MINUT 2026 (8), s. 224–244
ISSN 2719-3063

Marek ŻABKA

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Macierze podobne cz II. Wyznaczanie postaci Jordana macierzy

Streszczenie. W artykule omawiamy macierze kwadratowe o elementach w zbiorze liczb zespolonych. W zbiorze takich macierzy jest zdefiniowana relacja podobieństwa. Dla każdej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ istnieje macierz do niej podobna o specyficznej budowie, nazywana postacią Jordana. Macierz Jordana stanowi uogólnienie macierzy diagonalnej.
Pojęciem podstawowym dla tej konstrukcji jest klatka Jordana. Najprostszym jej przypadkiem jest każda macierz stopnia 1, lecz klatki te mogą mieć dowolnie duży stopień. Macierz Jordana jest macierzą blokową, gdzie na głównej przekątnej są rozmieszczone klatki Jordana, a pozostałe bloki są macierzami zerowymi.
W artykule przedstawiamy algorytm wyznaczania postaci Jordana macierzy, który zilustrujemy wieloma przykładami. Dla macierzy stopnia 2 oraz 3 rachunki są dość schematyczne, lecz przykłady obejmują również różne metody radzenia sobie z trudnościami przy macierzach stopnia większego od 3.
Słowa kluczowe: postać Jordana, klatka Jordana, diagram Ferrersa.

1. Wstęp

Dwie macierze kwadratowe A i B są podobne, gdy istnieje macierz odwracalna C taka, że $B = C^{-1}AC$. Macierz C nazywamy macierzą przejścia. Relacja podobieństwa dzieli zbiór macierzy kwadratowych na klasy abstrakcji. Naszym celem jest wskazanie w każdej klasie reprezentanta o możliwie prostej budowie. W niektórych przypadkach jest nim macierz diagonalna, co jest najwygodniejsze dla dalszych obliczeń. Jednak w wielu klasach nie ma macierzy diagonalnej, lecz można wskazać postać ogólniejszą – macierz Jordana. Definicje wspomnianych tu pojęć można znaleźć w literaturze, np. [1] lub [2]. Można też przeczytać artykuł [4], gdzie znajdziemy definicje oraz przykłady dla macierzy diagonalizowalnych.

W tym artykule przedstawiono algorytm wyznaczania postaci Jordana macierzy, czyli macierzy Jordana podobnej do macierzy wyjściowej. Dowód został pominięty, ponieważ nawet jego prosta wersja wymagałaby wprowadzenia większej liczby pojęć. Zamiast tego zagadnienie zilustrowano licznymi przykładami. W początkowych przykładach obliczenia są szczegółowe. W kolejnych pominięto powtarzalne rachunki, a uwagę skupiono na kolejnych elementach algorytmu. Niniejsze opracowanie nie obejmuje algorytmu wyznaczania macierzy przejścia C.

Autor korespondencyjny: M. Żabka (Marek.Zabka@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 24.08.2026 r.

Zwróćmy uwagę, że postać Jordana macierzy może być istotnie zespolona, nawet wtedy gdy macierz wyjściowa jest rzeczywista. Tylko dwa przykłady dotyczą macierzy zespolonej, ponieważ na ogół obliczenia w liczbach zespolonych są technicznie trudniejsze, choć przebiegają według tych samych algorytmów. Największy z analizowanych przykładów dotyczy macierzy stopnia 7.

Należy zaznaczyć, że postać Jordana wyznaczamy tylko dla macierzy kwadratowych. Stąd przez macierz stopnia n rozumiemy macierz o wymiarach $n \times n$. Do oznaczania rządu macierzy, będziemy używali symbolu $\mathrm{rz}(A)$ lub $\mathrm{rz}\,A$. W literaturze spotyka się oznaczenia $\operatorname{rank} A$, $\mathrm{rk}\,A$ lub czasem $\mathrm{r}(A)$.

2. Klatka Jordana i macierz Jordana

Definicja 1. *Macierz kwadratową stopnia n o postaci:*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

nazywamy klatką Jordana i oznaczamy symbolem $K_n(\lambda)$.

Przykład 1. Następujące macierze są klatkami Jordana:

$$K_1(5) = [5]\,, \qquad K_2(-4) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad K_3(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad K_4(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład 2. Przedstawione niżej macierze nie są klatkami Jordana. Kolorem czerwonym wskazano element macierzy, który narusza strukturę klatki.

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ – tu zamiast „3” powinno być „2”.

2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ – tu zamiast „0” powinno być „1”.

3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ – tu zamiast „1” powinno być „0”.

Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy działanie sumy prostej macierzy kwadratowych $A \oplus B$. Polega ono na rozmieszczeniu macierzy A oraz B jako bloków na głównej przekątnej wynikowej macierzy blokowej i uzupełnieniu reszty pozycji zerami.

Przykład 3. Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & -2 \\ -8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dopisane zera zostały tu zapisane kolorem niebieskim.

Działanie $\oplus$ jest oczywiście łączne, ale nie jest przemienne.
Zauważmy, że każdą macierz diagonalną można zapisać za pomocą działania $\oplus$.

Przykład 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = K_1(1) \oplus K_1(2) \oplus K_1(3).$$

Definicja 2. *Macierz blokową, w której na głównej przekątnej są rozmieszczone klatki Jordana, a poza tą przekątną są elementy zerowe, nazywamy macierzą Jordana.*

Oczywiście pojedyncza klatka Jordana jest macierzą Jordana, podobnie jak każda macierz diagonalna.

Przykład 5. Macierz Jordana stopnia 5 zbudowana z dwóch klatek Jordana:

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Stosując działanie $\oplus$ dla klatek, można zapisać: $J = K_3(4) \oplus K_2(-5)$.

Często zapisuje się macierz w postaci uwidaczniającej układ klatek, np.:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right], \quad J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ lub } J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ & 4 & 1 & & \\ & & 4 & & \\ & & & -5 & 1 \\ & & & & -5 \end{bmatrix}.$$

W tym ostatnim zapisie pozostawiono tylko istotne elementy klatek.

Przykład 6. Poniżej przedstawiono różne macierze Jordana stopnia 3 mające tę samą wartość na głównej przekątnej:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Postać Jordana macierzy

Przypomnijmy, że macierze A i B są podobne, gdy istnieje macierz odwracalna taka, że $B = C^{-1}AC$. W artykule [4] pokazano, dla jakich macierzy istnieje postać diagonalna. Następujące twierdzenie jest uogólnieniem tego faktu.

Twierdzenie 1. *Dla każdej macierzy A istnieje podobna do niej macierz Jordana J, którą nazywamy postacią Jordana macierzy A.*

Uwaga 1. Postać Jordana jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do kolejności klatek.

Powyższe stwierdzenie oznacza, że tak na ogół mamy formalnie więcej postaci Jordana, ale każde dwie takie postacie różnią się tylko kolejnością rozmieszczenia klatek na głównej przekątnej. Jedynie gdy postać Jordana składa się z jednej klatki, jest ona jednoznaczna.

Uwaga 2. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe przy założeniu, że elementy macierzy A i J mogą być liczbami zespolonymi. W szczególności postać Jordana macierzy rzeczywistej nie musi być macierzą rzeczywistą.

3.1. Diagram Ferrersa

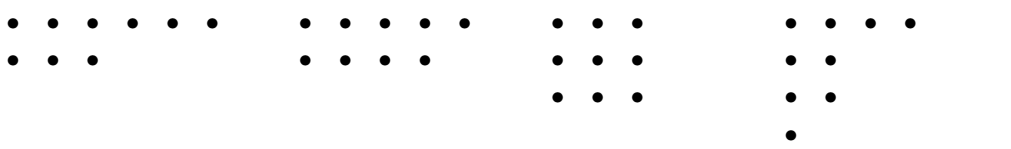
Pokażemy algorytm budowy postaci Jordana. Nie będzie tu dowodu poprawności algorytmu, a jedynie przykłady ilustrujące jego stosowanie[1].

W trakcie obliczeń postaci Jordana korzystamy z diagramów Ferrersa podziału liczby na składniki. Informacje na temat diagramów Ferrersa można odnaleźć np. w [3]. W następnej sekcji diagramy Ferrersa posłużą do wyznaczania liczby klatek Jordana.

Definicja 3. *Diagram Ferrersa liczby n składa się z n kropek rozmieszczonych w wierszach i kolumnach tak, by każdy kolejny wiersz miał liczbę kropek nie większą niż poprzedni.*

Przykład 7. Oto kilka diagramów Ferrersa dla liczby 9

$9 = 6 + 3$ $9 = 5 + 4$ $9 = 3 + 3 + 3$ $9 = 4 + 2 + 2 + 1$.



Liczba wszystkich takich diagramów dla wartości 9 wynosi 30.

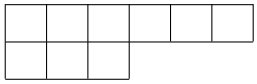
Przykład 8. Następujące układy kropek nie są diagramami Ferrersa (w każdym z tych przykładów w drugim wierszu liczba kropek jest większa niż w poprzednim):

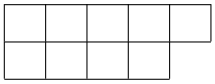


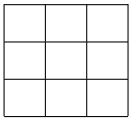
[1] Dowód można znaleźć w na przykład w [1] oraz w [2].

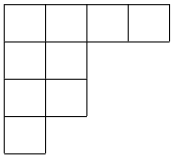
Zamiast diagramów Ferrersa można stosować diagramy Younga, które stanowią tablicowy odpowiednik układu kropek.

Przykład 9. Zapiszmy zamiast diagramów Ferrersa, diagramy Younga:

$9 = 6 + 3$ 

$9 = 5 + 4$ 

$9 = 3 + 3 + 3$ 

$9 = 4 + 2 + 2 + 1$. 

3.2. Algorytm budowy postaci Jordana

Przypomnijmy, że wartości własne uzyskujemy, rozwiązując równanie $\det(A - \lambda I) = 0$ w liczbach zespolonych [4].

Czytelnik powinien prześledzić działanie algorytmu krok po kroku na kolejnych przykładach.

Zakładamy, że mamy macierz A stopnia n.

1. Wyznaczamy wszystkie różne wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, gdzie $m \leqslant n$ wraz z ich krotnościami $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Wiadomo, że suma krotności spełnia warunek: $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

2. Każdej jednokrotnej wartości własnej λ_i odpowiada pojedyncza klatka Jordana $K_1(\lambda_i)$.

3. Dla każdej wartości własnej λ_i, dla której $k_i > 1$, wykonujemy następujące kroki:

   (a) przyjmujemy $r_{i0} = n$ (stopień macierzy),

   (b) następnie wyznaczamy rzędy macierzy $r_{ij} = \mathrm{rz}(A - \lambda_i I)^j$ dla kolejnych $j = 1, 2, \ldots, \hat{j}$, aż do spełnienia warunku $r_{i\hat{j}} = n - k_i$,

   (c) obliczamy liczby $\Delta_{ij} = r_{i,j-1} - r_{ij}$, dla $j = 1, 2, \ldots, \hat{j}$; wiadomo przy tym, że

   $$\Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \cdots + \Delta_{i\hat{j}} = k_i,$$

   (d) konstruujemy diagram Ferrersa odpowiadający liczbie k_i, w taki sposób, że kolejne jego wiersze mają Δ_{i1}, Δ_{i2}, $\ldots$, $\Delta_{i\hat{j}}$ kropek,

   (e) ostatecznie z diagramu odczytujemy klatki Jordana w kierunku pionowym: kolumnie składającej się z s kropek odpowiada klatka $K_s(\lambda_i)$.

4. Wyznaczone klatki Jordana umieszcza się jako bloki na głównej przekątnej.

Uwaga 3. Łączna liczba kropek w diagramie dla wartości własnej λ_i jest równa k_i, czyli krotności tej wartości własnej.

Uwaga 4. Jeżeli wartość własna jest jednoznacznie określona lub z kontekstu wynika, której wartości własnej dotyczą obliczenia możemy uprościć zapis

$$r_j = \mathrm{rz}(A - \lambda I)^j, \quad \Delta_j = r_{j-1} - r_j.$$

4. Przykłady wyznaczania postaci Jordana

Zaczniemy od podstawowych przykładów dotyczących macierzy stopnia 2 oraz 3, gdzie wyjaśnimy szczegółowo algorytm. Następne przykłady poprowadzą nas przez różne problemy, które możemy spotkać. Pokażemy też metody ułatwiające obliczenia. Większość przykładów dotyczy macierzy rzeczywistych, jednak zobaczymy też postać Jordana macierzy zespolonej oraz przykład, że macierz zespolona ma rzeczywistą postać Jordana. Ostatni przykład pokaże, że przy odpowiednio dużej liczbie elementów zerowych obliczenia pozostają wykonalne nawet dla macierzy stopnia 7.

Przykład 10. Niech $A = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Wyznaczamy wielomian charakterystyczny:

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 4 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2.$$

Mamy:

$$A+3I = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad r_1 = \operatorname{rz}(A+3I) = 1, \qquad (A+3I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad r_2 = \operatorname{rz}(A+3I)^2 = 0.$$

Otrzymaliśmy $r_0 = 2$ (stopień macierzy), $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, więc $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$, a diagram Ferrersa ma postać: $\begin{array}{|c|}\hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array}$, co za tym idzie postać Jordana macierzy A jest jednoznaczna:

$$J = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Poniższy przykład pokazuje, że macierz zespolona może mieć rzeczywistą postać Jordana. Obliczenia są w pełni analogiczne do powyższych, więc zostaną przedstawione skrótowo.

Przykład 11. Niech $A = \begin{bmatrix} 3+2i & 1+i \\ 2-2i & 3-2i \end{bmatrix}$.

Obliczamy wielomian charakterystyczny:

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 3+2i-\lambda & 1+i \\ 2-2i & 3-2i-\lambda \end{vmatrix} = (3+2i-\lambda)(3-2i-\lambda) - (2-2i)(1+i).$$

Wykorzystujemy dwukrotnie wzór skróconego mnożenia $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$\varphi(\lambda) = (3-\lambda+2i)(3-\lambda-2i) - 2(1-i)(1+i) = (3-\lambda)^2 - (2i)^2 - 2(1-i^2) = \\ = (3-\lambda)^2 - (-4) - 2\cdot 2 = (3-\lambda)^2.$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, wyznaczona wartość własna ma krotność algebraiczną równą dwa.

$$r_1 = \operatorname{rz}(A-3I) = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 3+2i-3 & 1+i \\ 2-2i & 3-2i-3 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ 2-2i & -2i \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że dla wartości własnej 3, $\det(A-3I)=0$, a stąd wynika, że $\operatorname{rz}(A-3I)<2$. Elementy niezerowe w macierzy $A-3I$ świadczą, że rząd tej macierzy musi być równy 1, co pozwala na obliczenie $\Delta_1=2-1=1$, więc w pierwszym wierszu jest jedna kropka. Dla jedynej dwukrotnej wartości własnej 3 mamy dwie kropki. W przypadku jedynej dwukrotnej wartości własnej, równej 3, odpowiadający jej diagram składa się z dwóch kropek. Jest to możliwe tylko dla diagramu postaci $\begin{array}{|c|}\hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array}$. Jak widzimy, nie było konieczne obliczanie macierzy $(A-3I)^2$, choć wiemy, że jest ona zerowa.

Ostatecznie postać Jordana jest jednoznaczna i rzeczywista:

$$J=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kolejne przykłady dotyczą macierzy stopnia 3 z dokładnie jedną wartością własną (czyli musi być ona trzykrotna). Zatem diagramy Ferrersa mogą mieć tylko jedną z trzech postaci:

$3=1+1+1$ $\quad$ $3=2+1$ $\quad$ $3=3$

$\bullet\ \bullet\ \bullet$ $\quad$ $\begin{matrix}\bullet & \bullet \\ \bullet & \end{matrix}$ $\quad$ $\begin{matrix}\bullet \\ \bullet \\ \bullet\end{matrix}$

Pierwszy diagram oznacza, że $\Delta_1=3-r_1=3-\operatorname{rz}(A-\lambda I)=3$, czyli $\operatorname{rz}(A-\lambda I)=0$. Inaczej mówiąc, $A-\lambda I$ jest macierzą zerową, czyli $A=\lambda I$ (macierz A jest macierzą diagonalną).

Pozostałe dwa diagramy pojawią się w kolejnych dwóch przykładach.

Przykład 12. Niech

$$A=\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -2 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Dla wyznaczenia wielomianu charakterystycznego korzystamy z reguły Sarrusa.

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3}-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & -\frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{7}{3}-\lambda\right)\left(-\frac{2}{3}-\lambda\right)\left(-\frac{2}{3}-\lambda\right)+1+0-\left(-\frac{2}{3}-\lambda\right)(-2)-\left(-\frac{2}{3}-\lambda\right)(-1)-0=\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)^3.$$

Mamy trzykrotną wartość własną $\lambda=\dfrac{1}{3}$.

Obliczmy rzędy:

$$\operatorname{rz}\left(A-\frac{1}{3}I\right)=\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}=2,$$

$$\operatorname{rz}\left(A-\frac{1}{3}I\right)^2=\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=1.$$

Macierz $(A-\frac{1}{3}I)^3$ jest macierzą zerową, czyli ma rząd 0. Obliczmy delty: $\Delta_1 = 3-2 = 1$, $\Delta_2 = 2-1$ oraz $\Delta_3 = 1-0 = 1$. Stąd otrzymujemy diagram Ferrersa oraz postać Jordana:

$$\begin{matrix}\bullet\\ \bullet\\ \bullet\end{matrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Postać Jordana jest jedną klatką, więc jest w tym przypadku wyznaczona jednoznacznie.

Przykład 13. Niech

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Można obliczyć wielomian charakterystyczny regułą Sarrusa, ale tu zobaczymy, że operacje elementarne na macierzy mogą być równie skuteczne. Operacje elementarne na wierszach są oznaczone kolorem niebieskim. Zapis $w_1 \leftarrow w_1 + 2\cdot w_3$ oznacza, że do elementów pierwszego wiersza dodajemy odpowiednie elementy trzeciego wiersza, pomnożone przez 2. W kolejnych przykładach spotkamy się z zamianą dwóch wierszy oznaczoną przez $w_1 \leftrightarrow w_2$ oraz z operacjami na kolumnach, które będziemy oznaczać symbolem k_i.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{matrix} w_1 \leftarrow w_1 + 2\cdot w_3 \\ w_2 \leftarrow w_2 - w_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2-2\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -1+\lambda \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{(*)}{=}$$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{matrix} w_3 \leftarrow w_3 - w_1 \end{matrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2(1\cdot(-\lambda) - (-1)\cdot 1) = (1-\lambda)^3.$$

W kroku $(*)$ wyłączamy z dwóch pierwszych wierszy czynnik $1-\lambda$.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie mamy potrójną wartość własną równą 1. Macierz

$$A - I = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ma trzy proporcjonalne wiersze, więc $\operatorname{rz}(A-I) = 1$. Stąd $\Delta_1 = 2$, co daje w pierwszym wierszu diagramu Ferrersa dwie kropki, trzecia musi być w drugim wierszu. Ponadto wiadomo już, że $(A-I)^2$ jest macierzą zerową, co oczywiście można sprawdzić wprost.

Stąd otrzymujemy diagram Ferrersa oraz dwie możliwe postacie Jordana. Elementy klatek są zaznaczone w kolorach niebieskim i czerwonym, a elementy poza klatkami są jasno zielone:

$$\begin{matrix} 2\{ & 1\{ \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \\ \uparrow & \uparrow \\ K_2(1) & K_1(1) \end{matrix} \quad \begin{matrix}\Delta_1 = 2\\ \Delta_2 = 1\end{matrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ lub } J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład 14. Możemy również wyznaczać wartości własne oraz postać Jordana dla macierzy, których elementami są liczby zespolone nienależące do zbioru liczb rzeczywistych.

Niech macierz $A = \begin{bmatrix} -i & 2 & -1 \\ 2 & 3i & -i \\ 2i & -2 & 2 \end{bmatrix}$. W celu obliczenia $\det(A - \lambda I)$ będziemy stosować operacje elementarne:

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -i-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 3i-\lambda & -i \\ 2i & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{matrix} w_2 \leftarrow w_2 - iw_1 \\ w_3 \leftarrow w_3 + (2-\lambda)w_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -i+\lambda & 2 & -1 \\ 1+\lambda i & i-\lambda & 0 \\ \lambda^2+(i-2)\lambda & 2-2\lambda & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -i(i-\lambda) & i-\lambda \\ \lambda^2+(i-2)\lambda & 2-2\lambda \end{vmatrix} = -(i-\lambda)\begin{vmatrix} -i & 1 \\ \lambda^2+(i-2)\lambda & 2-2\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - i)\big((-i)(2-2\lambda) - (\lambda^2 + (i-2)\lambda)\big) = (\lambda - i)(-\lambda^2 + (2+i)\lambda - 2i).$$

Równanie kwadratowe $-\lambda^2 + (2+i)\lambda - 2i = 0$ rozwiązujemy za pomocą $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = (2+i)^2 - 4(-1)(-2i) = 3 - 4i, \quad \sqrt{\Delta} = \pm(2-i), \quad \lambda_{1,2} = \frac{-(2+i) \pm (2-i)}{-2}, \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = i.$$

Ostatecznie

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - i)^2(\lambda - 2).$$

Dla jednokrotnej wartości własnej $\lambda = 2$ klatka ma postać $K_1(2)$.

Dla dwukrotnej wartości własnej $\lambda = i$ musimy zrobić diagram Ferrersa. W tym celu obliczmy rząd macierzy $(A - i \cdot I)$, który oczywiście jest mniejszy od 3. W ramce wyróżniony jest jeden z niezerowych minorów stopnia 2.

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} -i-i & 2 & -1 \\ 2 & 3i-i & -i \\ 2i & -2 & 2-i \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} -2i & 2 & -1 \\ 2 & \boxed{2i} & \boxed{-i} \\ 2i & \boxed{-2} & \boxed{2-i} \end{bmatrix} = 2.$$

wartość tego minora $= 2i \cdot (2-i) - (-i)(-2) = 2 + 2i \neq 0$

Diagram Ferrersa ma w pierwszym wierszu jedną kropkę, więc otrzymujemy pojedynczą klatkę: $K_2(i)$.

Ostatecznie możliwe są dwie postacie Jordana, różniące się kolejnością klatek. Klatki wyróżniono kolorami, podobnie do poprzedniego przykładu.

$$J = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ lub } J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}.$$

Następny przykład pokazuje, że dla macierzy rzeczywistej postać Jordana może być zespolona. Jednak wartości własne w tej sytuacji są sprzężone, więc pojawiają się klatki Jordana o sprzężonych wartościach na przekątnej głównej, o tych samych rozmiarach.

Przykład 15. Znajdziemy postać Jordana dla macierzy stopnia 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -2-\lambda & -5 \\ 1 & -1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} k_2 \leftarrow k_2 + k_1 \\ k_4 \leftarrow k_4 + (1+\lambda)k_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3-\lambda & 0 & (2-\lambda)(1+\lambda) \\ 1 & 2-\lambda & -1 & -2+\lambda \\ 0 & 5 & -2-\lambda & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & -\lambda^2+\lambda+2 \\ 2-\lambda & -1 & -2+\lambda \\ 5 & -2-\lambda & -5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} k_3 \leftarrow k_3 + k_1 \end{matrix} = -\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & -\lambda^2-1 \\ 2-\lambda & -1 & 0 \\ 5 & -2-\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2+1)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+1)\Big((2-\lambda)(-2-\lambda)+5\Big) = (\lambda^2+1)^2.$$

Mamy więc dwie wartości własne sprzężone: $\lambda_1 = i$ oraz $\lambda_2 = -i$, każda z nich o krotności dwa.

Dla obu wartości własnych przeprowadzimy badanie rzędu $A - \lambda I$. Przeanalizujemy tu przypadek $\lambda_1 = i$. Za pomocą operacji elementarnych na wierszach i kolumnach, sprowadzamy macierz do postaci schodkowej:

$$\operatorname{rz}(A - iI) = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2-i & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1-i & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -2-i & -5 \\ 1 & -1 & 0 & -1-i \end{bmatrix} = \begin{matrix} w_1 \leftrightarrow w_4 \end{matrix} =$$

$$= \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1-i \\ 1 & 1-i & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -2-i & -5 \\ 2-i & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} w_2 \leftarrow w_2 - w_1 \\ w_4 \leftarrow w_4 + (i-2)w_1 \end{matrix} =$$

$$= \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1-i \\ 0 & 2-i & -1 & -2+i \\ 0 & 5 & -2-i & -5 \\ 0 & -3-i & 0 & 3+i \end{bmatrix} = k_2 \leftarrow k_2 + k_4 =$$

$$= \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & -2-i & 0 & -1-i \\ 0 & 0 & -1 & -2+i \\ 0 & 0 & -2-i & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3+i \end{bmatrix} = \begin{matrix} w_3 \leftarrow w_3 - (2+i)w_2 \end{matrix} =$$

$$= \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & -2-i & 0 & -1-i \\ 0 & 0 & -1 & -2+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3+i \end{bmatrix} = \overset{w_3 \leftrightarrow w_4}{} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & -2-i & 0 & -1-i \\ 0 & 0 & -1 & -2+i \\ 0 & 0 & 0 & 3+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

Ten ostatni krok był opcjonalny, pozwolił jednak na uwidocznienie postaci schodkowej otrzymanej macierzy.

Skoro rząd macierzy $A - iI$ jest równy 3, pierwszy wiersz diagramu Ferrersa składa się z jednej kropki. Zgodnie z uwagą 3 łączna liczba kropek dla tej wartości własnej wynosi 2. Oznacza to, że druga kropka musi się znaleźć w drugim wierszu. Otrzymujemy diagram postaci $\begin{array}{|c|}\hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array}$. Czytelnik sam może sprawdzić, że obliczenia dla $\lambda_2 = -i$ przebiegają analogicznie, prowadząc do identycznego diagramu. Stąd postać Jordana z dokładnością do kolejności klatek przedstawia się następująco:

$$J = K_2(i) \oplus K_2(-i) = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Przed następnym przykładem zwróćmy uwagę na związki między diagramami Ferrersa a budową wielomianu charakterystycznego oraz rzędami macierzy postaci $A - \lambda_i I$.

Zgodnie z algorytmem budowy postaci Jordana, jeżeli diagram Ferrersa dla pewnej wartości własnej λ_i składa się z k kropek, to rząd macierzy

$$\operatorname{rz}(A - \lambda_i I)^m = \operatorname{rz}(A - \lambda_i I)^{m+1} = \operatorname{rz}(A - \lambda_i I)^{m+2} = \ldots = n - k,$$

gdzie m oznacza liczbę kolumn w diagramie Ferrersa, Ponadto liczba k jest krotnością algebraiczną tej wartości własnej, więc wielomian charakterystyczny $\varphi(\lambda)$ ma postać

$$\varphi(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^k \psi(\lambda).$$

Czasem wartości własne są znane lub też podejrzewamy, jakie są ich wartości. Możemy sprawdzić, czy nasze podejrzenia są słuszne, nie obliczając wprost wielomianu charakterystycznego. Zamiast tego możemy obliczać rzędy $\operatorname{rz}(A - \lambda_i I)^m$ aż do momentu, gdy ich wartości się stabilizują.

Zwróćmy uwagę, że liczba 0 jest wartością własną dokładnie wtedy, gdy w diagramie Ferrersa w pierwszym wierszu jest co najmniej jedna kropka, czyli $n - \operatorname{rz}(A - 0I) > 0$, a co za tym idzie $\operatorname{rz} A < n$.

Przykład poniżej ilustruje powyższe rozważania.

Przykład 16. Dana jest macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -3 & -8 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Na początku możemy zauważyć, pierwsza i ostatnia kolumna są do siebie przeciwne. Stąd rząd macierzy $\operatorname{rz}(A) < 4$, czyli $\lambda_1 = 0$ jest wartością własną.

Sprawdzimy, że $\lambda_2 = 2$ też jest wartością własną oraz że nie ma innych.

Czytelnik może oczywiście zapytać, dlaczego rozpatrujemy akurat $\lambda_2 = 2$. Taka informacja może wynikać z intuicji, wcześniejszych obliczeń lub znajomości problemu, w którym pojawia się macierz A. W tym miejscu naszym celem jest jedynie zweryfikowanie, że przypuszczenie to jest poprawne.

W tym celu wyznaczymy rzędy macierzy A, A^2, ... aż kolejne wartości będą identyczne. Analogiczną procedurę przeprowadzimy dla rzędów macierzy $A - 2I$, $(A - 2I)^2$, ...

$$\det \begin{bmatrix} 8 & -4 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -6 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rz} A = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -3 & -8 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 3.$$

$$\operatorname{rz} A^2 = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 19 & -11 & -8 & -19 \\ 6 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -6 & 0 & -6 \\ 9 & -5 & -4 & -9 \end{bmatrix} = \begin{matrix} k_1 \leftarrow k_1 + k_2 + k_3 \\ k_4 \leftarrow k_1 - k_2 - k_3 \end{matrix} = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 0 & -11 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

$$\operatorname{rz} A^3 = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 38 & -22 & -16 & -38 \\ 12 & -4 & -8 & -12 \\ 12 & -12 & 0 & -12 \\ 18 & -10 & -8 & -18 \end{bmatrix} = 2 = \operatorname{rz} A^2.$$

$$\operatorname{rz}(A - 2I) = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 6 & -4 & -3 & -8 \\ 3 & -3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{matrix} w_1 \leftarrow w_1 - w_4 - w_3 \\ w_2 \leftarrow w_2 - w_3 \end{matrix} = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} = 2.$$

Ponieważ liczba kropek jest równa stopniowi macierzy, nie ma potrzeby wykonywania dalszych obliczeń. Wielomian charakterystyczny ma postać $\varphi(\lambda) = \lambda^2(2 - \lambda)^2$.

Dla wartości własnej $\lambda_1 = 0$ kolejne rzędy wynoszą odpowiednio: 3 oraz 2 co pozwala skonstruować diagram $\begin{array}{|c|}\hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array}$.

Dla wartości własnej $\lambda_2 = 2$ diagram Ferrersa ma postać: $\begin{array}{|cc|}\hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}$. Stąd uzyskujemy postać Jordana w postaci trzech możliwych permutacji tych trzech klatek na głównej przekątnej:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vee J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vee J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kolejne dwa przykłady pokazują, że ten sam wielomian charakterystyczny może prowadzić do różnych postaci Jordana. Ponadto wyznaczanie wielomianu charakterystycznego dla macierzy stopnia 5 nie musi być trudne.

Przykład 17. Znajdziemy postać Jordana macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 4 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tu dla wyznaczenia wielomianu charakterystycznego zastosujemy rozwinięcie Laplace'a względem wskazanych wierszy i kolumn, a na końcu otrzymamy wyznacznik stopnia 2.

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4-\lambda & 4 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -3 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & 4 & 9 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & -2 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 9 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)^2(2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (1+\lambda)^2(2-\lambda)^3.$$

Teraz musimy osobno rozpatrzyć obie wartości własne. Wiadomo, że dla dwukrotnej wartości własnej $\lambda_1 = -1$ diagram Ferrersa ma dwie kropki. Wystarczy obliczyć $\operatorname{rz}(A - (-1) \cdot I) = \operatorname{rz}(A + I)$, który musi się równać 3 lub 4. Sprowadzimy macierz do postaci schodkowej

$$\operatorname{rz}(A+I) = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} w_1 \leftrightarrow w_5 \\ w_3 \leftrightarrow w_4 \end{matrix} = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 6 & 4 & 9 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 4 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} k_1 \leftrightarrow k_5 \end{matrix} = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & -2 & 6 \\ -1 & 5 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} w_2 \leftrightarrow w_2 + w_1 \end{matrix} = \operatorname{rz} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & -2 & 6 \\ 0 & 9 & 13 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4.$$

Liczbę kropek obliczamy ze wzoru $5 - \operatorname{rz}(A+I) = 5 - 4 = 1$. Stąd diagram Ferrersa ma w pierwszym wierszu jedną kropkę, a co za tym idzie – w drugim wierszu będzie druga kropka. Otrzymujemy zatem klatkę Jordana $K_2(-1)$.

A teraz sprawdzimy drugą, trzykrotną wartość własną $\lambda_2 = 2$.

$$\operatorname{rz}(A-2I) = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 9 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{array}{l} w_2 \leftarrow w_2 - w_1 \\ w_3 \leftarrow w_3 - \frac{2}{3}w_1 \\ w_4 \leftarrow w_4 - \frac{5}{3}w_1 \\ w_5 \leftarrow w_4 + 2w_1 \end{array} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & -2 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{l} w_4 \leftarrow w_4 - w_3 \\ w_5 \leftarrow w_5 - 2w_2 + \frac{1}{3}w_3 \end{array} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 4.$$

Ponieważ krotność algebraiczna wynosi 3, a pierwszy wiersz diagramu zawiera jedną kropkę, otrzymujemy diagram

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

odpowiadający klatce $K_3(2)$.

Ostatecznie mamy dokładnie dwie możliwe postacie Jordana, różniące się tylko kolejnością klatek. Elementy klatek zostały zaznaczone kolorami.

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ lub } J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

W zapisie z użyciem działania $\oplus$ mamy: $J = K_2(-1) \oplus K_3(2)$ lub $J = K_3(2) \oplus K_2(-1)$.

W następnym przykładzie pokażemy macierz, która ma taki sam wielomian charakterystyczny, jak macierz A z przykładu 17, ale inną postać Jordana.

Przykład 18. Niech

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obliczenie $\varphi(\lambda) = (1+\lambda)^2(2-\lambda)^3$ przebiega analogicznie do poprzedniego przykładu.

Jednak inne są wyniki obliczeń dla $\operatorname{rz}(B+I)$ oraz $\operatorname{rz}(B-2I)$. Należy zastosować przekształcenia elementarne, czytelnik powinien sprawdzić wyniki.

$$\operatorname{rz}(B+I)=\operatorname{rz}\begin{bmatrix}0&-3&-3&-3&-3\\0&3&0&0&0\\0&1&3&0&0\\0&8&9&3&3\\0&-9&-9&0&0\end{bmatrix}=3 \text{ oraz } \operatorname{rz}(B-2I)=\operatorname{rz}\begin{bmatrix}-3&-3&-3&-3&-3\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&8&9&0&3\\0&-9&-9&0&-3\end{bmatrix}=3.$$

Zgodnie z punktem (d) algorytmu, w pierwszych wierszach diagramów Ferrersa są po dwie kropki. Dla wartości potrójnej dodatkowa kropka jest w następnym wierszu. Układy diagramów mają więc postacie:

$$\bullet\ \bullet \text{ dla } \lambda_1=-1, \qquad \begin{matrix}\bullet&\bullet\\\bullet\end{matrix} \text{ dla } \lambda_2=2.$$

Ostatecznie otrzymujemy dwie klatki $K_1(-1)$, jedną klatkę $K_2(2)$ oraz jedną $K_1(2)$. Kolejność jest dowolna, np.

$$J=\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}.$$

Przykład 19. Znajdziemy postać Jordana dla macierzy trójkątnej o identycznej wartości na przekątnej.

$$A=\begin{bmatrix}2&2&-1&-1&1&1\\0&2&0&1&1&2\\0&0&2&2&2&2\\0&0&0&2&0&1\\0&0&0&0&2&1\\0&0&0&0&0&2\end{bmatrix}.$$

W tym przypadku od razu otrzymujemy wielomian charakterystyczny $\varphi(\lambda)=(2-\lambda)^6$ i sześciokrotną wartość własną $\lambda=2$. Zgodnie z algorytmem musimy obliczyć $r_1=\operatorname{rz}(A-2I)$, $r_2=\operatorname{rz}(A-2I)^2$ itd. Na końcu będzie macierz zerowa.

Obliczenie rzędu macierzy $A-2I$ nie jest skomplikowane, wymaga kilku kroków dla uzyskania postaci schodkowej. Mamy

$$\operatorname{rz}(A-2I)=\operatorname{rz}\begin{bmatrix}0&2&-1&-1&1&1\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&2&2&2\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{matrix}w_3\leftarrow w_3-2w_2+2w_4\\w_5\leftarrow w_5-w_4\end{matrix}=\operatorname{rz}\begin{bmatrix}0&2&-1&-1&1&1\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}=3$$

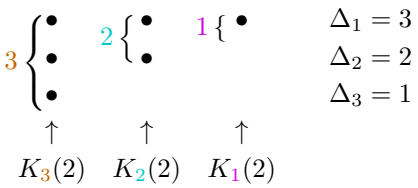
oraz

$$\operatorname{rz}(A-2I)^2 = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Macierz $(A-2I)^3$ jest macierzą zerową, więc $\operatorname{rz}(A-2I)^3 = 0$.

Podsumowując, mamy $r_0 = 6$, $r_1 = 3$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$. Zgodnie z algorytmem budowy postaci Jordana otrzymujemy $\Delta_1 = 6-3 = 3$, $\Delta_2 = 3-1 = 2$ oraz $\Delta_3 = 1-0 = 1$.

Tworzymy diagram Ferrersa, kolorami oznaczono wielkości klatek.



Ostatecznie można klatki rozmieścić na $3! = 6$ sposobów, jednak najczęściej układamy je w kolejności malejących stopni, co prowadzi do następującej postaci Jordana:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Użyte kolory są takie, jak w diagramie Ferrersa.

Kolejny przykład pokazuje, jak wykorzystać szczególną strukturę macierzy, zwaną postacią blokową.

Przykład 20. Znajdźmy postać Jordana macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Tu macierz ma specyficzną budowę, którą uwidocznimy w zapisie macierzy $A-\lambda I$:

$$A-\lambda I=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1-\lambda & -2 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -3-\lambda \end{array}\right].$$

Stosujemy wzór:

$$\det\left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \mathbf{0} & D \end{array}\right]=\det(B)\det(D). \tag{1}$$

Każdy z bloków jest tu macierzą stopnia 3, co pozwala spokojnie obliczyć ich wielomiany charakterystyczne za pomocą reguły Sarrusa. W obu przypadkach mamy $\varphi_B(\lambda)=\varphi_D(\lambda)=-\lambda^3-\lambda^2$. Razem

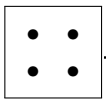
$$\varphi_A(\lambda)=(-\lambda^3-\lambda^2)^2=\Big(-\lambda^2(\lambda+1)\Big)^2=\lambda^4(1+\lambda)^2.$$

Zaczynamy od $\lambda_1=0$. Podobnie jak w poprzednich przykładach sprowadzamy macierz do postaci schodkowej i otrzymujemy $\operatorname{rz} A=4$. Czytelnik powinien spróbować wykonać szczegółowe obliczenia analogicznie do poprzednich przykładów.

Ponieważ

$$A^2=\begin{bmatrix} -6 & 7 & 2 & -9 & 4 & 8 \\ -6 & 7 & 2 & -6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 & 7 \end{bmatrix},$$

więc bez kłopotów obliczymy $\operatorname{rz} A^2=2$.

Mamy tu dwie delty: $\Delta_1=\Delta_2=2$, co daje diagram: .

Dla $\lambda_2=-1$ mamy

$$\operatorname{rz}(A+I)=\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}=\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}+\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ wyznaczniki obu macierzy stopnia 3 są zerowe, a istnieją niezerowe minory stopnia 2, więc

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}=2 \text{ oraz } \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}=2.$$

W konsekwencji

$$\operatorname{rz}(A+I)=2+2=4.$$

Wynik ten prowadzi bezpośrednio do diagramu $\boxed{\bullet\ \bullet}$.

Łącząc wyniki obliczeń dla $\lambda = 0$ oraz dla $\lambda = -1$ otrzymujemy postać Jordana:

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{array}\right],$$

gdzie tym razem klatki są wyróżnione ramkami.

Macierz stopnia 7 stanowi już pewne wyzwanie dla obliczeń ręcznych. Jednak w szczególnych przypadkach jest to możliwe, jak to pokazujemy w ostatnim przykładzie.

Przykład 21. Znajdziemy postać Jordana dla macierzy z dużą liczbą elementów zerowych:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny obliczymy, stosując wpierw rozwinięcia Laplace'a względem wskazanych kolumn, a następnie zamiany wierszy i kolumn. Na końcu skorzystamy z rozbicia macierzy na bloki oraz ze wzoru (1).

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \left|\begin{array}{ccccccc} 1-\lambda & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & \boxed{0} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-\lambda} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \boxed{0} & 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{array}\right| =$$

$$= (-\lambda)\left|\begin{array}{ccccccc} 1-\lambda & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & \boxed{0} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \boxed{1-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \boxed{0} & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & -1-\lambda \end{array}\right| =$$

$$= (-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \quad w_2 \leftrightarrow w_4$$

$$= -(-\lambda)(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda & 0 \end{vmatrix} = \quad k_2 \leftrightarrow k_4$$

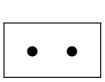
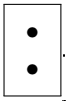
$$= (-\lambda)(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -2 & 2-\lambda \\ -2-\lambda & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)(1-\lambda)^2\big((1-\lambda)(-1-\lambda)+1\big)\big((-2)\cdot 2-(2-\lambda)(-2-\lambda)\big) =$$

$$= (-\lambda)(1-\lambda)^2\lambda^2(-\lambda)^2 = (-\lambda)^5(1-\lambda)^2.$$

Otrzymaliśmy dwie wartości własne: $\lambda_1 = 1$ o krotności 2 oraz $\lambda_2 = 0$ o krotności 5.

Dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$ istnieją tylko dwa możliwe diagramy Ferrersa:  oraz . Który z nich jest w tym przypadku poprawny, zależy od rzędu macierzy $A - I$. Dla $\operatorname{rz}(A-I) = 5$ właściwy jest ten pierwszy z nich, natomiast dla $\operatorname{rz}(A-I) = 6$ ten drugi. Przeprowadzimy obliczenia, stosując własności rzędu macierzy:

$$\operatorname{rz}(A-I) = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 + \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 + \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 3 + \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= 4 + \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = 6.$$

Obliczony rząd $\operatorname{rz}(A-I)=6$ pozwala wybrać diagram $\begin{array}{|c|}\hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array}$, a stąd jedną klatkę Jordana $K_2(1)$.

Teraz sprawdzimy pięciokrotną wartość własną $\lambda_2=0$. Tu możliwych diagramów jest 7, w zapisie partycji liczby 5: 5, $4+1$, $3+2$, $3+1+1$, $2+2+1$, $2+1+1+1$, $1+1+1+1+1$. Obliczmy więc $\operatorname{rz}(A-0\cdot I)=\operatorname{rz} A$. Jak wyżej korzystamy z własności rzędu, w szczególności opuszczamy kolumnę zerową oraz proporcjonalne wiersze i kolumny:

$$\operatorname{rz} A=\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}=4.$$

Czytelnik może sprawdzić, że pasują jeszcze tylko dwa diagramy. Obliczamy

$$\operatorname{rz} A^2=\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=2.$$

Wróćmy do algorytmu. Mamy ciągi rzędów i delt dla wartości własnej $\lambda_2=0$:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rz} A=4, & \operatorname{rz} A^2=2 \\ \Delta_1=7-4=3, & \Delta_2=4-2=2 \end{array}.$$

Ponieważ $\Delta_1+\Delta_2=5$, więc zgodnie z podpunktem (c) algorytmu, mamy już wszystkie wartości delta. Można zauważyć, że kolejne potęgi macierzy A mają rząd 2.

Tworzymy diagram Ferrersa zgodnie z podpunktem (d), czyli w pierwszym wierszu są trzy kropki, a w drugim – dwie:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \end{array}.$$

Odczytując klatki według punktu 4. algorytmu, otrzymaliśmy trzy klatki, dwie postaci $K_2(0)$ oraz jedną $K_1(0)$

Ostatecznie mamy cztery klatki w tym dwie identyczne. Można je rozmieścić na 12 sposobów. Ponieważ jednak ustaliliśmy kolejność $\lambda_1=1$ oraz $\lambda_2=0$, a klatki odpowiadające tej samej wartości własnej

zapisuje się zazwyczaj w kolejności malejącej, otrzymujemy następującą postać Jordana:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix}.$$

Po prawej stronie została uwidoczniona struktura klatek.

5. Podsumowanie

Zwróćmy uwagę, że dla macierzy stopnia 2 wyznaczenie wielomianu charakterystycznego jest bardzo proste. Dla stopnia 3 możemy zastosować regułę Sarrusa, natomiast dla stopni 4 i większych obliczenia są bardziej wymagające. Z tego względu przykłady zawierały więcej zer, ponieważ rachunki realizowane ręcznie są już zdecydowanie bardziej pracochłonne. Oczywiście rozwinięcie Laplace'a pozwala zawsze znaleźć wielomian charakterystyczny, lecz wymagałoby to znacznej liczby operacji.

Ponadto, w przykładach większych rozmiarów pojawia się problem obliczenia pierwiastków. Dla stopni większych niż 4 nie ma ogólnych wzorów analitycznych. W takich przypadkach musimy przejść na obliczenia numeryczne oraz ewentualnie wdrożyć inne metody znajdowania postaci Jordana. Jednak przy obliczeniach przybliżonych praktycznie zawsze uzyskuje się różne pierwiastki, w konsekwencji postać Jordana staje się po prostu macierzą diagonalną.

Wiele zagadnień praktycznych, między innymi z ekonomii, teorii sterowania oraz medycyny, wymaga analizy i rozwiązania układów równań różniczkowych lub różnicowych. Do wykonania koniecznych w tych przypadkach obliczeń funkcji macierzowych można efektywnie użyć postaci Jordana. Oczywiście współcześnie takich rachunków nie wykonuje się zwykle ręcznie, lecz za pomocą odpowiednich programów komputerowych.

Podziękowania

Autor pragnie serdecznie podziękować Recenzentowi za cenne uwagi i sugestie, które przyczyniły się do podniesienia jakości artykułu.

Literatura

1. G. Banaszak, W. Gajda *Elementy algebry liniowej* część I. i II. WNT , Warszawa 2002.
2. A. I. Kostrykin, *Wstęp do algebry, podstawy algebry*, WNT, Warszawa 2004.
3. W. Lipski, *Kombinatoryka dla programistów*, WNT, Warszawa 2004.
4. M. Żabka, *Macierze podobne cz. I. Postać diagonalna macierzy*, MINUT 2026(8), s.171–189.