Przykłady

Przykład 1. Rozwiążmy nierówność $\dfrac{1}{x^2-5x+6} < \dfrac{2}{1-x}$, stosując algorytm B.

1. Założenia:

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \quad \wedge \quad 1 - x \neq 0.$$

$\Delta = 1 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$ — miejsca zerowe trójmianu kwadratowego. Stąd: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$.

2. Wszystko na jedną stronę:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{2}{1-x} < 0.$$

3. Wspólny mianownik:

$$\frac{1 - x - 2(x^2-5x+6)}{(x^2-5x+6)(1-x)} < 0,$$

$$\frac{-2x^2+9x-11}{(x^2-5x+6)(1-x)} < 0.$$

4. Rozkład na czynniki.

Licznik jest funkcją kwadratową, której wyróżnik: $\Delta = 81 - 88 = -7$ jest ujemny. To oznacza, że licznika nie da się „bardziej” rozłożyć. Miejsca zerowe mianownika wynikają z założenia. Mamy

$$\frac{-2x^2 + 9x - 11}{(x-2)(x-3)(1-x)} < 0.$$

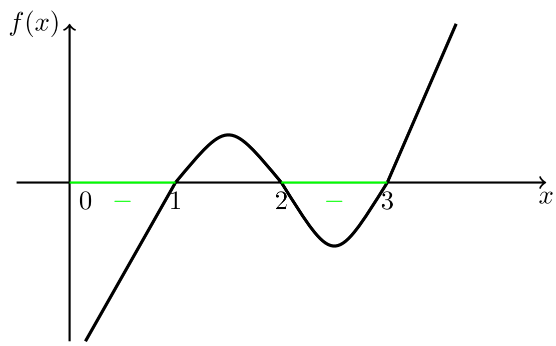
5. Iloraz na iloczyn:

$$(-2x^2 + 9x - 11)(x-2)(x-3)(1-x) < 0,$$

$$2(x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{11}{2})(x-1)(x-2)(x-3) < 0.$$

6. Szkic wykresu.

Miejsca zerowe wielomianu po lewej stronie powyższej nierówności, czyli liczby $1, 2, 3$ są pierwiastkami jednokrotnymi. Współczynnik przy najwyższej potędze x jest liczbą dodatnią, więc szkicujemy wykres, startując „od góry” (rys. 5).



Rysunek 5. Szkic wykresu wielomianu $f(x) = 2(x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{11}{2})(x-1)(x-2)(x-3)$.

Odczytujemy na osi Ox argumenty, dla których wielomian przyjmuje wartości ujemne:

$$x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3).$$

7. Odpowiedź.

Z punktów 1. i 6. mamy: $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$, zatem ostatecznie $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$.

Odpowiedź.

Nierówność $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} < \dfrac{2}{1-x}$ spełniają wszystkie liczby ze zbioru $(-\infty, 1) \cup [(2, 3)$.

Przykład 2. Rozwiążmy nierówność $\dfrac{3-4x}{3x+5} \geqslant \dfrac{1}{2}$, stosując algorytm A.

1. Założenie:

$$3x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{5}{3}.$$

2. Usunięcie mianowników:

$$\frac{3-4x}{3x+5} \geqslant \frac{1}{2} \quad |\cdot 2(3x+5)^2,$$

$$2(3-4x)(3x+5) \geqslant (3x+5)^2.$$

3.Wszystko na jedną stronę:

$$2(3-4x)(3x+5) - (3x+5)^2 \geqslant 0.$$

4. Rozkład na czynniki:

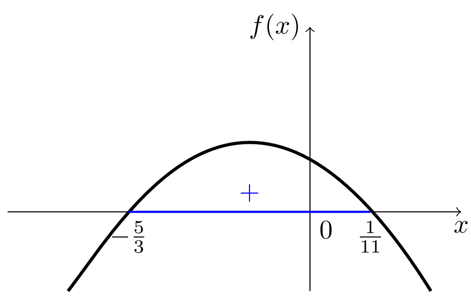
$$(3x+5)\left[2(3-4x) - (3x+5)\right] \geqslant 0,$$

$$3(x+\frac{5}{3})(1-11x) \geqslant 0,$$

$$-33(x+\frac{5}{3})(x-\frac{1}{11}) \geqslant 0.$$

5. Szkic wykresu:

Miejsca zerowe wielomianu po lewej stronie to liczby $\frac{1}{11}$ i $-\frac{5}{3}$. Współczynnik przy najwyższej potędze wynosi -33 i jest liczbą ujemną. Zaczynamy szkicowanie „od dołu". Parabolę będącą wykresem otrzymanego wielomiano pokazano na rys. 6.



Rysunek 6. Szkic wykresu wielomianu $f(x) = -33(x+\frac{5}{3})(x-\frac{1}{11})$.

Wielomian przyjmuje wartości nieujemne dla $x \in \left\langle -\frac{5}{3}, \frac{1}{11} \right\rangle$.

6. Odpowiedź.

Uwzględniamy założenie $x \neq -\frac{5}{3}$ i otrzymujemy ostateczną odpowiedź.

Odpowiedź:

Nierówność $\frac{3-4x}{3x+5} \geqslant \frac{1}{2}$ spełniają wszystkie liczby ze zbioru $\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{11}\right\rangle$.

6. Co wybrać: A czy B?

Poniżej przedstawiamy skrócone wersje obu algorytmów.

Algorym A:	**Algorytm B:**
1) założenia, 2) usunięcie mianowników (mnożenie przez **kwadrat mianownika**!) 3) wszystko na jedną stronę, 4) rozkład na czynniki, 5) szkic wykresu, 6) odpowiedź.	1) założenia, 2) wszystko na jedną stronę, 3) wspólny mianownik, 4) rozkład na czynniki, 5) usunięcie mianownika, (a) mnożenie przez kwadrat mianownika, (b) zamiana ilorazu na iloczyn, 6) szkic wykresu, 7) odpowiedź.

Porównując oba algorytmy wyraźnie widać, że mają one wiele wspólnych punktów. Nie da się określić, która z metod jest lepsza. W niektórych przykładach łatwiejszy lub szybszy będzie algorytm A, ale w innych wygra B. Czytelnik sam musi wybrać, która metoda mu bardziej odpowiada.

W zasadzie wystarczy opanować jedną z metod, ale zachęcam do prześledzenia i przećwiczenia obu. Pozwoli to na szersze spojrzenie na zadania i świadomy wybór drogi krótszej lub mniej skomplikowanej obliczeniowo. Możliwe będzie również wprowadzanie własnych modyfikacji w zależności od rodzaju nierówności, do czego gorąco namawiam.

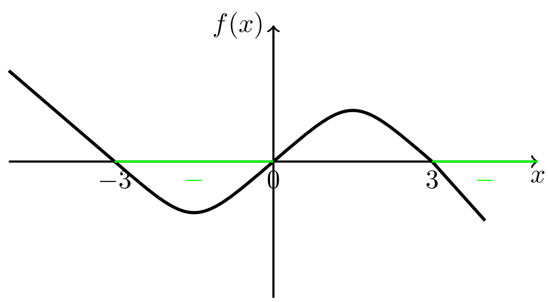
Przykład 3. Dla porównania rozwiążmy nierówność

$$\frac{x^3-19x^2+6x-36}{(x-3)^3}+\frac{1}{x-3}<1,$$

stosując oba algorytmy.

$$\frac{x^3-19x^2+6x-36}{(x-3)^3}+\frac{1}{x-3}<1$$	
Algorytm A	**Algorytm B**
Założenie: $x \neq 3$	
Usunięcie mianownika[5]**:** $\frac{x^3-19x^2+6x-36}{(x-3)^3}+\frac{1}{x-3}<1 \ \Big\vert \cdot (x-3)^4$ $(x^3-19x^2+6x-36)(x-3)+(x-3)^3<(x-3)^4$	**Na jedną stronę:** $\frac{x^3-19x^2+6x-36}{(x-3)^3}+\frac{1}{x-3}-1<0$
Wszystko na jedną stronę: $(x-3)(-9x^2-27x)<0$	**Wspólny mianownik:** $\frac{-9x^2-27x}{(x-3)^3}<0$
Rozkład na czynniki: $-9(x-3)x(x+3)<0$	**Rozkład na czynniki:** $\frac{-9x(x+3)}{(x-3)^3}<0$
	Iloraz na iloczyn: $-9x(x+3)(x-3)^3<0$

Jak widać, na tym etapie obu algorytmów dostajemy tę samą nierówność wielomianową. Ostatnie punkty postępowania, naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = -9x(x+3)(x-3)^3$ (rys. 7) i odczytanie rozwiązania, są identyczne w obu procedurach.



Rysunek 7. Szkic wykresu wielomianu $f(x) = -9x(x+3)(x-3)^3$.

Rozwiązanie nierówności wielomianowej: $x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)$.

Odpowiedź.

Nierówność $\frac{x^3-19x^2+6x-36}{(x-3)^3}+\frac{1}{x-3}<1$ spełniają wszystkie liczby ze zbioru $(-3,0)\cup(3,+\infty)$.

[5] Zgodnie z algorytmem należałoby pomnożyć przez $(x-3)^6$, ale mnożąc przez $(x-3)^4$ też pozbędziemy się mianownika, a mamy łatwiejsze obliczenia.

7. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność wymierną:

a) $\frac{3}{x-2} < 0$, **b)** $\frac{3x}{4x+5} < 2$, **c)** $\frac{x^2+2}{x+1} < 2$,

d) $\frac{5}{2x+3} \geqslant 3$, **e)** $\frac{2}{x+5} \leqslant -4$, **f)** $\frac{x-1}{x+1} < x$,

g) $\frac{x^2-1}{2x+5} < 3$, **h)** $\frac{x^2-5}{x} < x+1$, **i)** $\frac{x^2+7x}{x-2} > 0$,

j) $\frac{2-x}{6x+4} \geqslant 0$, **k)** $\frac{3-4x}{3x+5} \leqslant \frac{1}{2}$.

Zadanie 2. Rozwiąż nierówność wymierną:

a) $2 + \frac{3}{x+1} > \frac{2}{x}$, **b)** $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$, **c)** $\frac{2x}{x-1} \leqslant \frac{x+3}{2x-4}$,

d) $2 - x \geqslant \frac{3x+2}{x-3}$, **e)** $\frac{x}{x-2} > 1 - \frac{x+4}{x-2}$, **f)** $\frac{x-2}{x+2} < \frac{x+2}{2-x}$,

g) $\frac{2x}{x-1} \leqslant \frac{x+3}{2x-4}$, **h)** $\frac{3x^2-7x-2}{x-3} \geqslant 2x$, **i)** $\frac{1}{(x-2)(x-3)} \leqslant \frac{2}{1-x}$.

Zadanie 3. Rozwiąż nierówność wymierną:

a) $\frac{1+x^3}{x^2-4} < 0$, **b)** $\frac{2x}{x^2-9} \leqslant \frac{1}{x+2}$, **c)** $\frac{1}{(x+1)^3} > \frac{1}{x+1}$,

d) $\frac{2x-5}{x^2-6x+8} < -1$, **e)** $\frac{1+x^3}{x^2-1} \leqslant x$, **f)** $\frac{4x^2-2}{x} + \frac{3x}{x^2-1} < \frac{1}{x} - 1$,

g) $\frac{x+2}{x+1} + \frac{1}{x} > \frac{x+7}{x+2}$, **h)** $\frac{3x-1}{x^2} \leqslant \frac{2x+3}{x^2-x} + \frac{1}{x-1}$, **i)** $\frac{2x^2-2x-1}{x^2-2x} > 1$.

Więcej podobnych zadań wraz z odpowiedziami można znaleźć na przykład w zbiorze zadań [2] lub na portalach internetowych [3, 4].

8. Odpowiedzi

Odpowiedź 1.

a) $x \in (-\infty; 2)$, **b)** $x \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{5}{4}; +\infty)$, **c)** $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$,

d) $x \in (-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\rangle$, **e)** $x \in \langle -\frac{11}{2}; -5)$, **f)** $x \in (-1; +\infty)$,

g) $x \in (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (-2; 8)$, **h)** $x \in (-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$, **i)** $x \in (-7; 0) \cup (2; +\infty)$,

j) $x \in (-\frac{2}{3}; 2\rangle$, **k)** $x \in (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup \langle \frac{1}{11}; +\infty)$.

Odpowiedź 2.

a) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$, **b)** $x \in (1; 3) \cup (3; 5)$,

c) $x \in \langle \frac{1}{3}; 1) \cup (2; 3\rangle$, **d)** $x \in (-\infty; 3)$,

e) $x \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$, **f)** $x \in (-2; 2)$,

g) $x \in \langle \frac{1}{3}; 1) \cup (2; 3\rangle$, **h)** $x \in \langle -1; 2\rangle \cup (3; +\infty)$,

i) $x \in (-\infty; 1) \cup (2; 3)$.

Odpowiedź 3.

a) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2)$,

b) $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 3)$,

c) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0)$,

d) $x \in (1; 2) \cup (3; 4)$,

e) $x \in (-\infty; 1)$,

f) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$,

g) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; -\sqrt{\frac{2}{3}}) \cup (0; \sqrt{\frac{2}{3}})$,

h) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{1}{7}\rangle \cup (1, +\infty)$,

i) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$.

Literatura

1. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2005, s. 41,46.
2. N .Dróbka, K. Szymański, *Zbiór zadań z matematyki dla klasy I i II liceum ogólnokształcącego*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1995, s. 136–137.
3. http://matematyka.pisz.pl/strona/1696.html
4. http://zadania.info/d875