

Elwira MATEJA-LOSA

Katedra Metod Matematycznych w Technice i Informatyce, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23,
44-100 Gliwice

Podstawowe własności funkcji — zadania testowe

Streszczenie. Artykuł zawiera zestaw zadań testowych sprawdzających wiedzę dotyczącą własności funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, a także umiejętności ich rozpoznania i stosowania w typowych sytuacjach matematycznych. Zakres tematyczny obejmuje m.in. dziedzinę i zbiór wartości funkcji, miejsca zerowe, różnowartościowość, parzystość i nieparzystość, monotoniczność, ograniczoność, funkcję odwrotną oraz złożenie funkcji. Artykuł przeznaczony jest zarówno dla nauczycieli akademickich, jak również dla studentów jako pomoc w przygotowaniu do egzaminów, a także dla każdego zainteresowanego tą tematyką. Prezentowane zadania mają różny stopień trudności, co pozwala dostosować je do różnych poziomów kształcenia.

Słowa kluczowe: funkcja jednej zmiennej rzeczywistej, funkcja elementarna, funkcja cyklometryczna, funkcja różnowartościowa, funkcja parzysta, funkcja nieparzysta, funkcja ograniczona z góry, funkcja ograniczona z dołu, funkcja ograniczona, funkcja monotoniczna, funkcja odwrotna, funkcja złożona, miejsca zerowe funkcji.

Wstęp

Zadania testowe zostały podzielone na grupy. W pierwszej sekcji zamieszczono zadania dotyczące definicji, dziedziny (D_f), zbioru wartości (W_f), miejsc zerowych oraz różnowartościowości funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. W drugim rozdziale znalazły się zadania dotyczące takich własności funkcji, jak parzystość i nieparzystość. W następnej części umieszczono zadania dotyczące monotoniczności funkcji, a w kolejnej — zadania dotyczące funkcji odwrotnej. W części szóstej są zadania obejmujące takie pojęcia, jak funkcja ograniczona, ograniczona z góry i ograniczona z dołu. W kolejnej części zajęto się zadaniami dotyczącymi złożenia funkcji. Rozdział siódmy zawiera zadania obejmujące wszystkie wcześniej występujące pojęcia – można powiedzieć, że jest to rozdział podsumowujący lub kontrolny.

Zakres tematyczny, jak i kolejność tematyczna zadań są umowne. Powyższy podział nie jest ścisły, służy raczej logicznemu uporządkowaniu treści.

Istotny jest fakt, że wymagana jest nie tylko znajomość odpowiednich definicji i własności funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, ale również trzeba m.in. znać funkcje elementarne oraz ich wykresy, a także funkcje cyklometryczne [2]. Zadania mają różny stopień trudności.

Zarówno z moich obserwacji, jak i z doświadczeń innych nauczycieli akademickich wynika, że obecnie istnieje wyraźna potrzeba stosowania przekrojowych zadań testowych wielokrotnego wyboru [1, 3, 4].

W artykule znajdują się wyłącznie zadania testowe wielokrotnego wyboru. Uwaga: w zadaniach może być więcej niż jedna poprawna odpowiedź – należy wskazać wszystkie poprawne odpowiedzi. Symbol * wskazuje zadania o podwyższonym stopniu trudności. Niektóre odpowiedzi są bezsensowne, ale jest to zabieg celowy.

1. Definicja, dziedzina (D_f), zbiór wartości (W_f), miejsca zerowe oraz różnowartościowość funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

1. Który z poniższych warunków jest konieczny, aby przyporządkowanie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ było funkcją?

- a) Każdemu argumentowi x przyporządkowuje co najmniej dwie różne wartości
- b) Każdemu argumentowi x przyporządkowuje co najwyżej jedną wartość
- c) Każdemu argumentowi x przyporządkowuje dokładnie jedną wartość
- d) Każda wartość y ma dokładnie jeden przeciwobraz

2. Które z poniższych przyporządkowań jest funkcją?

- a) Każdemu studentowi przyporządkowujemy jego numer albumu
- b) Każdemu numerowi albumu przyporządkowujemy studenta
- c) Każdemu człowiekowi przyporządkowujemy jego adres zamieszkania
- d) Każdemu uczniowi przyporządkowujemy jego oceny z matematyki
- e) Każdemu człowiekowi przyporządkowujemy ulubione przez niego potrawy

3. Który z poniższych wzorów nie określa funkcji postaci $y = g(x)$?

- a) $y - 2x^3 = 5$
- b) $x - y^2 = 0$
- c) $x^2 - y = 0$
- d) $y = |x - 1|$
- e) $y = \cos^2 x$
- f) $x^2 + y^2 = 3$

4. Który z poniższych wzorów określa funkcję postaci $x = h(y)$?

- a) $y - 2x^3 = 5$
- b) $x - y^2 = 0$
- c) $x^2 - y = 0$
- d) $y = |x - 1|$
- e) $y = \cos^2 x$

f) $x^2 + y^2 = 3$

5. Które z przyporządkowań jest funkcją określoną na zbiorze liczb rzeczywistych?

- a) Każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowujemy jej część całkowitą $[x]$
- b) Każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowujemy $1/(x - \pi)$
- c) Każdej liczbie naturalnej przypisujemy jej dzielniki
- d) Każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowujemy $x^3 - 3$

6. Dziedziną naturalną funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x - 3}$ jest:

- a) $D_f = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$
- b) $D_f = (-\infty, 2] \cup (3, \infty)$
- c) $D_f = (-\infty, 2) \cup [3, \infty)$
- d) $D_f = [2, 3]$
- e) $D_f = \mathbb{R}$

7. *Dziedziną naturalną funkcji $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 4x + 3)}{\sqrt{x + 2}}$ jest:

- a) $D_f = (-2, 1) \cup (3, \infty)$
- b) $D_f = (-2, 1] \cup (3, \infty)$
- c) $D_f = (-2, 1] \cup [3, \infty)$
- d) $D_f = [-2, 1] \cup [3, \infty)$
- e) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

8. *Dziedziną naturalną funkcji $f(x) = \arcsin(x - 2) + \sqrt{x + 1}$ jest:

- a) $D_f = (1, 3)$
- b) $D_f = [1, 3]$
- c) $D_f = (-1, 1]$
- d) $D_f = [1, \infty)$

9. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & \text{dla } x \leq -2 \\ \frac{1}{x + 2} & \text{dla } x > -2 \end{cases}$.

Która z podanych wartości jest równa $f(-2)$?

- a) -5
- b) 15
- c) 1
- d) -15

10. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & \text{dla } x \leq -2 \\ \frac{1}{x+2} & \text{dla } x > -2 \end{cases}$.

Która z podanych wartości jest równa $f(0)$?

- a) 1
- b) -1
- c) $\frac{1}{2}$
- d) 0

11. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & \text{dla } x \leq -2 \\ \frac{1}{x+2} & \text{dla } x > -2 \end{cases}$.

Która z podanych wartości jest równa $f(-3)$?

- a) -1
- b) 28
- c) 0
- d) $-\frac{1}{5}$

12. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem: $f(x) = x^2 + 1$.

Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

- a) Funkcja f przyjmuje wartość 0 dla argumentu -1
- b) Funkcja f przyjmuje wartość 1 dla argumentu 0
- c) Funkcja f przyjmuje wartość 2 tylko dla argumentu 1
- d) Funkcja f nie przyjmuje wartości ujemnych

13. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = e^x + e^{-x}$ jest:

- a) $W_f = [2, \infty)$
- b) $W_f = (0, \infty)$
- c) $W_f = (1, \infty)$
- d) $W_f = (2, \infty)$
- e) $W_f = \mathbb{R}$

14. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = 1 - \sin^2 x$ jest:

- a) $W_f = [-1, 1]$
- b) $W_f = (0, 1)$
- c) $W_f = [-1, 0]$
- d) $W_f = [0, 1]$

15. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \log_3(x^2 + 1)$ jest:

- a) $W_f = [0, \infty)$
- b) $W_f = (0, \infty)$
- c) $W_f = [1, \infty)$
- d) $W_f = \mathbb{R}$

16. Jeżeli $a = \arcsin b$, to:

- a) $a \in \mathbb{R}$ oraz $b \in [-1, 1]$
- b) $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ oraz $b \in [-1, 1]$
- c) $a \in [0, \pi]$ oraz $b \in [-1, 1]$
- d) $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ oraz $b \in \mathbb{R}$

17. Funkcja $f(x) = \arccos(x - 1)$ jest określona:

- a) na przedziale $[-1, 1]$
- b) na przedziale $[0, 2]$
- c) na przedziale $[-2, 0]$
- d) na $\mathbb{R}$

18. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

- a) $\arcsin(\sin x) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$
- b) $\arccos(\cos x) = x$ dla każdego $x \in [0, \pi]$
- c) $\sin(\arcsin x) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$
- d) $\cos(\arccos x) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$
- e) żadne z powyższych

19. Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = x^3 - 5x$ są:

- a) 0
- b) 0, $\sqrt{5}$ oraz $-\sqrt{5}$
- c) 0 oraz 5
- d) $\sqrt{5}$ oraz $-\sqrt{5}$

20. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

- a) Funkcja nie ma miejsc zerowych
- b) Funkcja ma jedno miejsce zerowe 3
- c) Miejscami zerowymi funkcji są liczby: -3 oraz 3
- d) Funkcja ma miejsce zerowe -3

21. Dana jest funkcja $f(x) = \ln^2(x^2 - 1)$. Miejscami zerowymi tej funkcji są:
- a) 1 oraz -1
 - b) $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$
 - c) 0
 - d) e oraz $-e$
22. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różnowartościowa (jest iniekcją) wtedy i tylko wtedy, gdy:
- a) dla każdych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takich, że $x_1 \neq x_2$, zachodzi $f(x_1) = f(x_2)$
 - b) dla każdych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takich, że $x_1 \neq x_2$, zachodzi $f(x_1) \neq f(x_2)$
 - c) istnieją $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $x_1 \neq x_2$ oraz $f(x_1) = f(x_2)$
 - d) funkcja przyjmuje wszystkie wartości ze zbioru $\mathbb{R}$
23. Która z podanych funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różnowartościowa (jest iniekcją)?
- a) $f(x) = x^2 + 3x - 2$
 - b) $f(x) = |2x + 5|$
 - c) $f(x) = 2 \sin 3x$
 - d) $f(x) = e^{2x} + 1$
 - e) żadna z powyższych
24. Która z podanych funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **nie jest** różnowartościowa (nie jest iniekcją)?
- a) $f(x) = \log_3(x^2 + 1) + 2$
 - b) $f(x) = |3 - x^2|$
 - c) $f(x) = 2^x - 1$
 - d) żadna z powyższych
25. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem: $f(x) = x^3 - 3x$. Niech $A = (-\infty, -1]$, $B = [-1, 1]$, $C = [1, \infty)$. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?
- a) f jest różnowartościowa na całym zbiorze $\mathbb{R}$
 - b) f jest różnowartościowa na każdym z przedziałów A , B , C oddzielnie
 - c) f jest różnowartościowa na A i na C , ale nie na B
 - d) f jest różnowartościowa tylko na B

2. Parzystość i nieparzystość funkcji

1. Funkcja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy:

- a) $\forall x \in \mathbb{X} : -x \in \mathbb{X} \wedge f(-x) = -f(x)$
- b) $\exists x \in \mathbb{X} : -x \in \mathbb{X} \wedge f(-x) = -f(x)$
- c) $\forall x \in \mathbb{X} : -x \in \mathbb{X} \wedge f(-x) = f(x)$
- d) $\exists x \in \mathbb{X} : -x \in \mathbb{X} \wedge f(-x) = f(x)$

2. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy:

- a) dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(-x) = -f(x)$
- b) dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(-x) = f(x)$
- c) istnieje $x \in \mathbb{R}$ taki, że $f(-x) = f(x)$
- d) dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x) = 0$

3. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

- a) Każda funkcja jest albo parzysta, albo nieparzysta
- b) Jeśli funkcja f jest nieparzysta, to $f(0) = 0$
- c) Jeśli funkcja f jest parzysta, to $f(0) = 0$
- d) Funkcja parzysta musi być rosnąca

4. Niech f i g będą funkcjami nieparzystymi określonymi na $\mathbb{R}$. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

- a) Iloczyn $f \cdot g$ jest funkcją nieparzystą
- b) Suma $f + g$ jest funkcją parzystą
- c) Iloczyn $f \cdot g$ jest funkcją parzystą
- d) Złożenie $f \circ g$ jest funkcją parzystą

5. Dana jest funkcja $f(x) = x^4 - 5x^2 + 2$. Funkcja f :

- a) nie jest parzysta i nie jest nieparzysta
- b) jest parzysta
- c) jest nieparzysta
- d) jest zarówno parzysta, jak i nieparzysta

6. Dana jest funkcja $f(x) = 2 \arcsin x + 2 \arccos x$. Funkcja f

- a) jest parzysta
- b) jest nieparzysta
- c) nie jest ani parzysta, ani nieparzysta
- d) jest stała

3. Monotoniczność funkcji

1. Funkcja $f(x) = 4x^3 + 2$ jest:
 - a) rosnąca w całej dziedzinie
 - b) malejąca w całej dziedzinie
 - c) funkcją stałą
 - d) nierosnąca
2. Funkcja $f(x) = \frac{1}{2x+4}$ w przedziale $(0, \infty)$ jest:
 - a) rosnąca
 - b) malejąca
 - c) stała
 - d) niemalejąca
3. Która z funkcji jest malejąca w całej swojej dziedzinie?
 - a) $f(x) = 3^x$
 - b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
 - c) $f(x) = |5 - x|$
 - d) $f(x) = \arctg x + \frac{\pi}{2}$
4. Dany jest wielomian $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?
 - a) Funkcja f jest rosnąca w całym zbiorze $\mathbb{R}$
 - b) Funkcja f jest malejąca w całym zbiorze $\mathbb{R}$
 - c) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 1)$ i malejąca w przedziale $(1, \infty)$
 - d) Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, 1)$ i rosnąca w przedziale $(1, \infty)$

4. Funkcja odwrotna

1. Funkcja $f : X \rightarrow Y$ ma funkcję odwrotną $f^{-1} : Y \rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest:
 - a) różniczkowalna i ciągła
 - b) różnowartościowa (iniekcją)
 - c) „na” (surjekcją)
 - d) różnowartościowa i „na” (bijekcją)

2. Niech f będzie funkcją odwracalną. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

- a) $(f^{-1})^{-1} = f$
- b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ dla każdego x
- c) Wykresy f i f^{-1} są symetryczne względem osi Ox
- d) Dziedzina f^{-1} jest zawsze równa dziedzinie f
- e) Wykresy f i f^{-1} są symetryczne względem osi Oy

3. Niech f będzie funkcją odwracalną. Które z poniższych zdań **nie jest** prawdziwe?

- a) $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ dla każdego $x \in D_f$
- b) $f^{-1}(x) = -f(x)$ dla każdego x
- c) Wykresy f i f^{-1} są symetryczne względem prostej $y = x$
- d) Dziedzina funkcji f^{-1} jest zawsze równa zbiorowi wartości funkcji f
- e) f^{-1} jest nieparzysta

4. Dana jest funkcja $f(x) = 2x + 5$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja odwrotna jest określona wzorem:

- a) $f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$
- b) $f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{2}$
- c) $f^{-1}(x) = 2x - 5$
- d) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x + 5}$
- e) Nie istnieje funkcja odwrotna do podanej funkcji.

5. Dana jest funkcja $f(x) = e^{2x}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$. Funkcja odwrotna do f :

- a) ma dziedzinę $\mathbb{R}$ i wzór $f^{-1}(x) = \ln x$
- b) ma dziedzinę $(0, \infty)$ i wzór $f^{-1}(x) = \frac{\ln x}{2}$
- c) ma dziedzinę $(0, \infty)$ i wzór $f^{-1}(x) = \frac{1}{e^{2x}}$
- d) ma dziedzinę $\mathbb{R}$ i wzór $f^{-1}(x) = -e^{2x}$

6. Dana jest funkcja $f(x) = x^4$, gdzie $x \in [0, \infty)$. Funkcja odwrotna do f ma wzór:

- a) $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$, gdzie $x \in [0, \infty)$
- b) $f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{x}$, gdzie $x \in [0, \infty)$
- c) $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$
- d) $f^{-1}(x) = x^4$, gdzie $x \in [0, \infty)$

5. Funkcja ograniczona, ograniczona z góry, ograniczona z dołu

1. Funkcja $f(x) = \sin 2x + 1$ jest:
 - a) ograniczona z góry, ale nie z dołu
 - b) ograniczona z dołu, ale nie z góry
 - c) ograniczona
 - d) nieograniczona
2. Funkcja $f(x) = -2 \operatorname{arctg} x$ jest:
 - a) ograniczona
 - b) nieograniczona
 - c) ograniczona z góry, ale nie z dołu
 - d) ograniczona z dołu, ale nie z góry
3. Funkcja $f(x) = \frac{2}{x-1}$, gdzie $x \in (1, \infty)$ jest:
 - a) ograniczona
 - b) nieograniczona
 - c) ograniczona z góry
 - d) ograniczona z dołu
4. Funkcja $f(x) = \frac{2}{x-1}$, gdzie $x \in (5, \infty)$ jest:
 - a) ograniczona
 - b) nieograniczona
 - c) ograniczona z góry
 - d) ograniczona z dołu
5. Która z funkcji jest ograniczona?
 - a) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$
 - b) $f(x) = \sin x + \cos x$
 - c) $f(x) = x^4 + 1$
 - d) $f(x) = \arccos 2x$
 - e) żadna z powyższych funkcji

6. Złożenie funkcji

1. Niech $f : X \rightarrow Y$ oraz $g : Y \rightarrow Z$. Złożenie $g \circ f$ jest funkcją:
 - a) $g \circ f : X \rightarrow Z$, określoną wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
 - b) $g \circ f : Z \rightarrow X$, określoną wzorem $(g \circ f)(x) = f(g(x))$
 - c) $g \circ f : X \rightarrow Z$, określoną wzorem $(g \circ f)(x) = f(g(x))$
 - d) $g \circ f : Y \rightarrow Y$, określoną wzorem $(g \circ f)(x) = g(x) \cdot f(x)$
2. Które z poniższych zdań o złożeniu funkcji jest prawdziwe?
 - a) $f \circ g = g \circ f$ dla dowolnych funkcji f i g
 - b) Jeśli f i g są różnowartościowe, to $g \circ f$ też jest różnowartościowa
 - c) Dziedzina $g \circ f$ jest zawsze dziedziną funkcji g
 - d) Żadne zdanie z powyższych
3. Niech $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sin x$. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?
 - a) $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$
 - b) $(g \circ f)(x) = \sin(x^2)$
 - c) $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$
 - d) $(f \circ g)(x) = \sin^2 x$ oraz $(g \circ f)(x) = \sin(x^2)$
 - e) Złożenie $f \circ g$ nie istnieje
4. Dane są funkcje $f(x) = \sqrt{x}$ oraz $g(x) = 3x - 6$. Dziedzina funkcji $u = (f \circ g)(x)$ jest:
 - a) $[0, \infty)$
 - b) $[2, \infty)$
 - c) $(-\infty, 2]$
 - d) $\mathbb{R}$
5. Dane są funkcje $f(x) = e^x$ oraz $g(x) = \ln x$. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?
 - a) $(f \circ g)(x) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$
 - b) $(g \circ f)(x) = x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$
 - c) $(f \circ g)(x) = x$ dla każdego $x \in (0, \infty)$
 - d) $(g \circ f)(x) = x$ dla każdego $x \in (0, \infty)$
 - e) $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$
6. Dane są funkcje $f(x) = 2x + 1$ oraz $g(x) = x^2$. Wartość $(g \circ f)(3)$ wynosi:
 - a) 49
 - b) 19
 - c) 3
 - d) 7

7. Zadania różne

1. Złożenie dwóch funkcji rosnących jest funkcją:

- a) stałą
- b) rosnącą
- c) malejącą
- d) nie można tego określić

2. Funkcja wykładnicza $f(x) = 6^{-x}$ jest:

- a) nieparzysta
- b) rosnącą
- c) malejącą
- d) różnowartościowa

3. Funkcja $f(x) = (e^x)^2$ jest:

- a) parzysta
- b) nieparzysta
- c) rosnąca
- d) malejąca
- e) różnowartościowa

4. Jeżeli funkcja f jest ściśle monotoniczna w pewnym przedziale, to jest w tym przedziale:

- a) nieparzysta
- b) rosnącą
- c) malejącą
- d) różnowartościowa

5. Warunkiem wystarczającym dla różnowartościowości funkcji jest:

- a) jej parzystość
- b) jej nieparzystość
- c) jej ścisła monotoniczność
- d) jej ograniczoność

6. Funkcja stała jest różnowartościowa:

- a) nigdy
- b) zawsze
- c) gdy jej dziedzina jest jednoelementowa

- d) gdy jest określona wzorem $f(x) = 0$ dla każdego $x \in D_f$
7. Jeśli funkcja f jest funkcją rosnącą, a funkcja g jest funkcją malejącą, to funkcja złożona $f \circ g$:
- a) jest funkcją rosnącą
 - b) jest funkcją malejącą
 - c) jest funkcją stałą
 - d) może być zarówno funkcją rosnącą, jak i funkcją malejącą
8. Funkcja $f(x) = e^x + e^{-x}$ jest:
- a) parzysta i ograniczona z dołu
 - b) nieparzysta i ograniczona z góry
 - c) parzysta i nieograniczona
 - d) nieparzysta i nieograniczona
 - e) różnowartościowa
9. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ jest:
- a) parzysta i ograniczona
 - b) nieparzysta i ograniczona
 - c) parzysta i nieograniczona
 - d) różnowartościowa i ograniczona
 - e) rosnąca w przedziale $[0, \infty]$
10. Która funkcja jest równocześnie różnowartościowa, nieparzysta i nieograniczona?
- a) $f(x) = \operatorname{tg} x$
 - b) $f(x) = 2^x$
 - c) $f(x) = 2x^5$
 - d) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
11. Funkcja $f(x) = \operatorname{arctg} x$ jest:
- a) różnowartościowa, nieparzysta i ograniczona
 - b) różnowartościowa, parzysta i ograniczona
 - c) nieróżnowartościowa, nieparzysta i ograniczona
 - d) rosnąca w całej dziedzinie
 - e) różnowartościowa, nieparzysta i nieograniczona
12. Funkcja $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x$ jest:
- a) rosnąca

- b) malejąca
 - c) stała, przy czym $f(x) = \frac{\pi}{2}$
 - d) stała, przy czym $f(x) = \pi$
13. Funkcja $f(x) = \sin(\arcsin x)$ jest:
- a) stała
 - b) tożsamościowa, tzn. $f(x) = x$ dla każdego $x \in D_f$
 - c) malejąca
 - d) ograniczona
14. Funkcja $f(x) = \arccos x$ jest:
- a) rosnąca w całej dziedzinie
 - b) malejąca w całej dziedzinie
 - c) różnowartościowa
 - d) okresowa
15. Funkcja $f(x) = \arccos(\cos x)$ dla $x \in [0, \pi]$ jest:
- a) stała
 - b) okresowa
 - c) różnowartościowa
 - d) malejąca
16. Funkcja $f(x) = \arcsin(\sin x)$ dla $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ jest:
- a) nieparzysta
 - b) okresowa
 - c) różnowartościowa
 - d) rosnąca
17. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem: $f(x) = \frac{1}{x} + x$. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?
- a) Funkcja f jest różnowartościowa, ponieważ jest nieparzysta
 - b) Funkcja f jest różnowartościowa, ponieważ $f(x_1) = f(x_2)$ pociąga za sobą $x_1 = x_2$
 - c) Funkcja f nie jest różnowartościowa, ponieważ $f(2) = f(\frac{1}{2})$
 - d) Funkcja f nie jest różnowartościowa, ponieważ $f(1) = f(-1)$
 - e) Funkcja f jest różnowartościowa, ponieważ $f(1) \neq f(2)$
18. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

- a) f nie może mieć funkcji odwrotnej
- b) f^{-1} jest funkcją malejącą
- c) f jest różnowartościowa, ale nie musi być suriekcją (przyjmować każdej wartości)
- d) f jest bijekcją (różnowartościową i przyjmuje każdą wartość)

19. Funkcja $f(x) = x^2 \sin x$ jest

- a) parzysta
- b) nieparzysta
- c) różnowartościowa
- d) ograniczona z góry
- e) ograniczona z dołu
- f) ograniczona

Podsumowanie

Artykuł prezentuje wybór zadań testowych, które od lat wykorzystuję w pracy ze studentami. Nie jest to pełny zbiór — raczej reprezentatywna próbka z większej bazy pytań. Zależało mi na pokazaniu zadań typowych, ponieważ właśnie one dają najwięcej możliwości przekształceń: można zmieniać formę odpowiedzi (wielokrotny wybór, jednokrotny wybór, prawda/fałsz), łączyć pytania, dzielić je na części, a także modyfikować użyte w nich funkcje. Warto przy tym pamiętać, że najprostsza forma — prawda/fałsz — najmniej mówi o rzeczywistej wiedzy studenta.

W artykule nie zamieściłam klucza odpowiedzi i zrobiłam to świadomie. Większość odpowiedzi jest oczywista i nie wymaga komentarza. Interesujące są te pytania, które zmuszają do zastanowienia — nie należy pozbawiać studenta wysiłku samodzielnego poszukiwania. Dlatego zachęcam czytelników, aby nie tylko wskazywali poprawne odpowiedzi, ale też analizowali, dlaczego pozostałe są błędne.

Literatura

1. K. Adrianowicz, I. Nowak, *Egzamin z teorii matematyki na kierunkach inżynierskich warto go przeprowadzać?*, MINUT 2025 (7), s. 99–134.
2. A. Chmielowska, E. Mateja-Losa, M. Żabka, *Matematyka dla kandydatów na studia techniczne, część 1*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2022, s. 60–137.
3. E. Łobos *Asymptoty — zadania testowe*, MINUT 2024 (6), s. 81–91 .
4. E. Łobos *Pochodna funkcji jednej zmiennej i jej własności — zadania testowe*, MINUT 2026 (8), s. 53–70.