MINUT 2022 (4), s. 16–25
ISSN 2719-3063

MATEMATYKA I INFORMATYKA NA UCZELNIACH TECHNICZNYCH

Bartłomiej PAWLIK

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Postać trygonometryczna liczb zespolonych

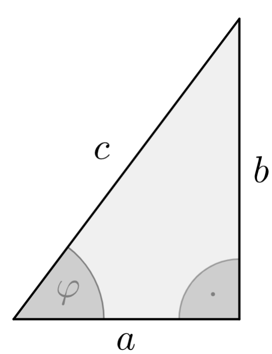
Streszczenie. Istnieje kilka sposobów reprezentacji liczb zespolonych — między innymi algebraiczna i trygonometryczna. Na uczelniach technicznych często jednym z podstawowych elementów kursów matematyki obejmujących liczby zespolone jest umiejętność przekształcania postaci algebraicznej do postaci trygonometrycznej — zwłaszcza w pewnych szczególnych przypadkach. Doświadczenie dydaktyczne podpowiada, że o ile wyznaczenie modułu liczby zespolonej jest zazwyczaj zadaniem trywialnym, o tyle wyznaczenie argumentu bywa problematyczne. Celem niniejszego artykułu jest przybliżenie Czytelnikowi metody niewymagającej używania wzorów redukcyjnych: w niektórych przypadkach postać trygonometryczną można szybko wyznaczyć, korzystając z pewnych elementarnych faktów geometrycznych. Na końcu artykułu przedstawiono jedną z metod określenia argumentu głównego liczby zespolonej w przypadku ogólnym.
Słowa kluczowe: liczby zespolone, płaszczyzna Gaussa, postać trygonometryczna liczb zespolonych.

1. Wstęp

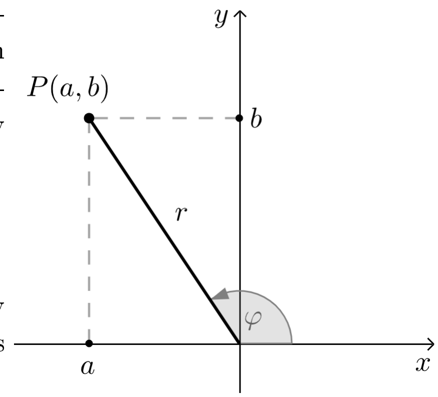
1.1. Trygonometria

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta ostrego zwyczajowo definiuje się jako stosunki długości boków w trójkącie prostokątnym zgodnie z zasadami:

- *sinus* kąta φ to stosunek długości przyprostokątnej b nieprzyległej do kąta φ do długości przeciwprostokątnej c, czyli $\sin\varphi = \frac{b}{c}$.
- *cosinus* kąta φ to stosunek długości przyprostokątnej a przyległej do kąta φ do długości przeciwprostokątnej c, czyli $\cos\varphi = \frac{a}{c}$.
- *tangens* kąta φ to stosunek długości przyprostokątnej b nieprzyległej do kąta φ dodługości przyprostokątnej a przyległej do kąta φ, czyli $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.
- *cotangens* kąta φ to stosunek długości przyprostokątnej a przyległej do kąta φ do długości przyprostokątnej b nieprzyległej do kąta φ, czyli $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{a}{b}$.



Autor korespondencyjny: B. Pawlik (bpawlik@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 04.01.2022 r.



Powyższe definicje można w naturalny sposób uogólnić na dowolny kąt. Niech $P(a, b)$ będzie punktem różnym od $O(0,0)$ i niech $r = |OP|$ będzie odległością punktu P od początku układu współrzędnych. Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta φ między dodatnią półosią Ox a odcinkiem OP są następujące:

$$\sin\varphi = \frac{b}{r}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{a}{b}.$$

Zauważmy, że w tym wypadku funkcja tangens jest określona, gdy $a \neq 0$ (tzn. P nie leży na osi Oy), natomiast funkcja cotangens jest określona, gdy $b \neq 0$ (tzn. P nie leży na osi Ox).

Oczywiście $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ oraz $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ dla wszystkich wartości φ, które nie zerują mianowników.

Dla pewnych zakresów kątów można rozważać funkcje odwrotne (względem składania) do funkcji trygonometrycznych z odpowiednimi dziedzinami. Nas będzie szczególnie interesować funkcja odwrotna do funkcji tangens zdefiniowanej na przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$.

Funkcją *arcus tangens* nazywamy funkcję

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

taką, że $\operatorname{arctg} x = y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \operatorname{tg} y$ dla pewnego $y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

1.2. Liczby zespolone

Postacią algebraiczną liczby zespolonej z nazywamy wyrażenie $z = x + yi$, gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi, natomiast i to tak zwana *jednostka urojona*, spełniająca warunek $i^2 = -1$.

Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$. Korzystając z powyższych informacji możemy go opisać jako

$$\mathbb{C} = \left\{ z : \, z = x + yi \, \wedge \, x, y \in \mathbb{R} \, \wedge \, i^2 = -1 \right\}.$$

Liczby x i y nazywamy, odpowiednio, częścią rzeczywistą (*realisem*) i częścią urojoną (*imaginariusem*) liczby z i oznaczamy je przez $x = \mathtt{Re}\, z$ oraz $y = \mathtt{Im}\, z$. Zatem każdą liczbę zespoloną z możemy zapisać w postaci

$$z = \mathtt{Re}\, z + i \cdot \mathtt{Im}\, z.$$

Modułem liczby zespolonej z nazywamy wyrażenie postaci

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Niezerowa liczba zespolona $z = x + yi$ posiada *argument*, czyli liczbę rzeczywistą φ spełniającą układ równań

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} \\[2ex] \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}. \end{cases}$$

Oczywiście, ze względu na okresowość funkcji trygonometrycznych, powyższy układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań. *Argumentem głównym* liczby zespolonej z nazywamy taki jej argument φ, który spełnia warunek $\varphi \in [0, 2\pi)$. Zwyczajowo argument liczby zespolonej z oznaczamy przez $\mathtt{arg}\, z$, natomiast argument główny przez $\mathtt{Arg}\, z$.

Postacią trygonometryczną liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy wyrażenie

$$z = |z|\left(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi\right),$$

gdzie φ to argument liczby z.

W tym artykule przyjmujemy, że liczba zespolona 0 nie ma postaci trygonometrycznej[1]. Uzasadniamy ten wybór faktem, że argument główny liczby 0 nie może być wyznaczony jednoznacznie, co może prowadzić do pewnych formalnych niezręczności. Przykładowo: czy liczba zespolona 0 jest jednym z rozwiązań nierówności $0 \leq \mathtt{Arg}\, z < \pi$?

Aby się przekonać, że postacie algebraiczna i trygonometryczna w istocie opisują tę samą niezerową liczbę zespoloną, wystarczy przeprowadzić następujące proste przekształcenie, polegające na wyłączeniu przed nawias modułu:

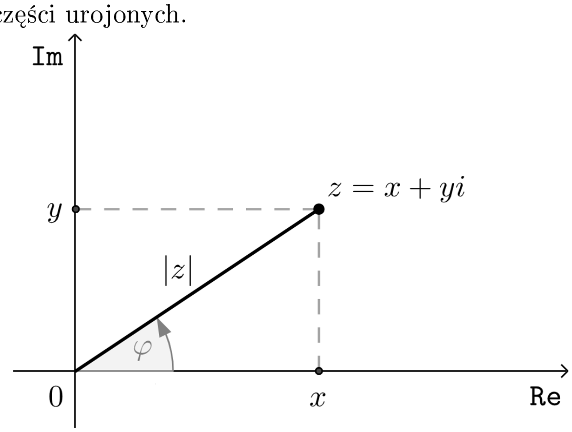
$$z = x + yi = |z| \cdot \frac{x}{|z|} + |z| \cdot \frac{y}{|z|} \cdot i = |z|\left(\frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|} \cdot i\right) = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

1.3. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

Czynnikiem motywującym do wprowadzenia pojęć modułu i argumentu liczb zespolonych jest interpretacja geometryczna zbioru $\mathbb{C}$. Liczby zespolone można utożsamiać z punktami na tzw. *płaszczyźnie Gaussa* — jest to odpowiednik kartezjańskiej płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ z tą różnicą, że zwyczajowe osie Ox i Oy oznaczają, odpowiednio, osie części rzeczywistych i części urojonych.

Liczba zespolona $z = x + yi$ jest interpretowana jako punkt o współrzędnych (x, y). Jeżeli $z \neq 0$, to liczbę zespoloną można jednoznacznie wskazać przy pomocy modułu $|z|$ i argumentu φ, gdzie

- $|z|$ to odległość punktu z od początku układu współrzędnych (czyli od liczby zespolonej 0),
- φ to kąt między dodatnią półosią $\mathtt{Re}$ a odcinkiem $0z$.



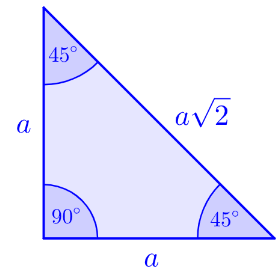
2. Trójkąty $45° - 45° - 90°$ i $30° - 60° - 90°$

W klasycznej geometrii i w życiu codziennym miary kątów najczęściej wyrażane są za pomocą stopni. Z kolei w zagadnieniach związanych z trygonometrią i z analizą zespoloną dużo bardziej naturalnym podejściem jest użycie radianów. W związku z tym część tego rozdziału — poświęconego pewnym prostym wynikom geometrycznym — będzie zawierała miary kątów wyrażone w stopniach.

[1] Wypada tutaj wspomnieć, że w kwestii definicji i własności argumentów liczb zespolonych panuje pewne zamieszanie znajdujące odzwierciedlenie w wielu podręcznikach i opracowaniach. Niekiedy uznaje się, że za argument liczby 0 można przyjąć dowolną liczbę rzeczywistą (co pozwala zdefiniować jej postać trygonometryczną), a za argument główny tej liczby można przyjąć 0. Zdarza się przyjmować, że $\mathtt{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$, a także że argument główny jest oznaczany przez $\mathtt{arg}\, z$, a dowolny przez $\mathtt{Arg}\, z$.

Rozważane trójkąty bywają nazywane *trójkątami ekierkowymi* — wynika to z faktu, że pewien dobrze każdemu znany przyrząd kreślarski najczęściej występuje w tych kształtach.

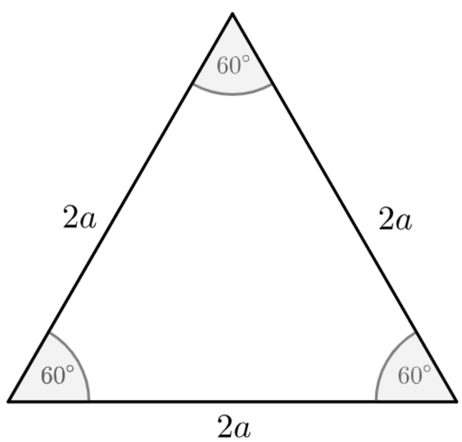
Twierdzenie 1. *Trójkąt o kątach* $45°$, $45°$ *i* $90°$ *ma boki długości* a, a *i* $a\sqrt{2}$ *dla pewnego* $a > 0$.

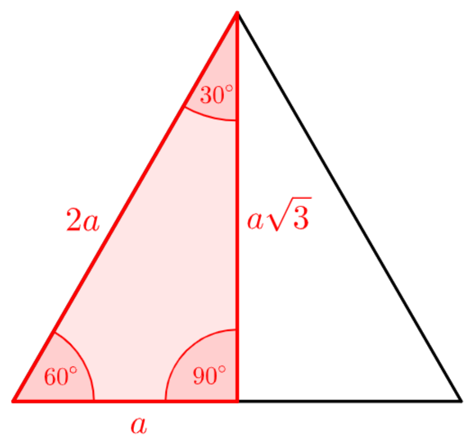


Rozważany trójkąt jest prostokątny i równoramienny. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że jeżeli obie jego przyprostokątne mają długość a, to przeciwprostokątna ma długość $a\sqrt{2}$.

Twierdzenie 2. *Trójkąt o kątach* $30°$, $60°$ *i* $90°$ *ma boki długości* a, $a\sqrt{3}$ *i* $2a$ *dla pewnego* $a > 0$.

Powyższe twierdzenie można łatwo uzasadnić — rozważany trójkąt stanowi połowę trójkąta równobocznego. Przypomnijmy dwa szkolne fakty o trójkątach równobocznych. Po pierwsze, wysokość takiego trójkąta o boku a wynosi $a\sqrt{3}/2$. Zatem wysokość trójkąta równobocznego o boku $2a$ wynosi $a\sqrt{3}$. Po drugie, wysokość w trójkącie równobocznym opada dokładnie na środek przeciwległego boku.



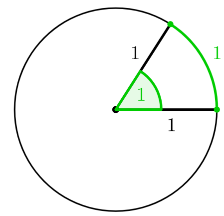


Twierdzenie 2 można też w prosty sposób uzasadnić trygonometrycznie. Krótsza przyprostokątna ma długość a i przylega do kąta ostrego $60°$. Jeżeli c to długość przeciwprostokątnej, to z definicji funkcji cosinus dla kąta ostrego mamy

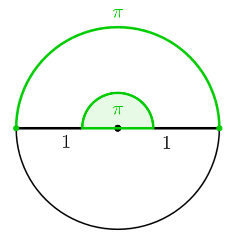
$$\frac{a}{c} = \cos 60°, \quad \text{więc} \quad c = \frac{a}{\cos 60°} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a.$$

Mając długości dwóch boków w trójkącie prostokątnym, wartość dłuższej przyprostokątnej można obliczyć z twierdzenia Pitagorasa:

$$(2a)^2 = a^2 + b^2, \quad \text{więc} \quad b = a\sqrt{3}.$$

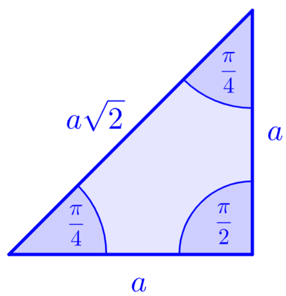


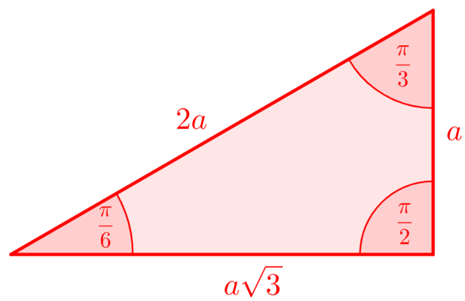
Jeden radian, z definicji, to miara łukowa kąta środkowego opartego na łuku o długości 1 w okręgu jednostkowym. W związku z tym miara kąta pełnego (360°) wyrażona w radianach to 2π, czyli dokładnie tyle ile wynosi obwód wspomnianego okręgu, a miara kąta półpełnego (180°) to π — połowa obwodu. Oczywiście radiany i stopnie są wprost proporcjonalne i dzięki temu można łatwo przekształcać te jednostki między sobą, na przykład:



- 180° odpowiada wartości π radianów, więc (dzieląc obie liczby przez 2) otrzymujemy, że 90° odpowiada $\pi/2$ radianów.
- Dzieląc 180° i π przez 3, wnioskujemy, że miara kąta 60° wyrażona w radianach to $\pi/3$.

Podsumowując, wyniki z twierdzeń 1 i 2 można wyrazić następująco:





3. Argument liczby zespolonej w trzech szczególnych przypadkach

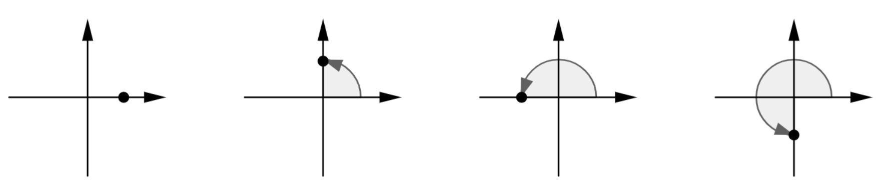
W tym rozdziale zakładamy, że $z \neq 0$.

3.1. Przypadek $x = 0$ lub $y = 0$

Jest to najprostszy z rozważanych przypadków. Jeżeli

$$z = x \quad \text{lub} \quad z = yi,$$

to z znajduje się na jednej z osi płaszczyzny Gaussa. Zatem $\texttt{Arg}\, z$ może przyjąć wyłącznie jedną z następujących czterech wartości:



0 $\qquad$ $\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ π $\qquad$ $\frac{3}{2}\pi$

Zauważmy, że jeżeli $z = x$, to

$$|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

i, analogicznie, dla $z = yi$ zachodzi

$$|z| = \sqrt{0^2 + y^2} = \sqrt{y^2} = |y|.$$

Przykład 1. Korzystając z powyższych informacji, zapiszemy kilka liczb zespolonych spełniających warunek $\texttt{Re}\, z \cdot \texttt{Im}\, z = 0$ w postaci trygonometrycznej:

$$5 = 5(\cos 0 + i \sin 0), \qquad 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$-3 = 3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right), \qquad -14i = 14\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right).$$

3.2. Przypadek $x = \pm y$

Z twierdzenia 1 wynika, że jeżeli $z = x + yi$ oraz $|x| = |y|$, to kąt między odcinkiem Oz, a pewną półosią na płaszczyźnie Gaussa wynosi $\pi/4$. Zatem, jak w powyższym przykładzie, argument przyjmuje jedną z czterech możliwych wartości (pozostawiamy Czytelnikowi graficzne przedstawienie tych możliwości — — analogiczne do poprzedniego przypadku).

Przykład 2. Przedstawimy w postaci trygonometrycznej dwie liczby zespolone spełniające warunek $\texttt{Re}\, z = \pm\texttt{Im}\, z$.

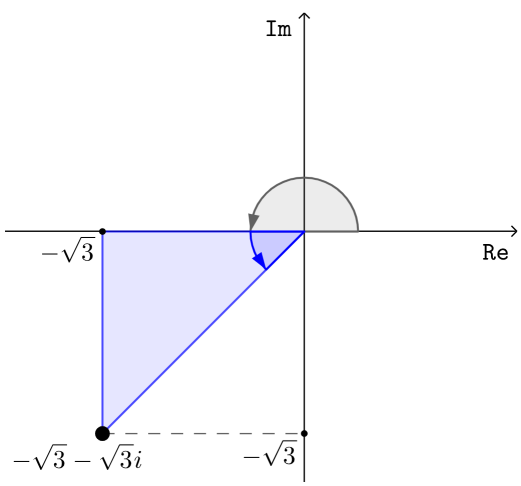
1. Niech $z = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$.

   Jak widać, $\texttt{Re}\, z = \texttt{Im}\, z = -\sqrt{3}$.

   Korzystając ze wzoru na moduł liczby zespolonej, otrzymujemy

   $$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}.$$

   Zaznaczmy daną liczbę zespoloną na płaszczyźnie Gaussa i przyłóżmy odpowiedni trójkąt ekierkowy.



   Zatem

   $$\texttt{Arg}\, z = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$$

   i ostatecznie

   $$-\sqrt{3} - \sqrt{3}i = \sqrt{6}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right).$$

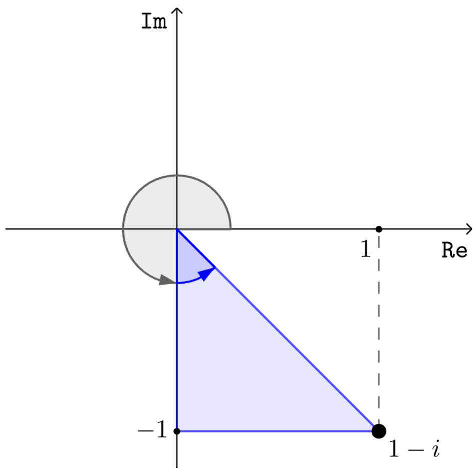
2. Niech $z = 1 - i$.

   W tym przypadku mamy $\texttt{Re}\, z = 1$ oraz $\texttt{Im}\, z = -1$, więc $\texttt{Re}\, z = -\texttt{Im}\, z$.

Ponownie, najpierw obliczamy moduł:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Po zaznaczeniu danej liczby na płaszczyźnie Gaussa przykładamy odpowiedni trójkąt ekierkowy.



Zatem

$$\mathtt{Arg}\, z = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

i ostatecznie

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right).$$

3.3. Przypadek $x = \pm\sqrt{3}y$ lub $y = \pm\sqrt{3}x$

W tym przypadku na płaszczyźnie Gaussa zaznaczamy trójkąt $30° - 60° - 90°$. Aby mieć pewność, czy podczas obliczania argumentu należy dobrać kąt $\pi/6$ (mniejszy) czy $\pi/3$ (większy), można wyraźnie rozróżnić wartości części rzeczywistej i urojonej danej liczby poprzez odpowiednie przeskalowanie ich na osiach.

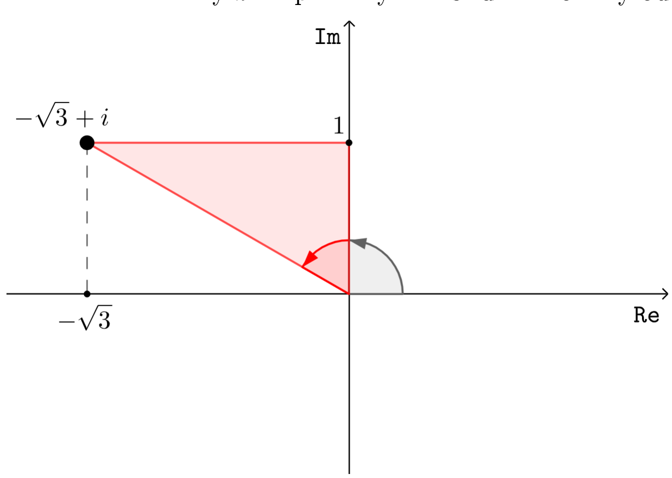
Przykład 3. Przedstawimy w postaci trygonometrycznej dwie liczby zespolone spełniające warunek $\mathtt{Re}\, z = \pm\sqrt{3}\,\mathtt{Im}\, z$ lub $\mathtt{Im}\, z = \pm\sqrt{3}\,\mathtt{Re}\, z$.

1. Niech$z = -\sqrt{3} + i$.

   Zauważmy, że $\mathtt{Im}\, z = -\sqrt{3} \cdot \mathtt{Re}\, z$. Obliczamy moduł danej liczby:

   $$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

   Po zaznaczeniu liczby z na płaszczyźnie Gaussa możemy odczytać jej argument.



Mamy

$$\mathtt{Arg}\, z = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi,$$

więc postać trygonometryczna danej liczby to

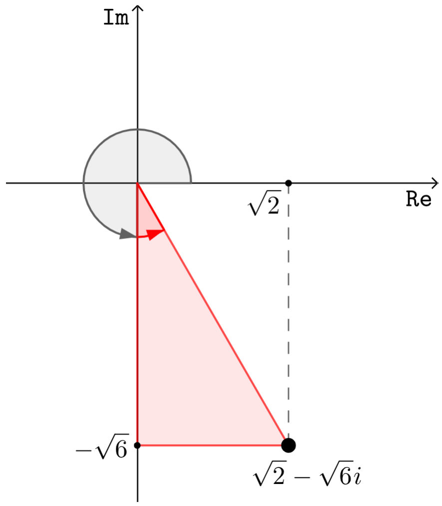
$$z = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right).$$

2. Niech $z = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$.

   W tym przypadku $\mathtt{Re}\, z = -\sqrt{3} \cdot \mathtt{Im}\, z$. Ponadto

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}.$$

   Z poniższego rysunku odczytujemy argument danej liczby.



Zatem

$$\mathtt{Arg}\, z = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{3}\pi.$$

Ostatecznie

$$\sqrt{2} - \sqrt{6}i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right).$$

4. Argument liczby zespolonej w przypadku ogólnym

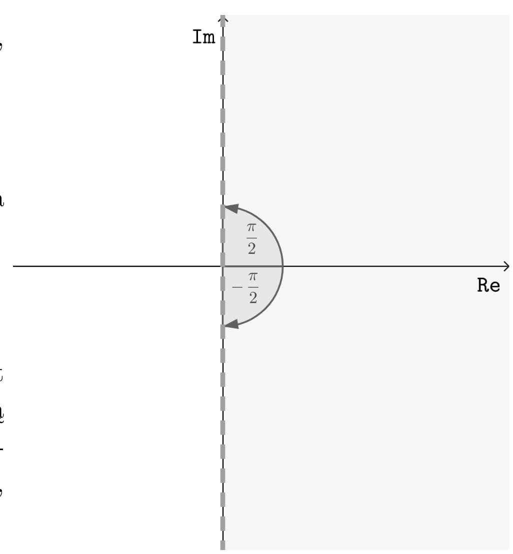
Zauważmy, że dla liczby zespolonej $z = x+yi$, gdzie $x \neq 0$, mamy

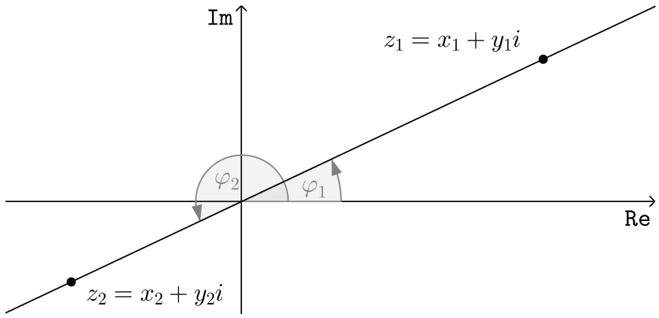
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\frac{y}{|z|}}{\frac{x}{|z|}} = \frac{y}{x}.$$

Powyższe równanie sugeruje, że wartość argumentu można obliczyć przy pomocy wyrażenia

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

jednak zbiorem wartości funkcji arcus tangens jest $(-\pi/2, \pi/2)$, co „wypełnia” jedynie pierwszą i czwartą ćwiartkę układu współrzędnych. Reasumując, w tym kontekście arcus tangens określa jedynie kierunek prostej $0z$, co nam daje dwie „potencjalne” wartości argumentu.





Liczby z_1 i z_2 leżą na jednej prostej, więc

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Zauważmy, że

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi.$$

Zatem argument niezerowej liczby zespolonej $z = x + yi$ można wyznaczyć w następujący sposób:

$$\texttt{arg}\, z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dla } x = 0 \text{ i } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{dla } x = 0 \text{ i } y < 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{dla } x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

W powyższym wzorze otrzymujemy argument główny w każdej ćwiartce poza czwartą ($x > 0,\ y < 0$). Nietrudno zauważyć, że w tym przypadku mamy

$$\texttt{Arg}\, z = 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Ostatecznie można przyjąć, że dla niezerowej liczby zespolonej $z = x + yi$ zachodzi

$$\texttt{Arg}\, z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dla } x = 0 \text{ i } y > 0 & \\ \frac{3\pi}{2} & \text{dla } x = 0 \text{ i } y < 0 & \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{dla } x > 0 \text{ i } y \geq 0 & \text{(I ćw.)} \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{dla } x < 0 & \text{(II, III ćw.)} \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{dla } x > 0 \text{ i } y < 0 & \text{(IV ćw.).} \end{cases}$$

W sekcji 2. przedstawiliśmy analogię między pojęciami stopni i radianów, natomiast w sekcji 1.1. określiliśmy przedział $(-\pi/2, \pi/2)$ jako zbiór wartości funkcji arcus tangens. Łącząc te dwa fakty, można przyjąć, że wartościom funkcji arcus tangens jednoznacznie można przypisać stopnie z zakresu $(-90°, 90°)$, a powyższy wzór na argument główny liczby zespolonej może zwracać wartości w stopniach z zakresu $[0°, 360°)$.

Przykład 4. Wyznaczymy i podamy (przybliżoną) wartość w stopniach argumentu głównego pewnych liczb zespolonych.

1. Jeżeli $z = 1 + 2i$, to $\texttt{Re}\, z = 1 > 0$ i $\texttt{Im}\, z = 2 > 0$, więc

$$\texttt{Arg}\, z = \operatorname{arctg}\frac{2}{1} = \operatorname{arctg} 2 \approx 63°.$$

2. Jeżeli $z = -3 + 2i$, to $\texttt{Re}\, z = -3 < 0$, więc

$$\texttt{Arg}\, z = \pi + \operatorname{arctg}\frac{-3}{2} \approx 180° + (-56°) = 124°.$$

3. Jeżeli $z = -8 - 9i$, to $\mathtt{Re}\, z = -8 < 0$. Zatem

$$\mathtt{Arg}\, z = \pi + \operatorname{arctg} \frac{-9}{-8} = \pi + \operatorname{arctg} \frac{9}{8} \approx 180^\circ + 48^\circ = 228^\circ.$$

4. Jeżeli $z = 19 - 2i$, to $\mathtt{Re}\, z = 19 > 0$ i $\mathtt{Im}\, z = -2 < 0$. Zatem

$$\mathtt{Arg}\, z = 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{-2}{19} \approx 360^\circ + (-6^\circ) = 354^\circ.$$

5. Zadania i odpowiedzi

Zadanie 1. Wyznaczyć postać trygonometryczną danej liczby zespolonej

a) i, **b)** $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$, **c)** $-\pi$,

d) $\sqrt{3} + 3i$, **e)** $-5 + 5i$, **f)** $-\sqrt{15} - \sqrt{5}i$,

g) $4 - 4i$, **h)** $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, **i)** $-2 + 2\sqrt{3}i$.

Zadanie 2. Wyznaczyć i podać (przybliżoną) wartość w stopniach argumentu głównego liczby zespolonej

a) $1 + 7i$, **b)** $4 + i$, **c)** $-33 - 2i$,

d) $14 + 15i$, **e)** $9 - 5i$, **f)** $2 + \sqrt{3}i$,

g) $-\sqrt{2} + \sqrt{3}i$, **h)** $-5 - 17i$, **i)** $10 - i$.

Odpowiedź 1.

a) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, **b)** $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, **c)** $\pi(\cos\pi + i\sin\pi)$,

d) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, **e)** $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$, **f)** $2\sqrt{5}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$,

g) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$, **h)** $\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$, **i)** $4\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$.

Odpowiedź 2.

a) $\operatorname{arctg} 7 \approx 82^\circ$, **b)** $\operatorname{arctg}\frac{1}{4} \approx 14^\circ$, **c)** $\pi + \operatorname{arctg}\frac{2}{33} \approx 183^\circ$,

d) $\operatorname{arctg}\frac{15}{14} \approx 47^\circ$, **e)** $2\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{9}\right) \approx 331^\circ$, **f)** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 41^\circ$,

g) $\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \approx 129^\circ$, **h)** $\pi + \operatorname{arctg}\frac{17}{5} \approx 254^\circ$, **i)** $2\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{10}\right) \approx 354^\circ$.