

Kamil CZAPLA¹, Mariusz PLESZCZYŃSKI²

¹Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Śląskiej, ul. Rudzka 13, 44–200 Rybnik

²Katedra Zastosowań Matematyki i Metod Sztucznej Inteligencji, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44–100 Gliwice

Pewne formuły wyznaczania pól i objętości, część II: obszary w przestrzeni \mathbb{R}^3

Streszczenie. Stykając się z całką oznaczoną dowiadujemy się, że jednym z jej zastosowań jest wyznaczanie pól figur płaskich i objętości brył. Standardowo mówi się również o długości łuku krzywej, polu powierzchni i objętości bryły obrotowej. Rzadko już wprowadza się na podstawowym kursie matematyki wzory na pola czy objętości dla obszarów zadanych parametrycznie czy biegunowo. W niniejszej pracy chcemy zaprezentować wybrane formuły na obliczanie wspomnianych wielkości.

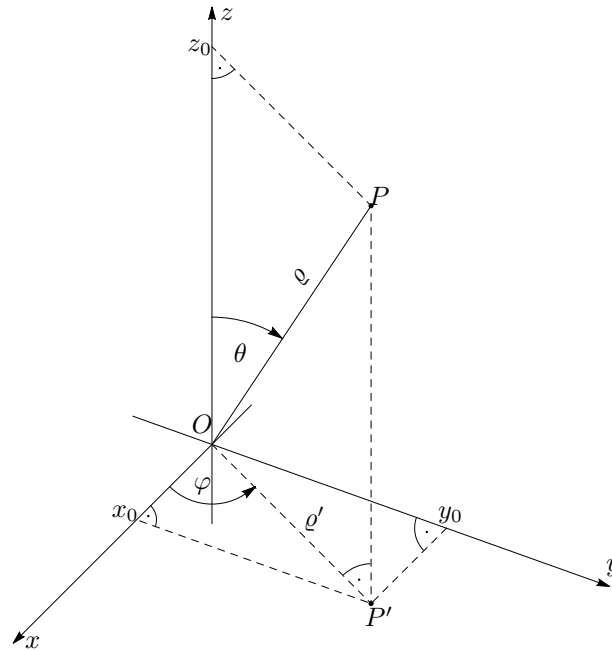
Słowa kluczowe: całka oznaczona, współrzędne parametryczne, współrzędne biegunowe, współrzędne sferyczne.

1. Powierzchnia zadana biegunowo

Podobnie jak dla krzywych na płaszczyźnie, które mogą być przedstawione biegunowo, możemy podać ich odpowiednik dla powierzchni z przestrzeni \mathbb{R}^3 . Tym razem każdy punkt przestrzeni (znowu przypominałyśmy o specyfice punktu $(0, 0)$) może być wyrażony poprzez dwa kąty i odległości tego punktu od początku układu współrzędnych. Pierwszy z nich – kąt φ – pełni rolę taką jak we współrzędnych biegunowych, a dokładniej jest kątem skierowanym pomiędzy dodatnią półosią Ox a rzutem na płaszczyznę Oxy odcinka łączącego początek układu współrzędnych z danym punktem. Drugi z tych kątów, kąt θ , odpowiada kątowi skierowanemu pomiędzy dodatnią półosią Oz i odcinkiem łączącym początek układu współrzędnych z danym punktem (zob. rys. 1).

Zauważmy, że w trójkącie prostokątnym $OP'P$ zachodzi zależność:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\rho'}{\rho} \implies \rho' = \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho \sin \theta.$$



Rysunek 1. Współrzędne sferyczne

Teraz z trójkąta prostokątnego Ox_0P' , podobnie jak w wyprowadzeniu współrzędnych biegunowych (część I, wzór (4)), mamy:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x_0}{\rho'} \\ \sin \varphi = \frac{y_0}{\rho'} \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = \rho' \cos \varphi = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y_0 = \rho' \sin \varphi = \rho \sin \theta \sin \varphi, \end{cases}$$

a z trójkąta prostokątnego Oz_0P otrzymujemy:

$$\cos \theta = \frac{z_0}{\rho} \implies z_0 = \rho \cos \theta.$$

W ten sposób otrzymaliśmy ostatecznie (są to tzw. współrzędne sferyczne):

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases} \quad (1)$$

Jeśli dla pewnych wartości φ i θ określimy funkcję $\rho(\varphi, \theta)$, otrzymamy wówczas powierzchnię w przestrzeni \mathbb{R}^3 . Zastanówmy się teraz, jak można, wykorzystując bezpośrednio funkcję $\rho(\varphi, \theta)$, obliczyć objętość tak zdefiniowanej bryły. Rozpatrzmy w tym celu obszar przestrzeni, w którym funkcja ρ określona jest dla $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Postępując analogicznie do przypadku dla obszaru na płaszczyźnie, obszar przestrzenny, po wprowadzeniu równomiernych podziałów normalnych dla zmiennych φ i θ , i takim samym wyborze punktów wewnętrznych (lewe końce podprzedziałów): ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, η_j , $j = 1, 2, \dots, m$, (zob. rys. 2) będziemy dążyć do możliwości skorzystania z definicji całki podwójnej.

Tym razem objętość takiego obszaru podzielona została na $n \cdot m$ części, z których objętość każdej przybliżyć będziemy objętością odpowiedniego ostrosłupa.

Poszukiwaną objętość przybliżymy sumą objętości powyższych ostrosłupów V_{ij} , gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$:

$$V \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m V_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varrho_{ij}^3 \sin \theta \operatorname{tg} \Delta \varphi \operatorname{tg} \Delta \theta,$$

a objętość ta będzie równa tej sumie, jeśli przejdziemy z podziałem (wartości parametrów n i m) do nieskończoności:

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m V_{ij} = \frac{1}{3} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varrho_{ij}^3 \sin \theta \operatorname{tg} \Delta \varphi \operatorname{tg} \Delta \theta.$$

Podobnie jak dla współrzędnych biegunowych, zauważmy że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \Delta \varphi}{\Delta \varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \Delta \theta}{\Delta \theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1,$$

dzięki czemu możemy napisać:

$$V = \frac{1}{3} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varrho_{ij}^3 \sin \theta \frac{\operatorname{tg} \Delta \varphi}{\Delta \varphi} \Delta \varphi \frac{\operatorname{tg} \Delta \theta}{\Delta \theta} \Delta \theta = \frac{1}{3} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varrho_{ij}^3 \sin \theta \Delta \varphi \Delta \theta,$$

co po skorzystaniu z definicji całki podwójnej, daje wzór:

$$V = \frac{1}{3} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho^3(\varphi, \theta) \sin \theta \, d\theta \right) d\varphi. \quad (2)$$

2. Przykłady

Na podstawie wzoru (2), w tym rozdziale postaramy się wyznaczyć objętości wybranych brył ograniczonych przez powierzchnię daną zależnością $\varrho(\varphi, \theta)$. W części rozwiązań skorzystamy ze skracającej zapis własności całki podwójnej, w której całkowana funkcja i przedział całkowania wewnętrznej całki zależy jedynie od drugiej zmiennej:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) \, d\theta \right) d\varphi &= \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) \, d\theta \right) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) \, d\theta \right) \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \\ &= (\varphi_2 - \varphi_1) \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) \, d\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

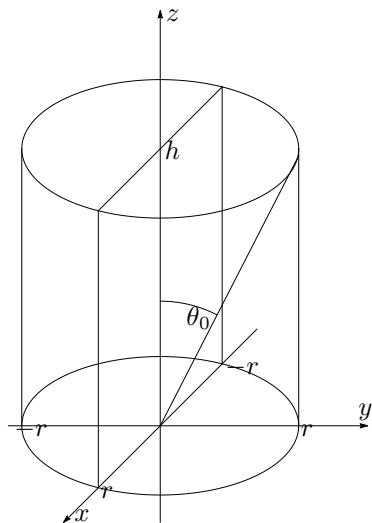
2.1. Sfera

Dla każdego punktu na sferze o środku w początku układu współrzędnych i promieniu r odległość tego punktu od środka tej sfery wynosi r . Tym samym równanie takiej sfery to po prostu $\varrho(\varphi, \theta) = r$, gdzie $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Łatwo zatem wyznaczyć objętość kuli ograniczonej rozpatrywaną sferą:

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} r^3 \sin \theta \, d\theta \right) d\varphi \stackrel{(3)}{=} \frac{2\pi r^3}{3} \left(-\cos \theta \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2\pi r^3}{3} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{2\pi r^3}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

2.2. Walec i stożek

Aby wyznaczyć objętość walca o promieniu podstawy długości r i wysokości h , umieścimy go w układzie współrzędnych, tak jak na rysunku 3.



Rysunek 3. Walec o promieniu podstawy długości r i wysokości h

Zauważmy, że walec taki możemy podzielić na dwie bryły, z czego w pierwszej z tych brył wartość ϱ wyznaczana jest przez górną podstawę walca:

$$z = h \iff \varrho \cos \theta = h \iff \varrho = \frac{h}{\cos \theta} \quad (\text{dla } 0 \leq \theta \leq \theta_0),$$

natomiast w drugiej bryle odległość ϱ wyznaczana jest przez powierzchnię boczną tego walca:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2, \\ \varrho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi &= r^2, \\ \varrho^2 \sin^2 \theta &= r^2, \\ \varrho &= \frac{r}{\sin \theta} \quad (\text{dla } \theta_0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Kąt θ_0 , dla którego rozdzielane są te bryły, wyznaczyć można, w zależności od pożądanej formy, z zależności:

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 &= \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}, & \text{ctg } \theta_0 &= \frac{h}{r}, \\ \theta_0 &= \arccos \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}, & \theta_0 &= \arccot \frac{h}{r}. \end{aligned}$$

Zatem objętość walca będzie określona sumą:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\theta_0} \frac{h^3}{\cos^3 \theta} \sin \theta \, d\theta \right) d\varphi + \int_0^{2\pi} \left(\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{\sin^3 \theta} \sin \theta \, d\theta \right) d\varphi \right) \stackrel{(3)}{=} \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(h^3 \int_0^{\theta_0} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta + r^3 \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta \right). \end{aligned}$$

Pierwszą z tych całek wyznaczmy przez podstawienie:

$$\left| \begin{array}{c|c|c} \cos \theta = u & \theta & 0 \\ \sin \theta d\theta = -du & u & 1 \end{array} \middle| \frac{\theta_0}{\frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}} = u_0} \right|$$

otrzymując:

$$-h^3 \int_1^{u_0} \frac{du}{u^3} = \frac{h^3}{2} \cdot \frac{1}{u^2} \Big|_1^{u_0} = \frac{h^3}{2} \left(\frac{r^2+h^2}{h^2} - 1 \right) = h^3 \cdot \frac{r^2}{2h^2} = \frac{r^2 h}{2},$$

a stąd:

$$V = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{r^2 h}{2} - r^3 \operatorname{ctg} \theta \Big|_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{r^2 h}{2} - r^3 \left(0 - \frac{h}{r} \right) \right) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{r^2 h}{2} + r^2 h \right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} r^2 h = \pi r^2 h.$$

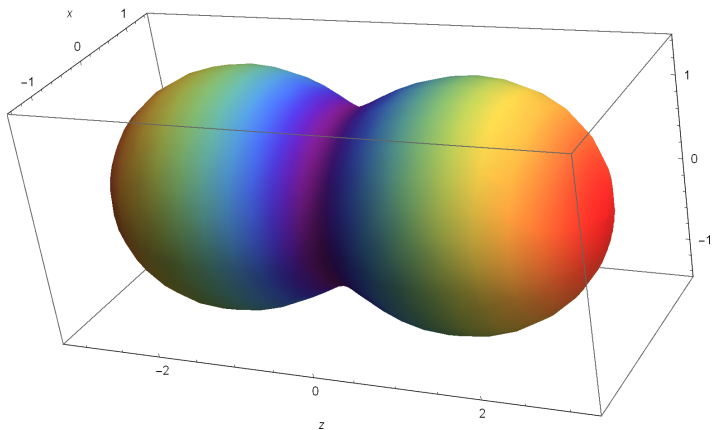
Zauważmy jednocześnie, że pierwsza z całek przedstawia sobą objętość stożka o promieniu podstawy długości r i wysokości h . Otrzymaliśmy więc znane już ze szkoły wzory na objętości walca i stożka.

2.3. Inne powierzchnie

W tej części pracy wyznaczmy objętości mniej znanych brył, dla części których wyznaczenie objętości w „tradycyjny” sposób nie byłoby takie łatwe (o ile byłoby w ogóle możliwe).

2.3.1. Orzeszek ziemny

Powierzchnia ta przedstawia się zależnością $\rho(\varphi, \theta) = a + \cos 2\theta$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $a \geq 1$, a jej wykres, dla $a = 2$, znajduje się na rysunku 4.



Rysunek 4. Powierzchnia „orzeszka ziemnego”

Zgodnie ze wzorem (2), tak ograniczony obszar ma objętość wyrażoną całką:

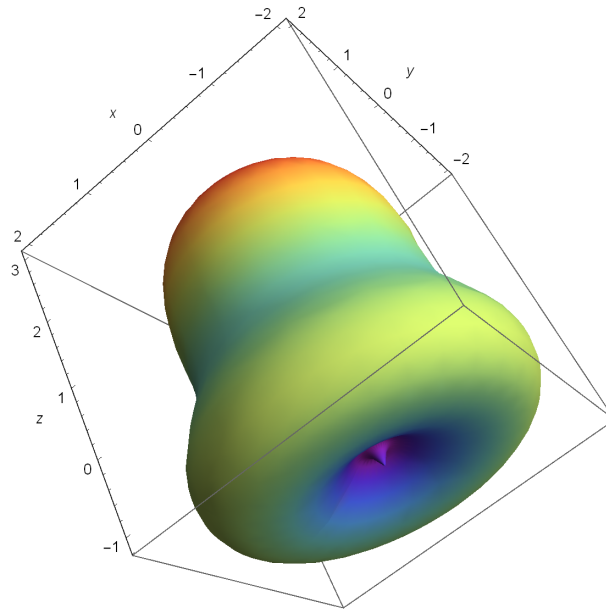
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi (a + \cos 2\theta)^3 \sin \theta d\theta \right) d\varphi \stackrel{(3)}{=} \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi (a + \cos 2\theta)^3 \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi (a - 1 + 2 \cos^2 \theta)^3 \sin \theta d\theta = \left| \begin{array}{c|c|c} \cos \theta = u & \theta & 0 \\ \sin \theta d\theta = -du & u & 1 \end{array} \middle| \frac{\pi}{-1} \right| = \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_{-1}^1 (a - 1 + 2u^2)^3 du = \frac{2\pi}{3} \int_{-1}^1 ((a - 1)^3 + 6(a - 1)^2 u^2 + 12(a - 1)u^4 + 8u^6) du. \end{aligned}$$

Ta prosta całka, po uproszczeniu wyniku, daje ostatecznie objętość orzeszka:

$$V = \frac{4\pi}{105} (35a^3 - 35a^2 + 49a - 9).$$

2.3.2. Dzwonek

Powierzchnia ta przedstawia się zależnością $\varrho(\varphi, \theta) = a + \sin 2\theta + \cos 3\theta$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $a \geq 2$, a jej wykres, dla $a = 2$, znajduje się na rysunku 5.



Rysunek 5. Powierzchnia „dzwonek”

Zgodnie ze wzorem (2), tak ograniczony obszar ma objętość wyrażoną całką:

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi (a + \sin 2\theta + \cos 3\theta)^3 \sin \theta \, d\theta \right) d\varphi \stackrel{(3)}{=} \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi (a + \sin 2\theta + \cos 3\theta)^3 \sin \theta \, d\theta.$$

Zauważmy, że wśród dziesięciu składników rozwiniętego sześciangu, sześć z nich ma jako czynnik nieparzystą potęgę $\cos 3\theta$, a ponieważ $\cos 3\theta = \cos \theta(1 - 4\sin^2 \theta)$ (pamiętajmy o „ukrytym” kosinusie: $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$), to mamy ($n + m = 2k + 1$, $0 \leq n, m \leq 3$, $n + m \leq 3$):

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^n 3\theta \sin^m 2\theta \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi \cos^n \theta (1 - 4\sin^2 \theta)^n 2^m \sin^m \theta \cos^m \theta \sin \theta \, d\theta = \\ &= 2^m \int_0^\pi \cos^{2k+1} \theta (1 - 4\sin^2 \theta)^n \sin^{m+1} \theta \, d\theta = 2^m \int_0^\pi \cos \theta (\cos^2 \theta)^k (1 - 4\sin^2 \theta)^n \sin^{m+1} \theta \, d\theta = \\ &= 2^m \int_0^\pi \cos \theta (1 - \sin^2 \theta)^k (1 - 4\sin^2 \theta)^n \sin^{m+1} \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

Stosując w tej całce podstawienie $\sin \theta = u$, otrzymamy $\cos \theta d\theta = du$ oraz nowe granice całkowania:

$\frac{\theta}{u} \left| \begin{array}{c|c} 0 & \pi \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right.$. Oczywiście jest więc, że

$$2^m \int_0^1 (1-u^2)^k (1-4u^2)^n u^{m+1} du = 0.$$

Pozostaje zatem wyznaczyć tylko cztery pozostałe składniki, więc poszukiwana objętość przyjmie postać:

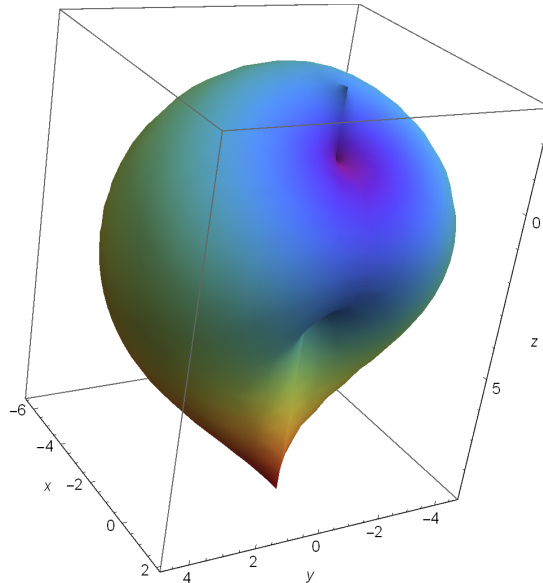
$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi (a^3 + 3a \cos^2 3\theta + 6a \cos 3\theta \sin 2\theta + 3a \sin^2 2\theta) \sin \theta d\theta.$$

W tej całce, nie licząc prostego pierwszego składnika, wykorzystując wzory $\cos 3\theta = \cos \theta(4 \cos^2 \theta - 3)$ i $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, będziemy mieli wyłącznie parzyste potęgi $\cos \theta$ i mnożnik $\sin \theta$, więc wykonując podstawienie $\cos \theta = u$, sprowadzimy tę całkę do całki z wielomianu. Otrzymamy więc ostatecznie:

$$V = \frac{2a\pi}{3} \left(\frac{214}{35} + 2a^2 - \frac{3\pi}{2} \right).$$

2.3.3. Muszelka

Powierzchnia ta przedstawia się zależnością $\varrho(\varphi, \theta) = (a + \cos \theta)(b - \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $a \geq 1$, $b \geq 1$, a jej wykres, dla $a = b = 2$, znajduje się na rysunku 6.



Rysunek 6. Powierzchnia „muszelki”

Zgodnie ze wzorem (2), tak ograniczony obszar ma objętość wyrażoną całką:

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi ((a + \cos \theta)(b - \cos \varphi))^3 \sin \theta d\theta \right) d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left((b - \cos \varphi)^3 \int_0^\pi (a + \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta \right) d\varphi.$$

Wewnętrzną całkę łatwo wyznaczyć można przez podstawienie $a + \cos \theta = u$, skąd $\sin \theta d\theta = -du$, przy czym $\frac{\theta}{u} \Big|_{a+1}^{\pi} \Big|_{a-1}^{\pi}$. Mamy zatem:

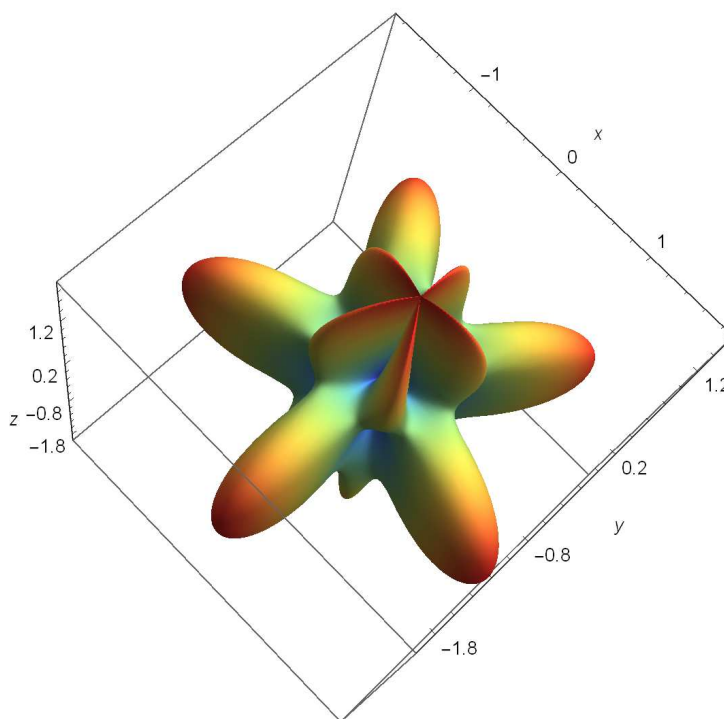
$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left((b - \cos \varphi)^3 \int_{a-1}^{a+1} u^3 du \right) d\varphi = \frac{(a+1)^4 - (a-1)^4}{12} \int_0^{2\pi} (b - \cos \varphi)^3 d\varphi.$$

Wykorzystując wzory na różnicę kwadratów i sześcián różnicy, łatwo uzyskamy końcowy rezultat:

$$V = \frac{2}{3} a(1 + a^2)b(3 + 2b^2)\pi.$$

2.3.4. Owoc egzotyczny

Powierzchnia ta przedstawia się zależnością $\rho(\varphi, \theta) = a + \cos 2\theta \sin 5\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $a \geq 1$, a jej wykres, dla $a = 1$, znajduje się na rysunku 7.



Rysunek 7. Powierzchnia „owocu egzotycznego”

Zgodnie ze wzorem (2), tak ograniczony obszar ma objętość wyrażoną całką:

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi (a + \cos 2\theta \sin 5\varphi)^3 \sin \theta d\theta \right) d\varphi.$$

Ponieważ $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$, to stosując podstawienie $\cos \theta = u$, skąd $\sin \theta d\theta = -du$, przy czym granice całkowania przyjmą wartości: $\frac{\theta}{u} \left| \begin{array}{c|c} 0 & \pi \\ 1 & -1 \end{array} \right.$, oznaczając $p = a - \sin 5\varphi$, $q = 2 \sin 5\varphi$, otrzymamy:

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^1 (p + qu^2)^3 du \right) d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \left(p^3 + p^2 q + \frac{3}{5} p q^2 + \frac{q^3}{7} \right) d\varphi.$$

Wracając do zmiennej φ , po prostych przekształceniach otrzymamy:

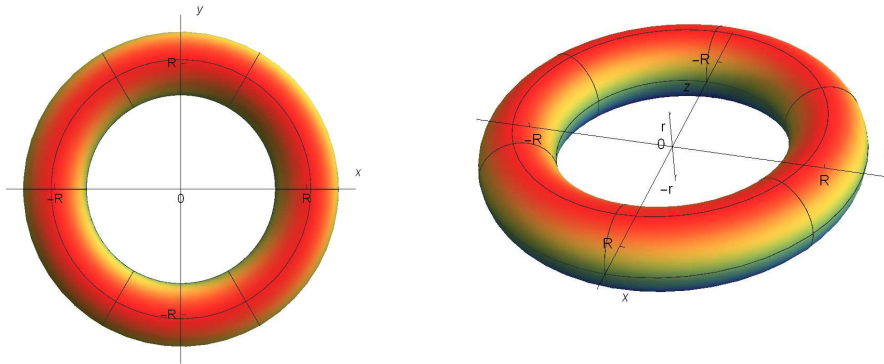
$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \left(a^3 - a^2 \sin 5\varphi + \frac{7}{5} a \sin^2 5\varphi - \frac{9}{35} \sin^3 5\varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{7}{10} a + a^3 + \frac{7}{10} a \cos 10\varphi - \left(\frac{9}{35} + a^2 \right) \sin 5\varphi + \frac{9}{35} \sin 5\varphi \cos^2 5\varphi \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Taką całkę można już łatwo wyznaczyć (ostatnia składowa przez podstawienie), otrzymując ostatecznie:

$$V = \frac{2\pi a}{15} (7 + 10a^2).$$

2.3.5. Torus

Torus to powierzchnia powstała z obrotu okręgu o promieniu r , którego środek jest oddalony od osi obrotu o R , $0 < r < R$.



Rysunek 8. Torus, po lewej widok z góry, po prawej widok „3D”

Przykładowo, jeśli weźmiemy okrąg o środku w punkcie $(0, R, 0)$ i obrócimy go wokół osi Oz , to można łatwo pokazać, że równanie powierzchni tego torusa (zob. rys. 8) ma postać:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2.$$

Chcąc otrzymać funkcję $\varrho(\varphi, \theta)$ przedstawiającą tę powierzchnię, wprowadźmy współrzędne (1):

$$\left(\sqrt{\varrho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} - R \right)^2 + \varrho^2 \cos^2 \theta = r^2,$$

a stąd, po prostych przekształceniach:

$$\left(\sqrt{\varrho^2 \sin^2 \theta} - R \right)^2 + \varrho^2 \cos^2 \theta = r^2.$$

Ponieważ interesuje nas tylko pierwszy oktant przestrzeni $(x, y, z \geq 0)$, czyli $\frac{1}{8}$ torusa, możemy napisać:

$$\begin{aligned}(\varrho \sin \theta - R)^2 + \varrho^2 \cos^2 \theta &= r^2, \\ \varrho^2 \sin^2 \theta - 2\varrho R \sin \theta + R^2 + \varrho^2 \cos^2 \theta &= r^2, \\ \varrho^2 - 2\varrho R \sin \theta + R^2 - r^2 &= 0.\end{aligned}$$

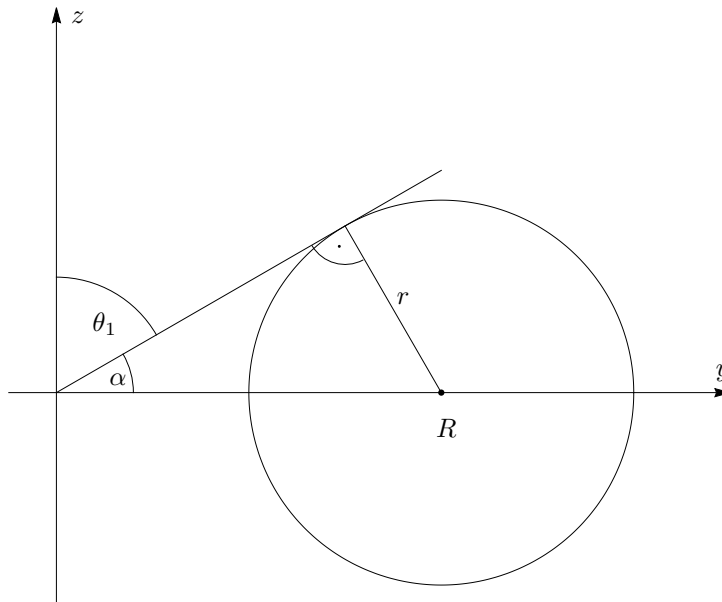
Traktując ostatnie równanie jako równanie kwadratowe zmiennej ϱ , mamy:

$$\Delta = 4R^2 \sin^2 \theta - 4(R^2 - r^2) = 4(R^2(\sin^2 \theta - 1) + r^2) = 4(r^2 - R^2 \cos^2 \theta),$$

a stąd:

$$\varrho_{1,2} = \frac{2R \sin \theta \mp 2\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta}}{2} = R \sin \theta \mp \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta}.$$

Zauważmy, że $\varrho_2 = R \sin \theta + \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta} > 0$, a ponieważ $R > 0$, czyli $R^2 > r^2$, a tym samym również $R \sin \theta > \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta}$, więc $\varrho_1 > 0$ (łatwo można zauważyć, że $r^2 - R^2 \cos^2 \theta > 0$ w całym rozpatrywanym przez nas obszarze). Aby opisać zakres zmiennych φ i θ , wykonajmy przekrój torusa płaszczyzną $x = 0$ (dla $y > 0$, zob. rys. 9):



Rysunek 9. Torus – wyznaczenie kąta θ_1

Kąt θ_1 jest kątem pomiędzy dodatnią półosią Oz , a styczną do okręgu $(y-R)^2 + z^2 = r^2$, przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Łatwo możemy wyznaczyć wartość $\sin \alpha = \frac{r}{R}$, a stąd:

$$\cos \theta_1 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha = \frac{r}{R} \implies \theta_1 = \arccos \frac{r}{R}.$$

Oczywiście w pierwszym oktancie mamy $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, a $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Zatem objętość bryły ograniczonej powierzchnią torusa wynosi:

$$V = \frac{8}{3} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho_2^3 \sin \theta \, d\theta \right) d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho_1^3 \sin \theta \, d\theta \right) d\varphi \right) \stackrel{(3)}{=} \frac{4\pi}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\varrho_2^3 - \varrho_1^3) \sin \theta \, d\theta.$$

Łatwo, wykorzystując wzór na różnicę sześciątów, można pokazać, że:

$$\varrho_2^3 - \varrho_1^3 = 2\sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta} (r^2 + 3R^2 - 4R^2 \cos^2 \theta),$$

więc do wyznaczenia mamy całkę opisującą poszukiwaną objętość:

$$V = \frac{8\pi}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 - R^2 \cos^2 \theta} (r^2 + 3R^2 - 4R^2 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta,$$

którą obliczymy wykorzystując podstawienie $\cos \theta = \frac{r}{R}u$, z którego $\sin \theta d\theta = -\frac{r}{R}du$ oraz $\frac{\theta}{u} \Big|_{u_1}^{\theta_2}$ przy czym (zob. rys. 9) $u_1 = \frac{R}{r} \cos \theta_1 = \frac{R}{r} \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{R}{r} \sin \alpha = \frac{R}{r} \cdot \frac{r}{R} = 1$, a $u_2 = \frac{R}{r} \cos \theta_2 = \frac{R}{r} \cos \frac{\pi}{2} = 0$, więc

$$\begin{aligned} V &= \frac{8\pi r}{3R} \int_0^1 \sqrt{r^2 - r^2 u^2} (r^2 + 3R^2 - 4R^2 \cdot \frac{r^2}{R^2} u^2) du = \frac{8\pi r^2}{3R} \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} (r^2 + 3R^2 - 4r^2 u^2) du = \\ &= \frac{8\pi r^2}{3R} \left((r^2 + 3R^2) \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du - 4r^2 \int_0^1 u^2 \sqrt{1 - u^2} du \right). \end{aligned}$$

Pierwsza z tych całek wyraża sobą pole ćwiartki koła o promieniu 1, więc jej wartość wynosi $\frac{\pi}{4}$, a druga całka może być wyznaczona metoda współczynników nieoznaczonych (zob. [7]), po przedstawieniu jej w postaci:¹

$$\int x^2 \sqrt{1 - x^2} dx = \int \frac{x^2(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{1}{8} (x(2x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x) + c.$$

Mamy stąd:

$$\begin{aligned} V &= \frac{8\pi r^2}{3R} \left((r^2 + 3R^2) \frac{\pi}{4} - \frac{r^2}{2} (u(2u^2 - 1)\sqrt{1 - u^2} + \arcsin u) \Big|_0^1 \right) = \\ &= \frac{8\pi r^2}{3R} \left((r^2 + 3R^2) \frac{\pi}{4} - \frac{r^2}{2} \arcsin 1 \right) = \frac{8\pi r^2}{3R} \left((r^2 + 3R^2) \frac{\pi}{4} - \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{2\pi^2 r^2}{3R} (r^2 + 3R^2 - r^2) = 2\pi^2 r^2 R. \end{aligned}$$

Otrzymany rezultat można zweryfikować np. wykorzystując wzór na objętość bryły obrotowej. Okazuje się (zob. np. [9]), że wynik jest poprawny.

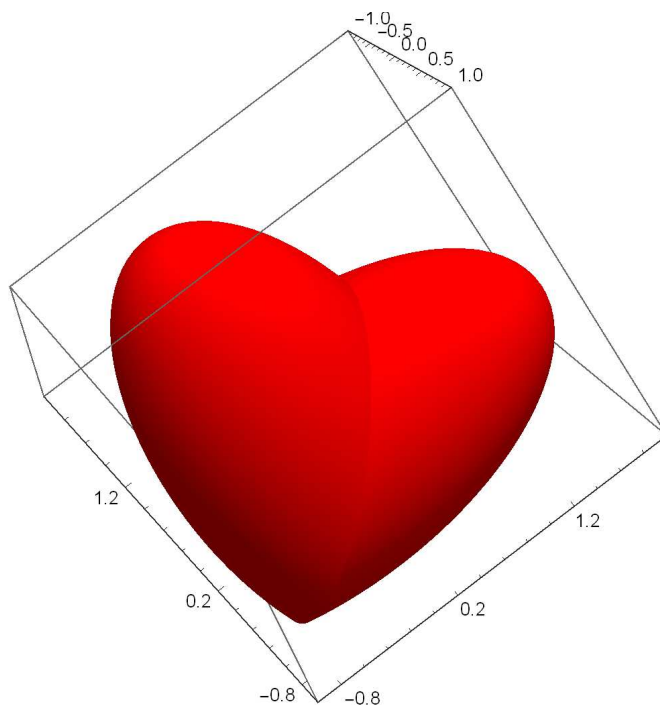
¹Metodę współczynników nieoznaczonych wspominamy tutaj w celach dydaktycznych, tę całkę możemy dość łatwo wyznaczyć przez podstawienie:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^2 \sqrt{1 - u^2} du &= \int_{0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}} \cos^2 v \sqrt{1 - \cos^2 v} \sin v dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v \sin^2 v dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cos v \sin v \right)^2 dv = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2v dv = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4v) dv = \\ &= \frac{1}{8} \left(v - \frac{1}{4} \sin 4v \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Po pomnożeniu tak otrzymanego wyniku przez $-4r^2$ otrzymamy $-\frac{\pi r^2}{4}$, czyli ten sam wynik, który uzyskaliśmy dzięki metodzie współczynników nieoznaczonych.

2.3.6. Powierzchnia serce

Na koniec wyznaczmy objętość bryły przypominającej serce – powierzchni serca Essera [4]. Powierzchnia ta powstaje po przecięciu płaszczyzną $y = x$ dwóch elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 = 1$ i $x^2 + \frac{y^2}{a^2} + z^2 = 1$. Łatwo można zauważyć, że elipsoidy te są połowione tym cięciem (objętościowo). Po wybraniu odpowiednich (dla pierwszej z elipsoid wybieramy fragment, w którym $y \leq x$, a dla drugiej, gdzie $y \geq x$) ich części powstaje ta bryła (zob. rys. 10, na którym przyjęliśmy $a = 2$).



Rysunek 10. Powierzchnia przypominająca serce

Ponieważ objętość elipsoidy o półosiach a , b i c wynosi $\frac{4}{3}\pi abc$, więc powinniśmy otrzymać wartość $\frac{4}{3}\pi a$. Wprowadźmy do równania $\frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 = 1$ współrzędne (1). Otrzymamy wówczas:

$$\frac{1}{a^2} \varrho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \varrho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \varrho^2 \cos^2 \theta = 1,$$

a stąd:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}.$$

Ponieważ dla $y \leq x$ kąt $-\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, więc objętość tego serca przedstawia się równaniem:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^\pi \left(\frac{1}{a^2} \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right)^{-\frac{2}{3}} \sin \theta d\theta \right) d\varphi.$$

Całkując przez podstawienie $\cos \theta = u$, skąd $\sin \theta d\theta = -du$ i zmieniając granice całkowania w wewnętrznej całce: $\frac{\theta}{u} \Big|_0^{\pi} \Big|_1^{-1}$ otrzymamy:

$$V = \frac{2}{3} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{-1}^1 \frac{du}{\left(u^2 \left(1 - \sin^2 \varphi - \frac{\cos^2 \varphi}{a^2}\right) + \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \sin^2 \varphi\right)^{\frac{3}{2}}}\right) d\varphi.$$

Korzystając z pomocniczej niewymiernej całki dwumiennej (zob. np. [3]):²

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(ax^2 + b)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{b\sqrt{ax^2 + b}} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{b\sqrt{a+b}},$$

mamy:

$$V = \frac{4}{3} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \sin^2 \varphi\right) \sqrt{1 - \sin^2 \varphi - \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \sin^2 \varphi}} = \frac{4}{3} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2 d\varphi}{\cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Wyłączając w mianowniku $\cos^2 \varphi$ przed nawias otrzymamy prostą do scałkowania postać, ale nieco ukrytą całkę niewłaściwą:

$$V = \frac{4a^2}{3} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi (1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)}.$$

Musimy więc ją przedstawić w postaci sumy dwóch całek niewłaściwych:

$$V = \frac{4a^2}{3} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi (1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi (1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)} \right).$$

²Tutaj, podobnie jak w przykładzie z torusem, całkę dwumienną wspominamy w celach dydaktycznych. Całkę tę można dość łatwo wyznaczyć dzięki podstawieniu (zauważmy również, że całkujemy funkcję parzystą w przedziale symetrycznym):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(ax^2 + b)^{\frac{3}{2}}} &= 2 \int_0^1 \frac{dx}{(ax^2 + b)^{\frac{3}{2}}} = \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{tg} u \\ dx = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{1}{\cos^2 u} du \end{array} \right| \frac{x}{u} \Big|_0^1 \Big|_0^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{a}{b}} = v_1} = \\ &= 2 \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^{v_1} \frac{1}{(b \operatorname{tg}^2 u + b)^{\frac{3}{2}} \cos^2 u} \frac{du}{\cos^2 u} \stackrel{\left(\operatorname{tg}^2 u + 1 = \frac{1}{\cos^2 u}\right)}{0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{b\sqrt{a}} \int_0^{v_1} \cos u du = \\ &= \frac{2}{b\sqrt{a}} \sin u \Big|_0^{v_1} = \frac{2}{b\sqrt{a}} \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{a}{b}}. \end{aligned}$$

Wykorzystując tożsamość cyklometryczną:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}, \quad x \geq 0,$$

otrzymamy:

$$\frac{2}{b\sqrt{a}} \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{2}{b\sqrt{a}} \sin \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{\frac{a}{b}}{1+\frac{a}{b}}} = \frac{2}{b\sqrt{a}} \sqrt{\frac{a}{a+b}} = \frac{2}{b\sqrt{a+b}}.$$

Otrzymaliśmy więc w ten sposób ten sam wynik, jaki uzyskaliśmy dzięki zastosowaniu metody odpowiadającej całce dwumiennej.

Wyznamy pomocniczo całkę $\int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi (1+a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)}$ przez podstawienie $\operatorname{tg} \varphi = \frac{u}{a}$, z którego $\frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{a} du$. Mamy zatem:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi (1+a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} u + c = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \varphi + c,$$

a stąd:

$$V = \frac{4a}{3} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{arc} \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \varphi \Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{arc} \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \right).$$

Wykorzystując fakt, że: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{-3\pi}{4}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4a}{3} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{arc} \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{arc} \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \right) = \\ &= \frac{4a}{3} [\operatorname{arc} \operatorname{tg}(a \cdot \infty) - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(a \cdot (-\infty))] = \frac{4a}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{4a}{3} \pi. \end{aligned}$$

Podsumowanie

W pracy pokazaliśmy, jak w mniej intuicyjny, czy w mniej powszechny sposób można obliczać pola (w części pierwszej) i objętości (w części drugiej) pewnych obszarów. Wybrane przez nas przykłady miały pokazać, że wybór metody często znacząco skraca czas obliczeń i znacząco ułatwia rachunki. Przykłady staraliśmy się dobrać również pod kątem dydaktycznym, chcieliśmy aby były one niebanalne, a rozwiązania zawierały miejsca, w których łatwo można popełnić błąd, dzięki czemu takie ćwiczenia rachunkowe były dobrym przypomnieniem metod wyznaczania całek nieoznaczonych i oznaczonych (w tym całki niewłaściwej).

Pozostaje jeszcze pytanie o weryfikację otrzymanych wyników, szczególnie dla przykładów dotyczących orzeszka, dzwonka, muszli czy kwiatu, dla których wyznaczyliśmy objętości powołując się jedynie na otrzymany przez nas wzór (2).

Pierwotnie naszym zamierzeniem było napisanie programów, które obliczałyby pola obszarów zadanych parametrycznie lub biegunowo i objętości brył ograniczonych powierzchnią $\varrho(\varphi, \theta)$. Programy takie powstały, a wyniki te zostały zweryfikowane, jednak z uwagi na obecną objętość pracy, postanowiliśmy nie zamieszczać i nie omawiać tych programów. Mamy nadzieję, że będzie to tematem kolejnej pracy.

Podziękowania

Autorzy pragną podziękować recenzentom za trud włożony w recenzje.

Literatura

1. A. Bryll, R. Sochacki, *Interesujące krzywe płaskie*, Wydawnictwo Wydziału Zarządzania Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2015.
2. A. Bryll, R. Sochacki, *Krzywe o sławnych nazwiskach*, Wydawnictwo Uniwersytetu Opolskiego, Opole 2013.
3. G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy Tom 2*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2011.
4. G.N. Frederickson, *Hinged Dissections: Swinging & Twisting*, Cambridge University Press, Nowy Jork 2002.

5. R. Grzymkowski, *Matematyka dla studentów wyższych uczelni technicznych*, WPKJS, Gliwice 2002.
6. C. Hastings, K. Mischo, M. Morrison, *Hands-on Start to Wolfram Mathematica and Programming with the Wolfram Language, Third Edition*, Wolfram Media, Inc. 2020.
7. W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
8. J.D. Lawrence, *A catalog of special plane curves*, Dover Publications, Inc., Nowy Jork 1972.
9. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
10. I.A. Maron, *Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego, funkcje jednej zmiennej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1974.
11. E. Niczyporowicz, *Krzywe płaskie, wybrane zagadnienia z geometrii analitycznej i różniczkowej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.
12. M. Stark, *Geometria analityczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1967.