MINUT 2021 (3), s. 106–127
ISSN 2719-3063

MATEMATYKA I INFORMATYKA NA UCZELNIACH TECHNICZNYCH

Elwira MATEJA–LOSA[1]

[1]Katedra Zastosowań Matematyki i Metod Sztucznej Inteligencji, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Wyznaczanie asymptot wykresów funkcji

Streszczenie. Tematem artykułu są asymptoty wykresów funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Opracowanie przeznaczone jest przede wszystkim dla studentów pierwszego roku studiów inżynierskich. Artykuł wymaga znajomości pojęć granicy funkcji jednej zmiennej, ciągłości funkcji, rodzajów nieciągłości oraz umiejętności wyznaczania granic. W niniejszym tekście przedstawiono podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące asymptot, które zilustrowano na przykładach. Na końcu artykułu zamieszczono zadania do samodzielnego rozwiązania.

Słowa kluczowe: asymptota pionowa, asymptota ukośna, asymptota pozioma, granica funkcji, ciągłość funkcji, wykres funkcji.

1. Wstęp

Umiejętność wyznaczania asymptot pomaga w sporządzeniu wykresów funkcji. Wykresy służą do graficznego, poglądowego przedstawienia zależności między różnymi wielkościami. Na podstawie wykresu można szybko określić wiele własności funkcji, takich jak monotoniczność, najmniejszą i największa wartość (jeśli funkcja je posiada), wypukłość ku górze, wypukłość ku dołowi.

Dla scharakteryzowania przebiegu funkcji ważne jest zbadanie, jak zachowuje się wykres funkcji, gdy odległości jego punktów od początku układu wzrastają nieograniczenie. Interesujące jest również zachowanie wykresu funkcji w sąsiedztwie punktów, które nie należą do dziedziny danej funkcji i jednocześnie są punktami skupienia tej dziedziny.

Wyznaczanie asymptot wiąże się z obliczaniem pewnych granic (warto przeczytać np. artykuł [4]).

2. Podstawowe definicje i twierdzenia

2.1. Asymptota pionowa

Prosta o równaniu $x = x_0$ może być asymptotą pionową lewostronną (rys. 1), prawostronną (rys. 2) lub obustronną (rys. 3 i 4) krzywej $y = f(x)$, gdzie f jest pewną funkcją.

Autor korespondencyjny: Elwira Mateja-Losa(Elwira.Mateja@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 18.08.2021.

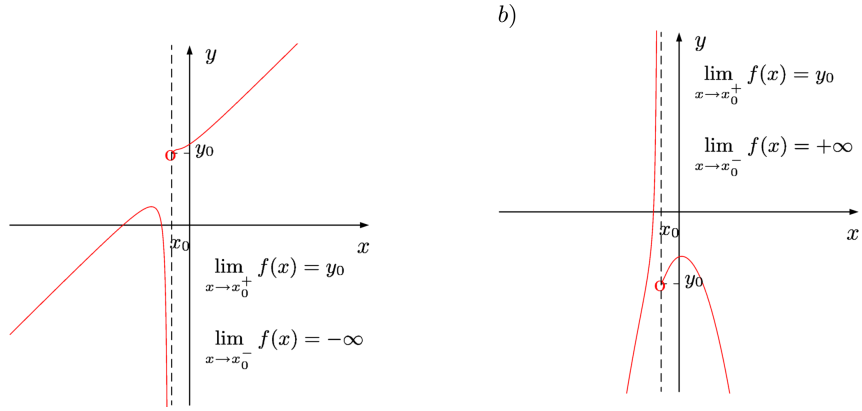
Definicja 1. *Prosta o równaniu*

$$x = x_0$$

jest asymptotą pionową lewostronną krzywej $y = f(x)$*, jeżeli granica lewostronna funkcji* f *w punkcie* x_0 *jest niewłaściwa, czyli gdy*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad \textit{lub} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty. \tag{1}$$

a) *b*)



Rysunek 1. Przykłady asymptot pionowych lewostronnych o równaniu $x = x_0$

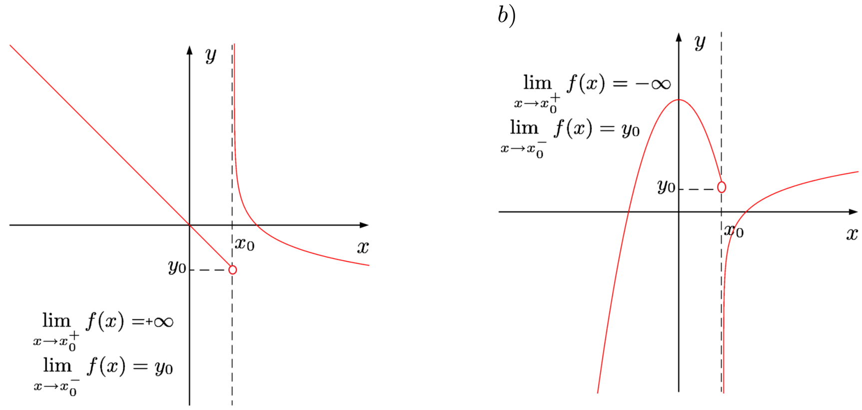
Definicja 2. *Prosta o równaniu*

$$x = x_0$$

jest asymptotą pionową prawostronną krzywej $y = f(x)$*, jeżeli granica prawostronna funkcji* f *w punkcie* x_0 *jest niewłaściwa, czyli gdy*

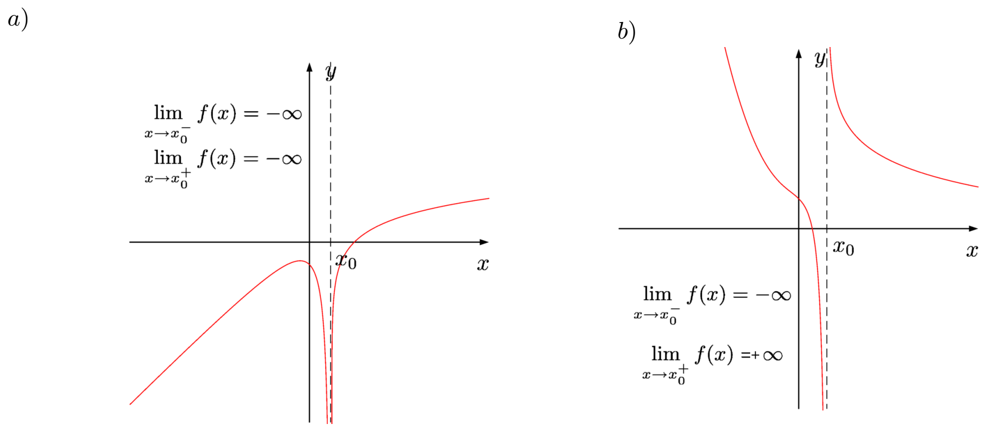
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \qquad \textit{lub} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty. \tag{2}$$

a) *b*)

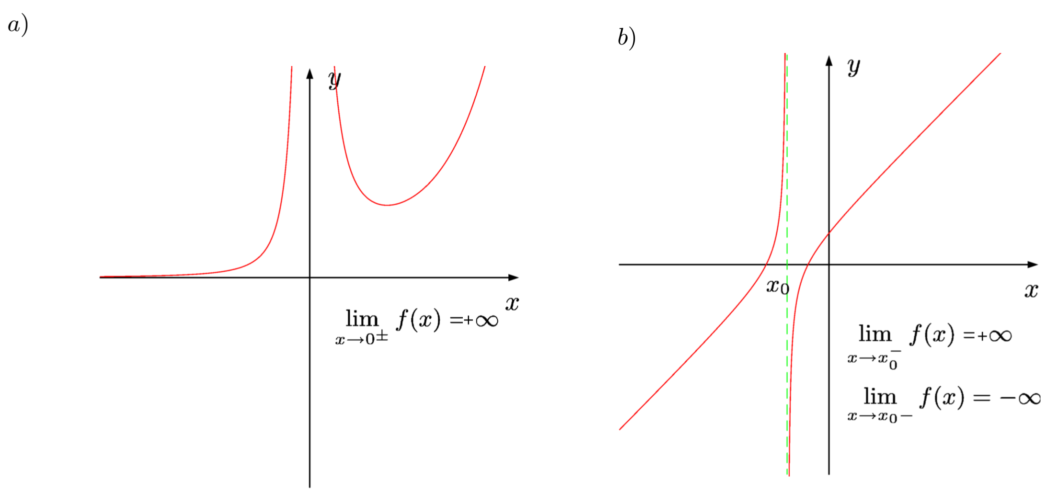


Rysunek 2. Przykłady asymptot pionowych prawostronnych o równaniu $x = x_0$

Definicja 3. *Prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową obustronną krzywej $y = f(x)$, jeżeli jest jednocześnie asymptotą lewostronną i prawostronną tej krzywej.*



Rysunek 3. Przykłady asymptot pionowych obustronnych o równaniu $x = x_0$



Rysunek 4. Przykłady asymptot pionowych obustronnych o równaniu $x = x_0$

Fakt 1

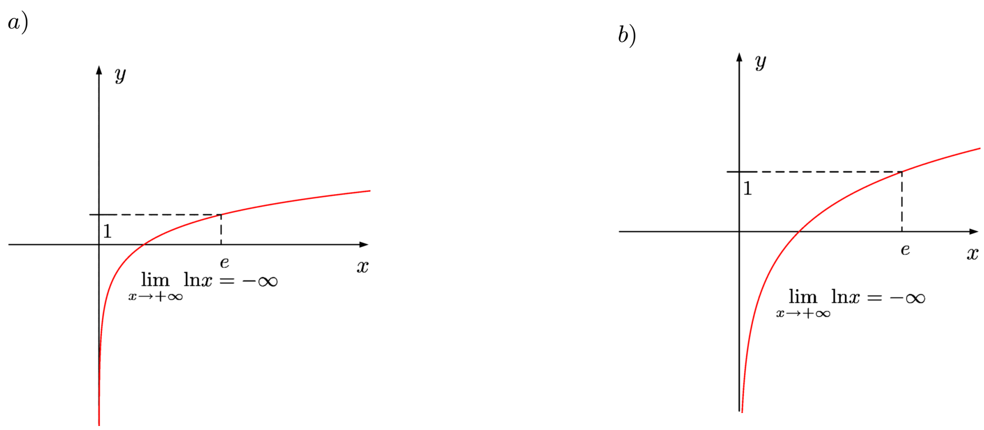
Wykres funkcji f może mieć asymptoty pionowe jedynie w punktach nieciągłości II rodzaju tej funkcji.

Fakt 2

Jeżeli funkcja jest ciągła w $\mathbb{R}$, to jej wykres nie ma asymptot pionowych.
Jeżeli funkcja jest ciągła, ale jej dziedziną nie jest zbiór liczb $\mathbb{R}$, to wykres tej funkcji może mieć asymptoty pionowe.

Przykład 1. Krzywa $y = \ln x$ (przedstawiona na rys. 5) posiada asymptotę pionową prawostronną o równaniu $x = 0$, ponieważ

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$



Rysunek 5. Krzywa $y = \ln x$ i jej asymptota pionowa prawostronna o równaniu $x = 0$

Zwróćmy uwagę, że jeśli rysujemy wykresy za pomocą programów komputerowych, to nasza krzywa może zlewać się z asymptotą i należy być świadomym faktu, że w rzeczywistości krzywa nie dotyka osi rzędnych (OY), jednak odległość między krzywą a asymptotą jest tak mała, że na sporządzonym wykresie widocznym na rys. 5*a* styka się z osią OY; przy zmianie zakresu zmiennych oś OY nie dotyka wykresu, co ilustruje rysunek 5*b*.

Fakt3

Wykres funkcji wymiernej zapisanej w postaci nieskracalnego ułamka $y = \frac{L(x)}{M(x)}$, gdzie L i M są wielomianami, posiada asymptoty pionowe o równaniu $x = x_0$, gdzie $M(x_0) = 0$.

Przykład 2. W celu zilustrowania faktu 3 rozpatrzmy funkcję wymierną postaci

$$y = \frac{x-1}{x+1}.$$

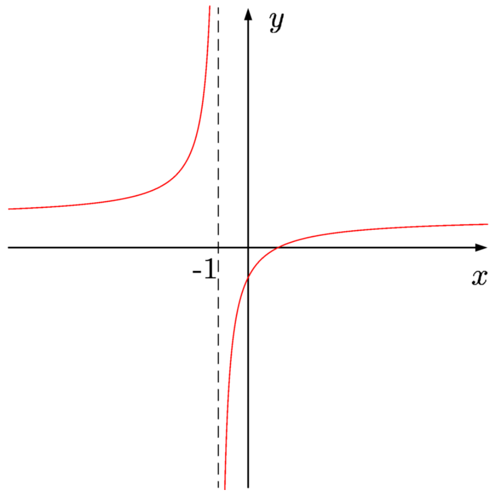
Funkcja wymierna jest w postaci ułamka nieskracalnego, a jej dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Obliczmy następujące granice:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty.$$

Wnioskujemy więc, że prosta o równaniu $x = -1$ jest asymptotą pionową obustronną rozpatrywanej krzywej (krzywą przedstawiono na rys. 6).

Uwaga 1. W rozpatrywanych przykładach zamieszczono wykresy analizowanych funkcji, aby ułatwić czytelnikowi zrozumienie omawianych zagadnień. Należy tutaj jednak podkreślić, że znajomość samych asymptot często bywa niewystarczająca do sporządzenia poprawnego szkicu wykresu funkcji.



Rysunek 6. Wykres krzywej $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ i jej asymptota pionowa o równaniu $x = -1$

Przykład 3. Rozpatrzmy następującą funkcję wymierną

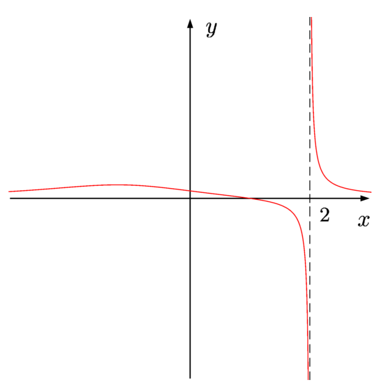
$$f(x) = \frac{x-1}{x^3-8}.$$

Funkcja wymierna jest w postaci ułamka nieskracalnego, a jej dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Wyznaczymy następujące granice:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x-1}{x^3-8} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{x^3-8} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty.$$

Wnioskujemy więc, że prosta o równaniu $x = 2$ jest asymptotą pionową wykresu rozpatrywanej funkcji wymiernej, co możemy zobaczyć na rysunku 7. Zwróćmy uwagę, że wykres badanej funkcji zlewa się z asymptotą o równaniu $x = 2$.



Rysunek 7. Wykres funkcji $y = \dfrac{x-1}{x^3-8}$ i jego asymptota pionowa o równaniu $x = 2$

Przykład 4. Znajdziemy asymptoty pionowe wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{x(x-3)}.$$

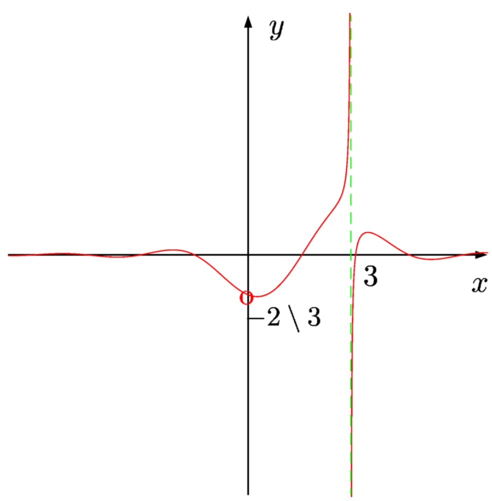
Dziedziną rozpatrywanej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}\setminus\{0,3\}$. Jej wykres może mieć tylko dwie asymptoty pionowe (o równaniach $x = 0$, $x = 3$), ponieważ funkcja ma tylko dwa punkty nieciągłości: 0 i 3. Aby zbadać rodzaje nieciągłości, obliczymy następujące granice:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x(x-3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x^2-3x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{2x-3} = \left[\frac{2}{-3}\right] = -\frac{2}{3},$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\sin 2x}{x(x-3)} = \left[\frac{\sin 6}{0^+}\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\sin 2x}{x(x-3)} = \left[\frac{\sin 6}{0^-}\right] = +\infty.$$

Wnioskujemy, że wykres tej funkcji nie ma asymptoty pionowej $x = 0$, ponieważ granica funkcji przy $x \to 0$ jest właściwa (w punkcie 0 funkcja ma nieciągłość usuwalną). Istnieje asymptota pionowa obustronna o równaniu $x = 3$ (wykres przedstawiono na rys. 8).



Rysunek 8. Wykres funkcji $y = \dfrac{\sin 2x}{x(x-3)}$ i jego asymptota pionowa o równaniu $x = 2$

Przykład 5. Wyznaczymy asymptoty pionowe wykresu funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \geq 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{dla} \quad x < 1. \end{cases}$$

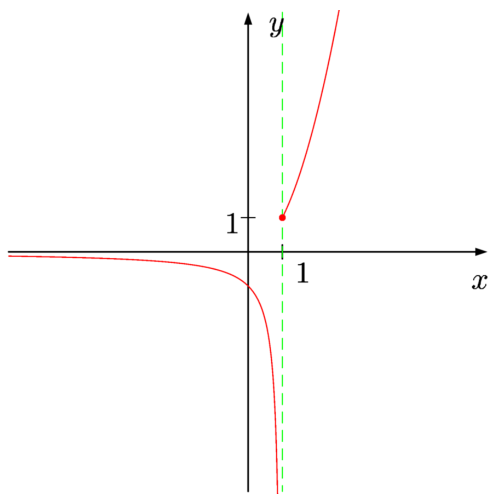
Funkcji jest określona na całym zbiorze $\mathbb{R}$. Zwróćmy uwagę, że funkcja może być nieciągła tylko w punkcie $x_0 = 1$. Wnioskujemy więc, że może istnieć asymptota pionowa.

Wyznaczamy następujące granice:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty.$$

Wykres funkcji ma asymptotę pionową lewostronną o równaniu $x = 1$, ponieważ granica lewostronna funkcji f w punkcie $x_0 = 1$ jest niewłaściwa. Zauważmy ponadto, że analizowana funkcja jest w punkcie $x_0 = 1$ prawostronnie ciągła, gdyż $f(1) = 1 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (wykres przedstawiono na rys. 9).



Rysunek 9. Wykres funkcji z przykładu 5 i jego lewostronna asymptota pionowa o równaniu $x = 1$

2.2. Asymptota ukośna, czyli pochyła

Definicja 4. *Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

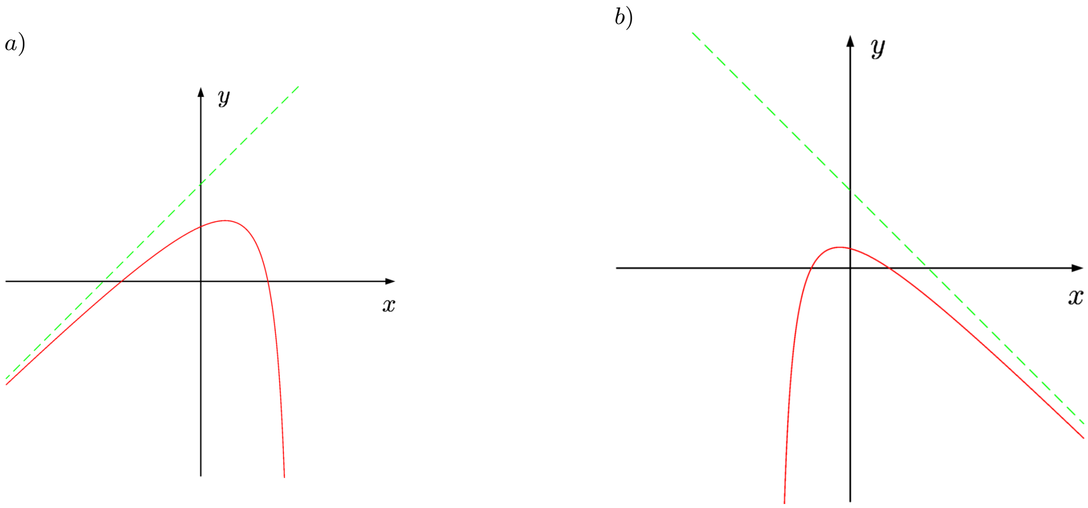
lub

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

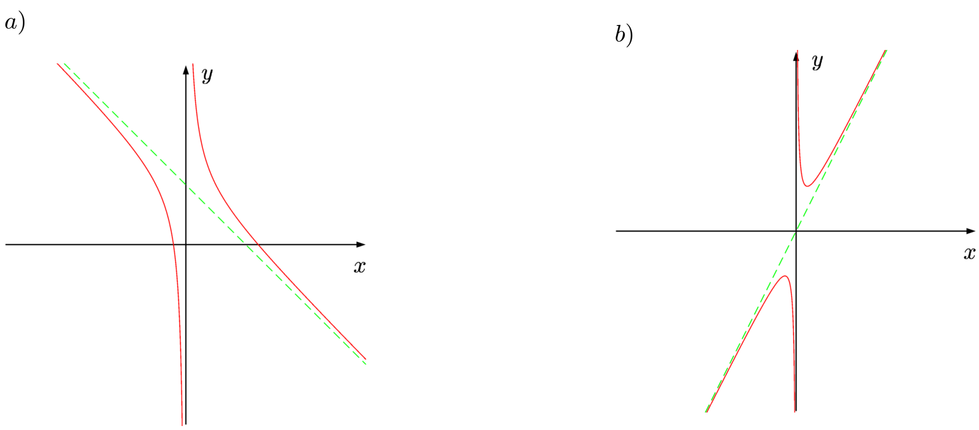
Jeżeli jest spełniony pierwszy z powyższych warunków, to mówimy, że prosta $y = ax+b$ jest asymptotą ukośną w $+\infty$ (lub prawostronną) krzywej $y = f(x)$.

Jeżeli jest spełniony drugi warunek, to prostą $y = ax + b$ nazywamy asymptotą ukośną w $-\infty$ (lub lewostronną) krzywej $y = f(x)$.

Warunki w definicji 4 oznaczają, że odległości punktów krzywej i prostej o tej samej odciętej dążą do zera, gdy x dąży do $+\infty$ lub $-\infty$. Inaczej mówiąc, prosta jest asymptotą ukośną wykresu funkcji w $+\infty$ $(-\infty)$, gdy wykres tej funkcji dla argumentów leżących „blisko” $+\infty$ $(-\infty)$ praktycznie pokrywa się z tą prostą. Omawianą sytuację przedstawiono na rysunkach 10 i 11.



Rysunek 10. Przykłady asymptot ukośnych:
a) asymptota ukośna w $-\infty$ (wykres funkcji — kolor czerwony, asymptota — kolor zielony)
b) asymptota ukośna w $+\infty$ (wykres funkcji — kolor czerwony, asymptota — kolor zielony)



Rysunek 11. Przykłady asymptot ukośnych zarówno w $+\infty$, jak i w $-\infty$ (wykres funkcji — kolor czerwony, asymptota — kolor zielony)

Przykład 6. Rozważmy funkcję liniową $f(x) = 2x + 1$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych ($D_f = \mathbb{R}$). Bezpośrednio z definicji zauważamy, że prosta $y = 2x + 1$ jest asymptotą ukośną wykresu tej funkcji (zarówno w $+\infty$, jaki w $-\infty$), ponieważ:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (ax + b)] = \lim_{x\to\pm\infty}[2x + 1 - (2x + 1)] = \lim_{x\to\pm\infty} 0 = 0.$$

Zatem w przypadku funkcji liniowej jej wykres i asymptota ukośna pokrywają się.

Fakt4

Asymptota ukośna może przecinać wykres funkcji nieskończenie wiele razy.

Znalezienie asymptot ukośnych nie zawsze jest tak łatwe jak w przykładzie 6. Często korzystamy z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Wykres funkcji f ma asymptotę ukośną*

- *w $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

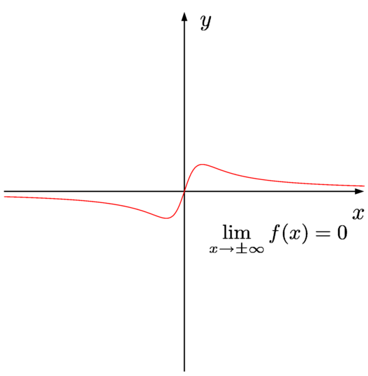
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \qquad i \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b,$$

- *w $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

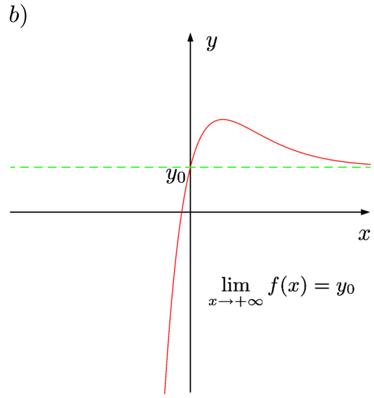
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a \qquad i \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b.$$

Jeżeli współczynnik $a=0$, czyli granica $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, zaś granica $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ jest skończona, to mówimy o szczególnym przypadku asymptoty ukośnej, zwanej asymptotą poziomą o równaniu $y=b$ w $+\infty$. W przypadku gdy współczynnik $a=0$, czyli granica $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ oraz istnieje skończona granica $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$, to mówimy o szczególnym przypadku asymptoty ukośnej, czyli asymptocie poziomej o równaniu $y=b$ w $-\infty$. Na rys. 12 przedstawione zostały asymptoty poziome.

a)



b)



Rysunek 12. Przykłady asymptot poziomych (wykres funkcji — kolor czerwony, asymptota — kolor zielony):
a) asymptota pozioma o równaniu $y=0$ zarówno w $+\infty$, jak i w $-\infty$,
b) asymptota pozioma o równaniu $y=1$ w $+\infty$

Przykład 7. Znajdźmy asymptoty ukośne wykresu funkcji

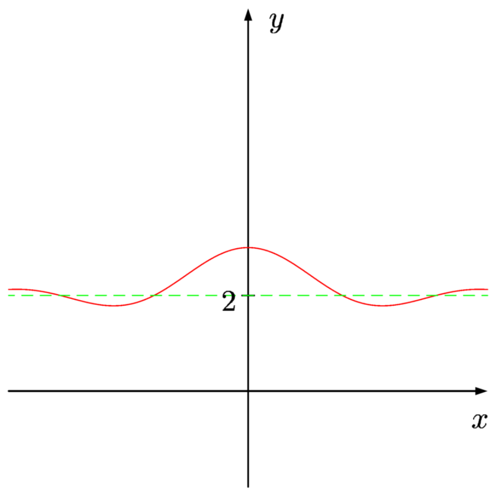
$$f(x)=2+\frac{\sin x}{x}.$$

Dziedziną tej jest zbiór liczb $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Szukamy asymptot ukośnych. W tym celu obliczamy granice:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(2+\frac{\sin x}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{\sin x}{x^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)=0+1\cdot 0=0=a,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2+\frac{\sin x}{x}-0\right)=2=b.$$

Wykres funkcji $y = 2 + \dfrac{\sin x}{x}$ ma asymptotę poziomą o równaniu $y = 2$ zarówno w $+\infty$, jak i w $-\infty$. Wykres przedstawiono na rys. 13.



Rysunek 13. Wykres funkcji $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ i jego asymptota pozioma o równaniu $y = 2$

3. Wybrane funkcje elementarne i ich asymptoty

W rozdziale tym omówimy wykresy wybranych funkcji elementarnych z ich asymptotami. Na początku przypomnimy definicję funkcji elementarnych.

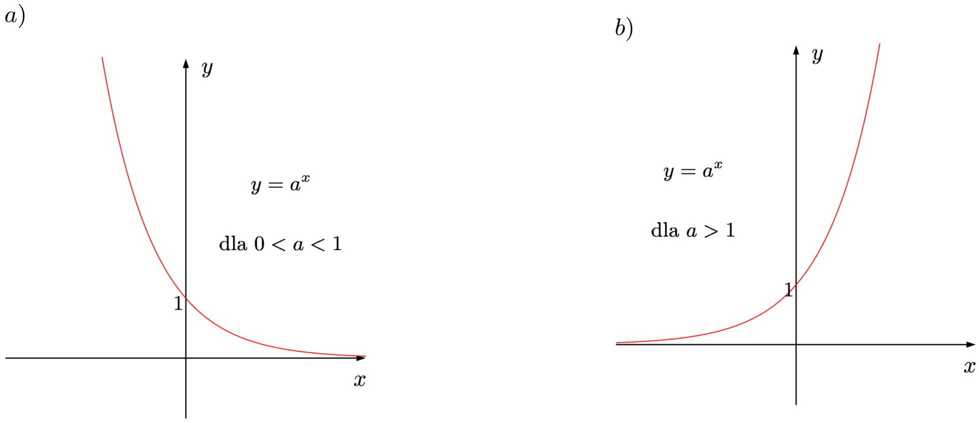
Definicja 5. *Do klasy funkcji elementarnych należą następujące funkcje:*

- *funkcje stałe* $f(x) = c$*,*
- *funkcja tożsamościowa (identyczność)* $f(x) = x$*,*
- *funkcje wykładnicze,*
- *funkcje logarytmiczne,*
- *funkcje trygonometryczne*
- *oraz wszystkie funkcje, które można uzyskać z powyższych poprzez (skończenie wiele razy wykonywane) operacje: dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, odwracania i składania funkcji.*

Funkcje wykładnicze

Wykres funkcji wykładniczej ($f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$) ma:

- asymptotę poziomą prawostronną (w $+\infty$) o równaniu $y = 0$, gdy $0 < a < 1$ (rys. 14a),
- asymptotę poziomą lewostronną (w $-\infty$) o równaniu $y = 0$, gdy $a > 1$ (rys. 14b).

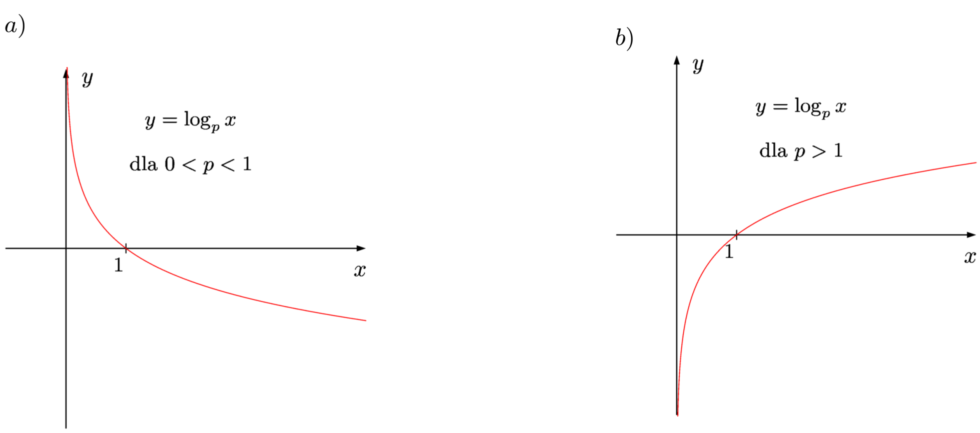


Rysunek 14. Wykres funkcji wykładniczej
a) o równaniu $f(x) = a^x$ dla $0 < a < 1$ posiada asymptotę poziomą o równaniu $y = 0$ w $+\infty$,
b) o równaniu $f(x) = a^x$ dla $a > 1$ posiada asymptotę poziomą o równaniu $y = 0$ w $-\infty$.

Wykresy te nie mają asymptot pionowych, bo wszystkie funkcje wykładnicze są ciągłe i określone na zbiorze $\mathbb{R}$.

Funkcje logarytmiczne

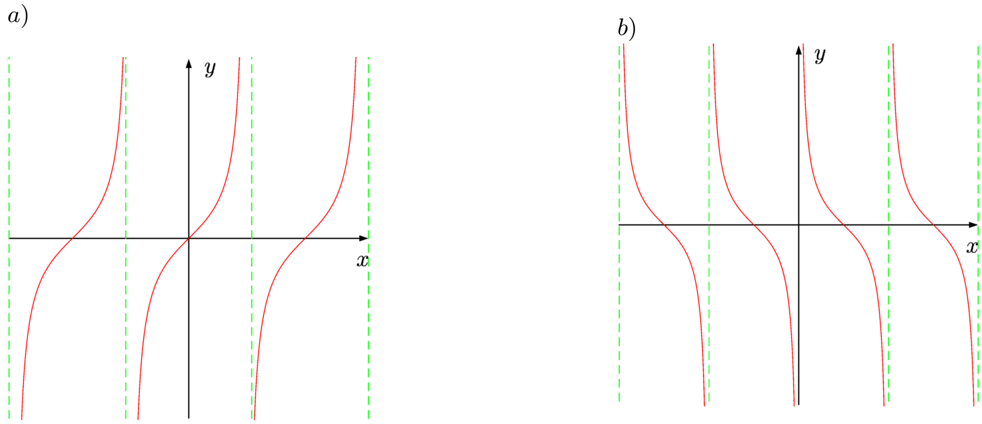
Wykres funkcji logarytmicznej ($f(x) = \log_p x$, gdzie $p > 0$, $p \neq 1$ i $x > 0$) posiada asymptotę pionową prawostronną o równaniu $x = 0$. Wykresy funkcji logarytmicznych w zależności od podstawy przedstawiają rysunki 15a oraz 15b.



Rysunek 15. Wykres funkcji logarytmicznej
a) o równaniu $f(x) = \log_p x$ dla $0 < p < 1$ ma asymptotę pionową prawostronną o równaniu $x = 0$,
b) o równaniu $f(x) = \log_p x$ dla $p > 1$ ma asymptotę pionową prawostronną o równaniu $x = 0$.

Funkcje trygonometryczne

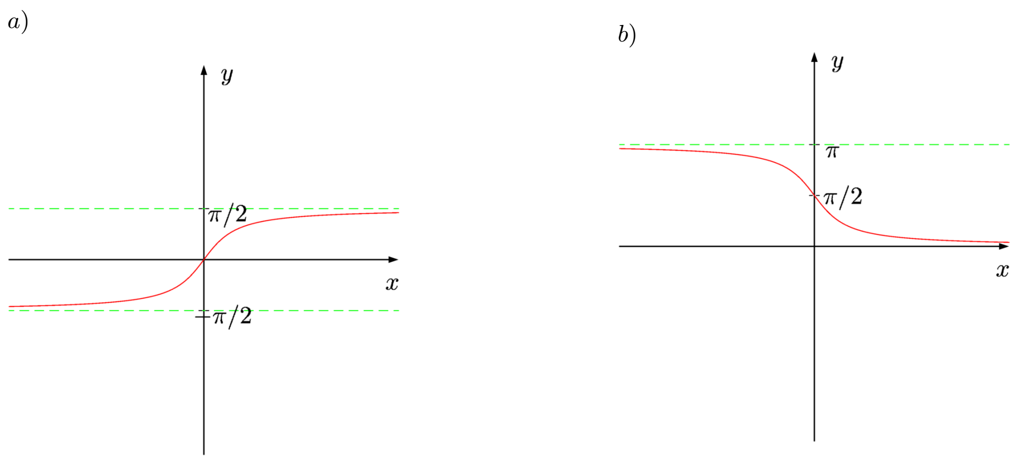
Wykresy funkcji $f(x) = \sin x$ oraz $f(x) = \cos x$ nie mają asymptot. Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ ma nieskończenie wiele asymptot pionowych obustronnych o równaniach $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (rys. 16a). Z kolei wykres funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ma nieskończenie wiele asymptot pionowych obustronnych o równaniach $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (rys. 16b).



Rysunek 16. Wykres funkcji trygonometrycznej
a) $f(x) = \operatorname{tg} x$ posiada asymptoty pionowe o równaniu $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{C}$,
b) $f(x) = \operatorname{ctg} x$ posiada asymptoty pionowe o równaniu $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

Funkcje cyklometryczne

Wykresy funkcji $f(x) = \arcsin x$ oraz $f(x) = \arccos x$ nie mają asymptot. Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ ma dwie asymptoty poziome: prawostronną (tzn. w $+\infty$) o równaniu $y = \frac{\pi}{2}$ oraz lewostronną (tzn. w $-\infty$) o równaniu $y = -\frac{\pi}{2}$ (rys. 17a). Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{arc\ ctg} x$ ma również dwie asymptoty poziome: prawostronną o równaniu $y = 0$ oraz lewostronną o równaniu $y = \pi$ (rys. 17b).



Rysunek 17. Wykresy funkcji cyklometrycznych
a) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ ma asymptoty poziome o równaniach $y = \frac{\pi}{2}$ oraz $y = -\frac{\pi}{2}$,
b) $f(x) = \operatorname{arc\ ctg} x$ ma asymptoty poziome o równaniach $y = 0$ i $y = \pi$.

4. Przykłady

W jaki sposób wyznaczamy asymptoty? Można zastosować poniższy algorytm.

Krok 1. Wyznaczamy dziedzinę funkcji.

Krok 2. Poszukujemy asymptot pionowych (zwracamy szczególną uwagę na dziedzinę i ciągłość rozpatrywanej funkcji).

Krok 3. Wyznaczamy asymptoty ukośne, nie poszukujemy osobno asymptot poziomych. Asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej. Jeśli współczynnik $a = 0$ i b jest stałą, otrzymamy asymptotę poziomą $y = b$.

Uwaga 2. W przypadku niektórych funkcji widzimy, że ich granica w $+\infty$ $(-\infty)$ jest granicą właściwą. Wówczas wnioskujemy, że krzywa ma asymptotę poziomą w $+\infty$ $(-\infty)$ i nie ma konieczności liczenia współczynnika a, który i tak będzie równy 0.

Uwaga 3. Jeżeli dziedzina funkcji jest ograniczona z góry, to wykres tej funkcji na pewno nie ma asymptoty ukośnej/poziomej prawostronnej. Jeżeli dziedzina funkcji jest ograniczona z dołu, to wykres tej funkcji na pewno nie ma asymptoty ukośnej/poziomej lewostronnej.

Przykład 8. Wyznaczmy asymptoty krzywej $y = \dfrac{x^2-4}{x^3+1}$.

Rozpoczynamy od dziedziny[1] naszej funkcji $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+1}$. Mamy tutaj następujące założenie:

$$\begin{aligned}&x^3+1 \neq 0,\\&x^3 \neq -1,\\&x \neq -1.\end{aligned}$$

Zatem $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Zwróćmy uwagę, że jest to ułamek nieskracalny. Z faktu 3 wnioskujemy, że krzywa $y = f(x)$ ma tylko jedną asymptotę pionową, tzn. prostą o równaniu $x = -1$. Rzeczywiście granice jednostronne funkcji f w punkcie -1 są niewłaściwe:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-4}{x^3+1} = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-4}{x^3+1} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = +\infty.$$

Wykres funkcji ma asymptotę pionową o równaniu $x = -1$. Jest to jedyna asymptota pionowa wykresu analizowanej funkcji, ponieważ w przypadku wykresu funkcji wymiernej asymptoty pionowe występują tylko w miejscach zerowych mianownika (zob. fakt 3).

[1] Warto zajrzeć np. do [5].

Szukamy następnie asymptot ukośnych. W tym celu obliczamy następujące granice:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-4}{x^3+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x^4+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^4}^{2}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0,\qquad \text{więc}\qquad a_1=0$$

oraz

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^3}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0,\qquad \text{więc}\qquad b_1=0.$$

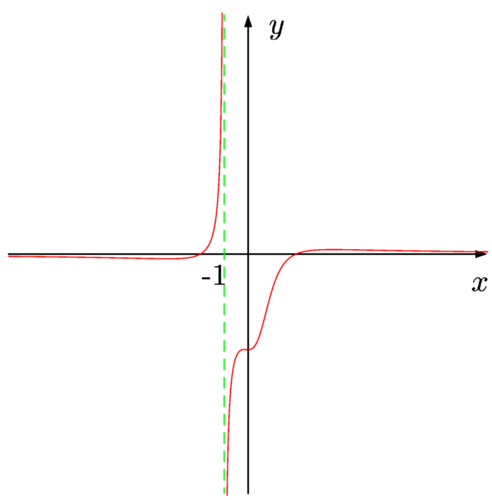
Obliczmy jeszcze granice dla $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2-4}{x^3+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{x^4+x}=0,\qquad \text{więc}\quad a_2=0$$

oraz

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{x^3+1}=0,\qquad \text{więc}\quad b_2=0.$$

Stwierdzamy, że wykres funkcji posiada asymptotę poziomą o równaniu $y=0$ zarówno w $+\infty$, jak i w $-\infty$. Wykres funkcji możemy zobaczyć na rys. 18.



Rysunek 18. Wykres funkcji $y=\dfrac{x^2-4}{x^3+1}$ i jego asymptota pionowa o równaniu $x=-1$ oraz pozioma obustronna o równaniu $y=0$

Wniosek 1. *Wykresy funkcji wymiernych właściwych mają asymptoty pionowe w miejscach zerowych mianownika oraz asymptotę poziomą obustronną $y=0$.*

Przykład 9. Wyznaczmy asymptoty krzywej $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.

Zajmiemy się najpierw dziedziną naszej funkcji $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$. Przyjmujemy następujące założenie:

$$x - 2 \neq 0,$$
$$x \neq 2.$$

Otrzymujemy więc, że $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Zwróćmy uwagę, że jest to funkcja wymierna. Z faktu 3 wnioskujemy, że krzywa $y = f(x)$ ma tylko jedną asymptotę pionową, tzn. prosta o równaniu $x = 2$. Obliczamy następujące granice:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{x-2} = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1}{x-2} = \left[\frac{5}{0^-}\right] = -\infty.$$

Obie granice są niewłaściwe, więc wykres funkcji posiada asymptotę pionową obustronną o równaniu $x = 2$. Jest to jedyna asymptota pionowa rozpatrywanej krzywej (zob. fakt 3).

Przechodzimy do wyznaczenia asymptot ukośnych. W tym celu obliczamy następujące granice:

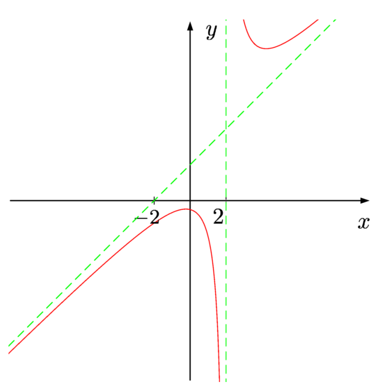
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} = 1, \qquad \text{więc} \quad a = 1$$

oraz

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} = 2, \qquad \text{więc} \quad b = 2.$$

Wnioskujemy, że wykres analizowanej funkcji posiada asymptotę ukośną o równaniu $y = x + 2$ zarówno w $+\infty$, jak i w $-\infty$. Wykres funkcji możemy zobaczyć na rys. 19.



Rysunek 19. Wykres funkcji $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$ i jego asymptota pionowa obustronna o równaniu $x = 2$ oraz ukośna o równaniu $y = x + 2$

Przykład 10. Znajdziemy asymptoty krzywej $y = \dfrac{x}{\ln x}$.
Wyznaczmy dziedzinę badanej funkcji $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$. Przyjmujemy następujące założenia:

$$\begin{array}{lll} (1) & x > 0, & \\ (2) & \ln x \neq 0, & x \neq 1. \end{array}$$

Otrzymujemy więc, że $D_f = (0,1) \cup (1, +\infty)$.
Z uwagi na dziedzinę stwierdzamy, że może istnieć asymptota pionowa prawostronna $x = 0$ oraz pionowa $x = 1$, ponieważ jedynymi punktami nieciągłości są 0 i 1.

Obliczamy następujące granice:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \frac{1}{\ln x} = 0 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty.$$

Z obliczeń wynika, że wykres funkcji nie ma asymptoty pionowej lewostronnej o równaniu $x = 0$, ponieważ granica przy $x \to 0^+$ istnieje i jest skończona (równa 0). Wykres analizowanej funkcji posiada asymptotę pionową obustronną o równaniu $x = 1$.

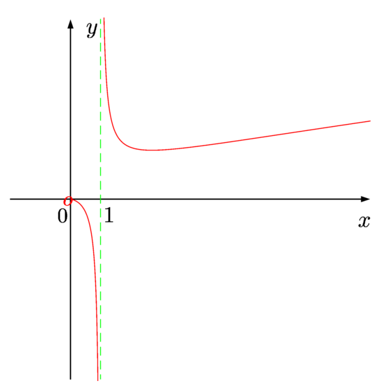
Przechodzimy do wyznaczenia asymptot ukośnych. W tym celu obliczamy następujące granice:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0, \qquad \text{więc} \quad a = 0$$

$$\text{oraz} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Obliczając powyższą granicę skorzystaliśmy z reguły de l'Hospitala[2], co oznaczyliśmy literką H. Możemy stwierdzić brak asymptoty ukośnej. Wykres funkcji przedstawia rys. 20.

Uwaga 4. Zwróćmy uwagę, że jeżeli $a = 0$, to nie możemy natychmiast stwierdzić, że krzywa ma asymptotę poziomą, ponieważ musi istnieć jeszcze b.



Rysunek 20. Wykres funkcji $y = \dfrac{x}{\ln x}$ i jego asymptota pionowa o równaniu $x = 1$.

[2] Reguła de l'Hospitala omówiona została w literaturze, np. w pozycji [3] na s. 132–136

Przykład 11. Wyznaczymy asymptoty krzywej $y = xe^{\frac{1}{x}}$.
Dziedziną badanej funkcji $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Z uwagi na dziedzinę stwierdzamy, że może istnieć tylko jedna asymptota pionowa $x = 0$.
Wyliczamy następujące granice:

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(\cancel{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\cancel{\frac{1}{x}}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = [0\cdot 0] = 0,$$

$$\text{ponieważ} \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^{+\infty}\right] = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^{-\infty}\right] = 0.$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że prosta o równaniu $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną wykresu rozpatrywanej funkcji.
Przechodzimy następnie do wyznaczenia asymptot ukośnych. W tym celu obliczamy kolejne granice:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^0\right] = 1, \qquad \text{więc} \quad a_1 = 1$$

oraz

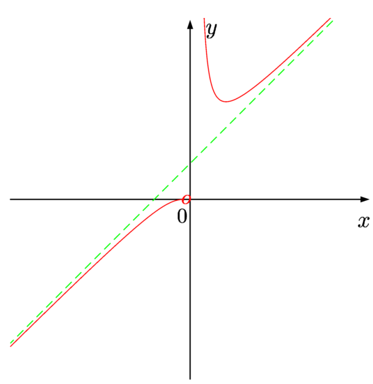
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - a_1x] = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = [\infty\cdot 0] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{[\frac{0}{0}]}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(\cancel{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\cancel{\frac{1}{x}}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^0\right] = 1, \qquad \text{więc} \quad b_1 = 1.$$

Asymptota ukośna prawostronna analizowanej krzywej ma równanie $y = x + 1$. Czy istnieje asymptota ukośna lewostronna? Obliczmy granice:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^0\right] = 1, \qquad \text{więc} \quad a_2 = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - a_2x] = \lim_{x\to-\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = [-\infty + \infty] = \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = [-\infty\cdot 0] =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{[\frac{0}{0}]}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(\cancel{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\cancel{\frac{1}{x}}\right)'} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^0\right] = 1, \qquad \text{więc} \quad b_2 = 1.$$

Stwierdzamy istnienie asymptoty ukośnej lewostronnej o równaniu $y = x+1$. Ostatecznie prosta $y = x+1$ jest asymptotą ukośną obustronną. Na rysunku 21 przedstawiono wykres badanej funkcji.



Rysunek 21. Wykres funkcji $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ i jego asymptota pionowa prawostronna o równaniu $x = 0$ oraz asymptota ukośna o równaniu $y = x + 1$.

Przykład 12. Wyznaczymy asymptoty krzywej $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Określmy dziedzinę funkcji $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$. Mamy tutaj następujące założenia:

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \sqrt{1-4x^2} \neq 0, \\ &(2) \qquad 1-4x^2 \geq 0, \end{aligned}$$

więc

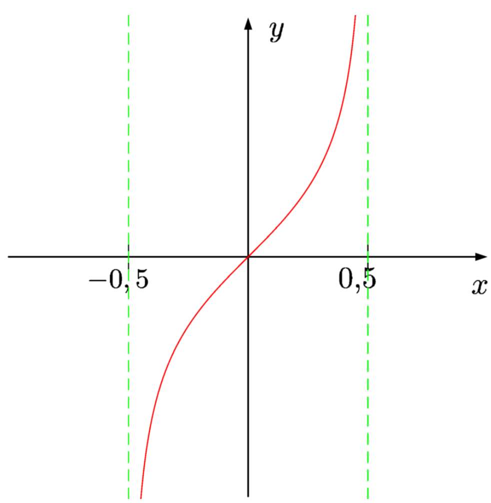
$$1-4x^2 > 0,$$
$$(1-2x)\cdot(1+2x) > 0,$$
$$x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Dziedziną badanej funkcji jest zbiór $D_f = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Z uwagi na dziedzinę stwierdzamy, że mogą istnieć dwie asymptoty pionowe: prawostronna o równaniu $x = -\frac{1}{2}$ oraz lewostronna o równaniu $x = \frac{1}{2}$.
Obliczamy następujące granice:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} = \left[\frac{-\frac{1}{2}}{0^+}\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} = \left[\frac{\frac{1}{2}}{0^+}\right] = +\infty.$$

Wynika stąd, że istnieją asymptoty pionowe: prawostronna o równaniu $x = -\frac{1}{2}$ oraz lewostronna o równaniu $x = \frac{1}{2}$ (rys. 22). Nie wyznaczamy asymptot ukośnych wykresu tej funkcji, ponieważ granice funkcji przy $x \to +\infty$ oraz $x \to -\infty$ nie mają sensu (dziedzina funkcji jest zbiorem ograniczonym).



Rysunek 22. Wykres funkcji $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$ i jego asymptota pionowa prawostronna o równaniu $x = -\frac{1}{2}$ oraz asymptota pionowa lewostronna $x = \frac{1}{2}$

Przykład 13. Wyznaczymy asymptoty krzywej $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+4x^2}}$.

Dziedziną funkcji $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+4x^2}}$ jest zbiór $D_f = \mathbb{R}$ i jest to funkcja ciągła, więc jej wykres nie ma asymptot pionowych.

Sprawdźmy, czy istnieją asymptoty ukośne. Obliczamy najpierw granicę

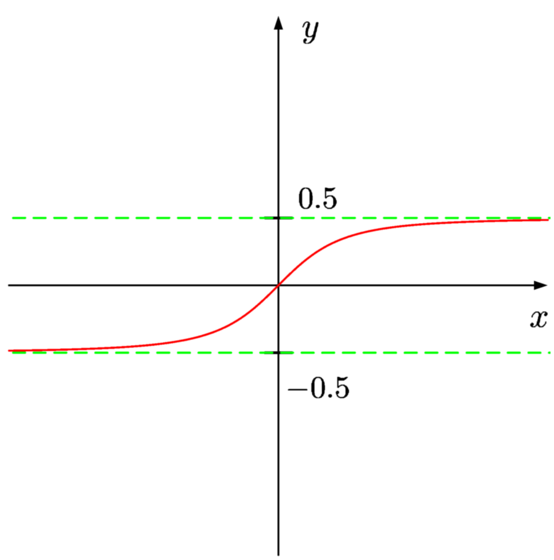
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0, \quad \text{więc} \quad a_1 = a_2 = 0.$$

Wnioskujemy, że mogą istnieć tylko asymptoty poziome. Obliczamy teraz dwie (podobne) granice:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}} = \frac{1}{2} = b_1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}} = -\frac{1}{2} = b_2.$$

Obie granice są skończone, czyli krzywa ma asymptotę poziomą prawostronną o równaniu $y = \frac{1}{2}$ oraz lewostronną o równaniu $y = -\frac{1}{2}$ (rys. 23). Jeśli zauważylibyśmy wcześniej, że funkcja f jest nieparzysta, to nie musielibyśmy liczyć współczynnika b_2 (skoro wykres funkcji jest symetryczny względem punktu $(0,0)$, to również asymptoty są symetryczne względem tego punktu).



Rysunek 23. Wykres funkcji $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+4x^2}}$ i jego asymptoty poziome: $y = -\frac{1}{2}$ (lewostronna) i $y = \frac{1}{2}$ (prawostronna)

Przykład 14. Wyznaczymy asymptoty krzywej $y = \dfrac{3}{\pi - \text{arccos}x}$.

Określmy dziedzinę funkcji $f(x) = \dfrac{3x}{\pi - \text{arccos}x}$. Musimy tutaj założyć, że:

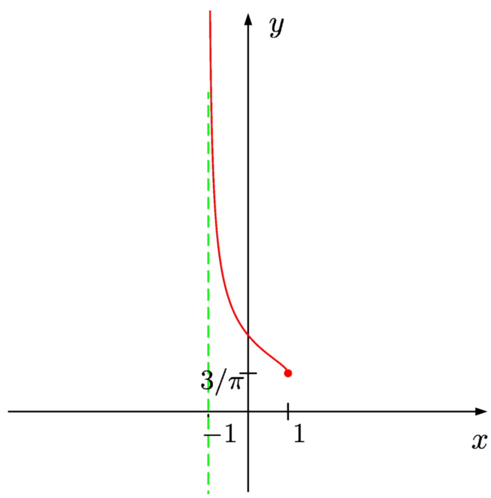
$$(1) \qquad x \in [-1, 1],$$

$$(2) \qquad \pi - \text{arccos}x \neq 0,$$
$$\pi \neq \text{arccos}x,$$
$$x \neq -1.$$

Zatem dziedziną badanej funkcji jest zbiór $(-1, 1]$. Biorąc pod uwagę założenia stwierdzamy, że może istnieć asymptota pionowa prawostronna o równaniu $x = -1$.
Obliczamy granicę:

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{3}{\pi - \text{arccos}x} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty,$$

Wnioskujemy, że prosta o równaniu $x = -1$ jest asymptotą pionową prawostronną rozpatrywanej krzywej. Nie istnieją asymptoty ukośne tej funkcji, ponieważ funkcja jest określona tylko na przedziale $(-1, 1]$. Na rysunku 24 przedstawiono wykres badanej funkcji.



Rysunek 24. Wykres funkcji $f(x) = \dfrac{3}{\pi - \text{arccos}x}$ i jego asymptota pionowa prawostronna o równaniu $x = -1$

5. Uwagi końcowe

Podsumujmy najważniejsze fakty.

- Z asymptotą pionową mamy do czynienia w punktach nieciągłości II rodzaju. Tylko w tych punktach mogą (ale nie muszą) istnieć asymptoty pionowe.

- Jeżeli funkcja jest ciągła w $\mathbb{R}$, to jej wykres nie ma asymptoty pionowej.

- Wykres dowolnej funkcji może mieć co najwyżej jedną asymptotę ukośną w $+\infty$ i co najwyżej jedną ukośną w $-\infty$.

- W przypadku gdy istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$), wykres funkcji ma asymptotę poziomą w $+\infty$ ($-\infty$) i jest to jedyna asymptota ukośna wykresu danej funkcji (nie ma potrzeby liczenia współczynnika a).

- Krzywa może przecinać swoją asymptotę ukośną nieskończenie wiele razy, np. przechodząc z jednej jej strony na drugą (rys. 13).

- Wykres funkcji może mieć co najwyżej jeden punkt wspólny ze swoją asymptotą pionową (rys. 9).

- Krzywa $y = f(x)$ może mieć asymptotę ukośną prawostronną tylko wtedy, gdy dziedzina funkcji jest nieograniczona z góry; analogicznie krzywa może mieć asymptotę ukośną lewostronną tylko wtedy, gdy dziedzina funkcji jest nieograniczona z dołu.

- Nadmieńmy jeszcze, że jeżeli funkcja jest parzysta lub nieparzysta i jej wykres ma asymptotę pionową $x = x_0$, to również ma asymptotę pionową $x = -x_0$ (rys. 16, 22). Jeżeli wykres funkcji parzystej ma asymptotę ukośną o równaniu $y = ax+b$, to ma również asymptotę ukośną o równaniu $y = -ax+b$ (rys. 13). Jeżeli wykres funkcji nieparzystej ma asymptotę ukośną o równaniu $y = ax+b$, to ma również asymptotę ukośną o równaniu $y = ax - b$.

6. Przykłady do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Wyznacz asymptoty pionowe podanych krzywych:

a) $y = \dfrac{x^2}{4-x^2}$, **b)** $y = e^{\frac{2}{2-x^2}} + 2$, **c)** $y = \dfrac{\ln(2+x)}{3x}$, **d)** $y = \dfrac{5x^2}{1-|x|}$.

Zadanie 2. Wyznacz asymptoty ukośne (pochyłe) wykresów podanych funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, **b)** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-8}$, **c)** $f(x) = xe^{2x}$, **d)** $f(x) = \dfrac{x^2+\ln x}{3x}$.

Zadanie 3. Wyznacz asymptoty podanych krzywych:

a) $y = \sqrt{\dfrac{x^2}{x+1}}$, **b)** $y = \dfrac{1-x^3}{|x-1|}$, **c)** $y = 2x + \dfrac{\sin x}{x}$, **d)** $y = 3x \operatorname{arc\,tg} x$.

Odpowiedź 1. Asymptoty pionowe:

a) $x = 2, \qquad x = -2,$

b) prawostronna $x = -\sqrt{2}$, lewostronna $x = \sqrt{2}$,

c) prawostronna $x = -2$, pionowa $x = 0$,

d) $x = 1, \qquad x = -1.$

Odpowiedź 2. Asymptoty ukośne:

a) pozioma $y = 1$ dla $x \to \pm\infty$,

b) pozioma $y = 0$ dla $x \to \pm\infty$,

c) pozioma $y = 0$ dla $x \to -\infty$,

d) ukośna $y = \frac{1}{3}x$, dla $x \to \infty$.

Odpowiedź 3. Asymptoty:

a) pionowa prawostronna $x = -1$,

b) brak asymptot,

c) ukośna $y = 2x$,

d) ukośne $y = -\dfrac{3\pi}{2}x - 3$ dla $x \to -\infty$ oraz $y = \dfrac{3\pi}{2}x - 3$ dla $x \to \infty$.

Literatura

1. M. Biedrońska, *Zbiór zadań z odpowiedziami i rozwiązaniami*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
2. M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2001.
3. R. Grzymkowski, *Matematyka dla studentów wyższych uczelni technicznych*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2009.
4. J. Macura, *Obliczanie granic funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej*, MINUT 2020 (2), s. 112–123, https://minut.polsl.pl/articles/C-20-001.pdf
5. A. Samulewicz, *Dziedzina funkcji jednej zmiennej*, MINUT 2021 (3), s. 31 – 41, https://minut.polsl.pl/articles/C-21-001.pdf