MINUT 2026 (8), s. 171–189
ISSN 2719-3063

Marek ŻABKA

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Macierze podobne cz. I. Postać diagonalna macierzy

Streszczenie. W artykule zdefiniowano relację podobieństwa macierzy. Dla niektórych macierzy możliwe jest wyznaczenie macierzy diagonalnej podobnej do danej. Celem artykułu jest przedstawienie warunków, które musi spełnić taka macierz. Teoretyczne rozważania zilustrowano licznymi przykładami obejmującymi różne przypadki i wymiary macierzy do stopnia 5 włącznie. Obliczenia są prowadzone dość szczegółowo, aby dokładnie zaprezentować ich technikę. W ostatnim rozdziale przedstawiono dwa przykłady zastosowania pojęcia postaci diagonalnej macierzy.
Słowa kluczowe: macierze podobne, macierz diagonalna, wartość własna.

1. Wstęp

Na wstępie zakładamy, że czytelnik zna podstawy rachunku macierzowego, a w szczególności pojęcia takie jak: mnożenie macierzy, pojęcie wyznacznika, rzędu macierzy oraz macierzową interpretację układów równań liniowych. W przeciwnym razie z zagadnieniami tymi można zapoznać się w literaturze, na przykład w [2] (rozdziały 2, 3, 5 i 6) lub [1] (rozdziały 0–6, 10 i 13). Przydatna jest również znajomość liczb zespolonych, choć pojawiają się one jawnie tylko w niektórych przykładach.

Przekształcenie afiniczne płaszczyzny to takie, które przekształca proste na proste oraz zachowuje równoległość prostych oraz stosunki długości odcinków, choć nie musi zachować kątów.

Można je zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2, \end{aligned}$$

gdzie obrazem punktu (x, y) jest punkt (x', y').

Często używa się zapisu macierzowego:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Autor korespondencyjny: M. Żabka (Marek.Zabka@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 24.08.2026.

Jeżeli $b_1 = b_2 = 0$, to nazywamy je przekształceniem liniowym. Ma ono postać:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Przykładami odwzorowań liniowych na płaszczyźnie są symetrie względem zadanej prostej. Przykładowo symetria względem osi OX ma postać:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ inaczej: } x' = x, y' = -y \tag{1}$$

Natomiast względem prostej $y = x$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ inaczej: } x' = y, y' = x \tag{2}$$

Z punktu widzenia geometrii te odwzorowania są identyczne, a ich zapis wynika ze zmiany układu współrzędnych. Niech

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zapisując przekształcenia (1) oraz (2) w postaci macierzowej odpowiednio jako

$$X' = AX \text{ oraz } X' = BX,$$

otrzymujemy zależność

$$CA = BC.$$

Macierz C jest odwracalna, ponieważ $C \cdot \frac{1}{2}C = I$, gdzie przez I oznaczamy macierz jednostkową:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Można powiedzieć, że macierze A i B przedstawiają to samo odwzorowanie w różnych układach współrzędnych. Są one zatem w pewnym sensie podobne. Zauważmy przy tym, że macierz A ma elementy wyłącznie na głównej przekątnej, czyli ma postać diagonalną, którą dokładnie zdefiniujemy w następnym rozdziale. Ogólnie rzecz biorąc, pojęcie podobieństwa pozwala rozróżniać odwzorowania niezależnie od wyboru układu współrzędnych. Dokładnie zdefiniujemy je w trzeciej sekcji.

W naszych rozważaniach macierze będą kwadratowe, o elementach w zbiorze liczb zespolonych, jednak większość przykładów ograniczy się do liczb rzeczywistych. Nie będziemy tego dodatkowo podkreślać. Czasem będziemy używali macierzy kolumnowych, czyli macierzy o jednej kolumnie. Każdą macierz A można zapisać w postaci układu kolumn: $A = [A_1, A_2, \ldots, A_n]$. Wówczas iloczyn macierzy można zapisać jako $BA = [BA_1, BA_2, \ldots, BA_n]$.

2. Macierz diagonalna

Definicja 1. *Macierz kwadratową $A = [a_{ij}]$ stopnia n, która spełnia warunek:*

$$i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0,$$

nazywamy macierzą diagonalną.

Mniej formalnie: macierz jest diagonalna, gdy poza główną przekątną wszystkie elementy są zerami, natomiast na samej przekątnej mogą być one dowolne.

Przykład 1. Przykłady macierzy diagonalnych stopnia 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta ostatnia jest macierzą zerową stopnia trzeciego.

Znaczenie macierzy diagonalnej jest związane z tym, że wiele operacji macierzowych ma dla nich ma szczególnie prostą postać, przykładowo:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_m b_m \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} a_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^m \end{bmatrix}.$$

3. Macierze podobne

Jeżeli czytelnik jest zapoznany z relacjami równoważności, może pominąć następny podrozdział.

3.1. Relacja równoważności

Definicja 2. *Relację $\equiv$ w zbiorze $\mathbb{T}$ nazywamy relacją równoważności, gdy spełnia ona następujące warunki:*

1) każdy element jest równoważny ze sobą:

$$\forall_{x \in \mathbb{T}}\, x \equiv x,$$

2) jeżeli element $x \in \mathbb{T}$ jest w relacji z elementem $y \in \mathbb{T}$ to jest również na odwrót:

$$\forall_{x,y\in\mathbb{T}}\ x \equiv y \Longrightarrow y \equiv x,$$

3) jeżeli element $x \in \mathbb{T}$ jest w relacji $\equiv$ z elementem $y \in \mathbb{T}$, który z kolei jest w relacji $\equiv$ z elementem $z \in \mathbb{T}$, to element x jest w relacji $\equiv$ z elementem z:

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{T}}\ x \equiv y \wedge y \equiv z \Longrightarrow x \equiv z.$$

Własność 1) nazywamy zwrotnością, własność 2) symetrią, a własność 3) przechodniością. Wobec tego relacja równoważności definiowana jest jako relacja jednocześnie zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Czytelnik może dojść do wniosku, że własność zwrotności wynika z pozostałych, lecz w tym celu należałoby dodatkowo założyć, że każdy element jest w relacji ze sobą lub z innym elementem.

Relacja równoważności $\equiv$ w zbiorze T pozwala na podział zbioru na podzbiory tak, że każde dwa elementy takiego podzbioru są w relacji $\equiv$, a elementy różnych podzbiorów – nie. Takie podzbiory nazywamy klasami abstrakcji.

3.2. Definicja podobieństwa macierzy

Zdefiniujemy wpierw macierze podobne, następnie zdefiniujemy postać diagonalną macierzy jako macierz diagonalną podobną do danej.

Definicja 3. *Macierze kwadratowe A oraz B tego samego stopnia nazywamy podobnymi, gdy istnieje taka nieosobliwa macierz C, że $CA = BC$. Fakt ten oznaczamy symbolem $A \sim B$.*

Macierz nieosobliwa to macierz kwadratowa odwracalna lub równoważnie macierz kwadratowa o wyznaczniku różnym od zera. Macierz C będziemy nazywać macierzą przejścia. Warunek $CA = BC$ dla macierzy C o wyznaczniku niezerowym można równoważnie zapisać inaczej: $A = C^{-1}BC$ lub $CAC^{-1} = B$. Relacja $\sim$ jest relacją równoważności, dzieli zbiór wszystkich macierzy kwadratowych na klasy abstrakcji.

Dla małych macierzy sprawdzenie podobieństwa nie jest trudne. Wystarczy rozwiązać układ równań dla współczynników macierzy przejścia wynikający z równania $CA = BC$. Zobaczymy to na następującym przykładzie.

Przykład 2. Sprawdzimy, czy macierze $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ są podobne. W tym celu zbudujemy odpowiednią macierz przejścia C. W rzeczywistości wyznaczymy wszystkie takie macierze.

Niech macierz $C = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$, z założeniem $\det(C) \neq 0$, czyli $xv - yu \neq 0$.

Zapiszmy warunek $CA = BC$ w postaci układu równań:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} 4x - 2y & 3x - y \\ 4u - 2v & 3u - v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 7x + u & 7y + v \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} 4x-2y &= 2x \\ 4u-2v &= 7x+u \\ 3x-y &= 2y \\ 3u-v &= 7y+v, \end{cases} \quad \text{a po uporządkowaniu} \quad \begin{cases} 2x-2y &= 0 \\ -7x+3u-2v &= 0 \\ 3x-3y &= 0 \\ -7y+3u-2v &= 0. \end{cases}$$

Układ ten zapiszemy w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Rozwiążemy układ za pomocą operacji elementarnych na wierszach.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \leftarrow w_1/2 \\ w_2 \leftarrow w_2/(-7) \\ w_3 \leftarrow w_3/3 \\ w_4 \leftarrow w_4/(-7) \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} w_2 \leftarrow w_2 - w_1 \\ w_3 \leftarrow w_3 - w_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} w_1 \leftarrow w_1 + w_2 \\ w_4 \leftarrow w_4 - w_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Rozwiązanie tego układu ma postać:

$$x = y = \frac{3}{7}u - \frac{2}{7}v,\ u, v \in \mathbb{C}.$$

Stąd:

$$C = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7}u - \frac{2}{7}v & \frac{3}{7}u - \frac{2}{7}v \\ u & v \end{bmatrix}.$$

Obliczmy wyznacznik macierzy C, uwzględniając równość $x = y$

$$\det(C) = xv - yu = xv - xu = x(v-u) = \left(\frac{3}{7}u - \frac{2}{7}v\right)(v-u).$$

Aby wyznacznik macierzy C był różny od zera, co za tym idzie, aby macierz C była odwracalna wystarczy przyjąć różne u oraz v takie, że $3u \neq 2v$. Np. biorąc $u = 9, v = 10$ mamy:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Czytelnik powinien sam sprawdzić, że $CA = BC$; ewentualnie równoważnie: $A = C^{-1}BC$ lub $CAC^{-1} = B$.

Zanotujmy proste twierdzenie, które w wielu wypadkach pozwala pominąć bardziej złożone obliczenia.

Twierdzenie 1. *Macierze podobne mają równe wyznaczniki, czyli*

$$A \sim B \Longrightarrow \det(A) = \det(B).$$

Dowód. Wychodzimy od własności wyznaczników: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ dla macierzy A, B tego samego stopnia.

$A \sim B$ z definicji oznacza istnienie macierzy C takiej, że $CA = BC$ oraz $\det(C) \neq 0$. Biorąc wyznacznik obu stron: $\det(CA) = \det(BC)$ i dalej $\det(C)\det(A) = \det(B)\det(C)$. Ponieważ $\det(C) \neq 0$, więc można obie strony równości podzielić przez $\det(C)$, co prowadzi do równości $\det(A) = \det(B)$. □

Przykład 3. Sprawdzimy, że macierze $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ nie są podobne.

Obliczmy wyznaczniki:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \qquad \det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Ponieważ wyznaczniki są różne, macierze nie są podobne.

Warunek, że macierze mają równe wyznaczniki nie jest wystarczający. Oto przykład dwóch macierzy diagonalnych, które nie są podobne do siebie.

Przykład 4. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Niech $C = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$.

Obliczmy CA oraz BC:

$$CA = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -3y \\ 2u & -3v \end{bmatrix}, \quad BC = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x & -2y \\ 3u & 3v \end{bmatrix}.$$

Równość $CA = BC$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = u = v = 0$. Więc macierze A i B nie są podobne, chociaż $\det(A) = 2 \cdot (-3) = -6$ oraz $\det(B) = (-2) \cdot 3 = -6 = \det(A)$.

4. Wartość własna macierzy

Definicja 4. *Liczbę λ nazywamy wartością własną macierzy A, gdy spełniony jest warunek $AX = \lambda X$ dla pewnej niezerowej macierzy kolumnowej X.*

Macierzą kolumnową nazywamy macierz składającą się z jednej kolumny i dowolnej liczby wierszy. Dodajmy tu, że często taką kolumnę nazywa się wektorem kolumnowym

Przykład 5. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

mamy

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

zatem liczba 2 jest wartością własną macierzy A.

Zwróćmy uwagę, że równość $AX = 2X$ możemy zapisać inaczej $AX = 2IX$, dalej $(A - 2I)X = \mathbf{0}$. Jednorodny układ równań $(A - 2I)X = \mathbf{0}$ ma niezerowe rozwiązanie, co oznacza, że $\det(A - 2I) = 0$.

Wyznaczymy wyznacznik macierzy $A - 2I$:

$$\det(A - 2I) = \begin{vmatrix} 0-2 & 8 & -2 \\ 1 & 2-2 & -1 \\ -3 & 8 & 1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 8 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 8 & -1 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

W kroku $(*)$ wykonujemy operację elementarną na wierszach. Od elementów pierwszego wiersza odejmujemy odpowiednio elementy drugiego i trzeciego wiersza.

Obserwację powyższą możemy uogólnić.

Definicja 5. *Wielomian $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ nazywamy wielomianem charakterystycznym.*

Przypomnijmy następujący lemat:

Lemat 1. *Niech macierz A będzie macierzą kwadratową. Równanie $AX = \mathbf{0}$ ma wyłącznie rozwiązanie zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy $\det(A)$ jest niezerowy, co jest równoważne z istnieniem macierzy odwrotnej A^{-1}.*

Lemat 2. *Liczba λ jest wartością własną wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(\lambda) = 0$.*

Dowód. Zapiszmy po kolei:

$$AX = \lambda X \iff AX = \lambda IX \iff AX - \lambda IX = \mathbf{0} \iff (A - \lambda I)X = \mathbf{0}.$$

Równanie

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$$

jest jednorodnym układem równań liniowych. Na mocy poprzedniego lematu układ ten posiada rozwiązanie niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

□

Zauważmy, że wielomian charakterystyczny ma stopień równy stopniowi macierzy. Dla macierzy stopnia drugiego wyznaczenie wartości własnych sprowadza się do rozwiązania równania kwadratowego.

Dla wielomianów trzeciego i czwartego stopnia znane są ogólne wzory na pierwiastki, chociaż ich postać jest dość złożona. Natomiast dla wielomianów stopnia piątego i wyższego nie istnieją ogólne wzory wyrażające pierwiastki za pomocą działań algebraicznych. W takim przypadku albo musimy posługiwać

się metodami numerycznymi, albo mamy do czynienia z przypadkiem szczególnym, dla którego pierwiastki można wyznaczyć dokładnie.

Liczba pierwiastków wielomianu nie jest większa od jego stopnia, a suma krotności wszystkich pierwiastków jest równa stopniowi wielomianu. Twierdzenie to obowiązuje pod warunkiem uwzględnienia także pierwiastków zespolonych.

Kolejny przykład pokazuje zastosowanie reguły Sarrusa, która jest często stosowana dla obliczania wyznaczników macierzy trzeciego stopnia.

Przykład 6. Zobaczymy, jakie są wszystkie wartości własne macierzy z przykładu 5.

Obliczmy wielomian charakterystyczny macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 8 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -3 & 8 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy $A - \lambda I$ obliczymy za pomocą schematu Sarrusa:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 8 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -3 & 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(1-\lambda) + 1\cdot 8\cdot(-2) + (-3)\cdot 8\cdot(-1) - (-2)\cdot(2-\lambda)\cdot(-3) +$$
$$-(-1)\cdot 8\cdot(-\lambda) - (1-\lambda)\cdot 8\cdot 1 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 =$$
$$= (-\lambda+2)(-\lambda-2)(-\lambda+3).$$

Stąd otrzymujemy trzy wartości własne: -2, 2 oraz 3.

Zobaczmy jeszcze przykład, gdzie liczba wartości własnych jest mniejsza niż stopień macierzy. Później znajdziemy podstać diagonalną tej macierzy. Mimo stopnia 4 nie trzeba stosować wzorów na pierwiastki czwartego stopnia.

Przykład 7. Niech będzie dana macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 5 \\ -6 & 2 & 1 & 5 \\ -7 & 1 & 2 & 8 \\ -5 & -3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Obliczmy wielomian charakterystyczny. Tu na początku nie można stosować schematu Sarrusa, więc konieczne jest zastosowanie przekształceń elementarnych. Są one dobrane tak, aby można było od razu odnaleźć jeden z pierwiastków wielomianu. Oczywiście w każdym innym, podobnym do tego zadania proces może przebiegać odmiennie.

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 & 1 & 5 \\ -6 & 2-\lambda & 1 & 5 \\ -7 & 1 & 2-\lambda & 8 \\ -5 & -3 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Od pierwszego wiersza odejmujemy drugi:

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3+\lambda & 0 & 0\\ -6 & 2-\lambda & 1 & 5\\ -7 & 1 & 2-\lambda & 8\\ -5 & -3 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Do drugiej kolumny dodajemy pierwszą:

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0\\ -6 & -4-\lambda & 1 & 5\\ -7 & -6 & 2-\lambda & 8\\ -5 & -8 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Stosujemy rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza:

$$\varphi(\lambda)=(3-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 5\\ -6 & 2-\lambda & 8\\ -8 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Tu już można zastosować schemat Sarrusa (tym razem z dopisaniem kolumn z prawej):

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda)=(3-\lambda)(-1)^{1+1}&\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 5\\ -6 & 2-\lambda & 8\\ -8 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix}\begin{matrix} -4-\lambda & 1\\ -6 & 2-\lambda\\ -8 & 3 \end{matrix}=\\ =(3-\lambda)\Big((-4-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda)&+1\cdot 8\cdot(-8)+5\cdot(-6)\cdot 3-5\cdot(2-\lambda)\cdot(-8)+\\ &-(-4-\lambda)\cdot 8\cdot 3-1\cdot(-6)\cdot(5-\lambda)\Big)=(3-\lambda)(-\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda+12).\end{aligned}$$

Tu ważna uwaga: w tej sytuacji nie należy automatycznie wymnażać wielomianów; ponieważ potrzebne są pierwiastki algebraiczne wielomianu, a ich wyznaczanie jest czynnością wręcz odwrotną do wymnażania czynników.

Przypominamy, że aby znaleźć pierwiastki całkowite wielomianu $-\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda+12$ mającego współczynniki całkowite, należy sprawdzić dzielniki wyrazu wolnego, czyli liczby: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$. Jednak tu można pominąć liczby ujemne, ponieważ wielomian przyjmuje dla nich wartości dodatnie. Pomijamy też liczby parzyste, wartość wielomianu jest dla nich nieparzysta, więc nie jest równa zero. Pozostają do sprawdzenia tylko $\pm1,\pm3$. Okazuje się, że liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu. Można podzielić wielomian $-\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda+12$ przez czynnik $(\lambda-3)$, a w wyniku uzyskujemy λ^2+4.

Często jest stosowana również metoda grupowania:

$$-\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda+12=-\lambda^2(-\lambda+3)-4(\lambda-3)=-(\lambda-3)(\lambda^2+4).$$

Pozostałe dwa pierwiastki wielomianu $\varphi(\lambda)$ uzyskujemy rozwiązując równanie $\lambda^2+4=0$. Tu mamy rozwiązania zespolone $\lambda=\pm2i$.

Podsumowując:

$$\varphi(\lambda)=-(\lambda-3)^2(\lambda-2i)(\lambda+2i),$$

więc macierz A ma trzy wartości własne: $3, -2i, 2i$. Zwróćmy uwagę, że liczba 3 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu.

Twierdzenie 2. *Macierze podobne mają identyczne wielomiany charakterystyczne. Symbolicznie:*

$$A \sim B \Rightarrow \varphi_A(\lambda) = \varphi_B(\lambda).$$

Twierdzenie odwrotne na ogół nie zachodzi.

Twierdzenie 3. *W macierzy trójkątnej wartościami własnymi są elementy głównej przekątnej.*

Dowód. Macierz górnotrójkątna ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ więc } \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Ponieważ wyznacznik macierzy trójkątnej jest iloczynem elementów na przekątnej, więc

$$\varphi(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda).$$

co dowodzi tezy.

Dla macierzy dolnotrójkątnej obliczenia są analogiczne. □

Przykład 8. Znajdziemy wartości własne macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ więc } A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że macierz A nie jest trójkątna, ma natomiast budowę:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}, \text{ gdzie } B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ oraz } D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik takiej macierzy $\det(A) = \det(B) \cdot \det(D)$, a macierze B oraz D są trójkątne. Podobną budowę ma $A - \lambda I$, więc ostatecznie

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I) \det(D - \lambda I) = \varphi_B(\lambda)\varphi_D(\lambda) = (2-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda)(3-\lambda).$$

W konsekwencji macierz A ma cztery wartości własne: 2, 3, 6 oraz 7.

Przykład 9. Znajdziemy wartości własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zdarza się, że student poznający dopiero problematykę wartości własnych postanawia przestawić dwa ostatnie wiersze lub kolumny, aby otrzymać postać trójkątną. Podkreślmy, że jest to poważny błąd.

Obliczmy wielomian charakterystyczny tej macierzy:

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6).$$

Pierwiastkami wielomianu $\varphi(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6)$ są liczby 1 oraz $\pm\sqrt{6}$, które są wszystkimi wartościami własnymi macierzy A.

5. Postać diagonalna macierzy

Naszym celem jest znalezienie macierzy diagonalnej podobnej do danej macierzy (zgodnie z definicją 3). Podkreślmy, że nie zawsze jest to możliwe. Ogólnie zawsze można znaleźć uogólnienie postaci diagonalnej, nazywane postacią Jordana, jednak zagadnienie to będzie przedmiotem osobnego artykułu.

Definicja 6. *Macierz diagonalną podobną do danej macierzy A nazywamy postacią diagonalną tej macierzy.*

Definicja 7. *Jeżeli istnieje postać diagonalna macierzy, to macierz jest nazywana diagonalizowalną.*

Twierdzenie 4. *Macierz A stopnia n jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej wartości własnej λ o krotności algebraicznej k rząd macierzy $A - \lambda I$ jest równy $n - k$. Oznaczmy przez D macierz diagonalną podobną do macierzy A. Wtedy jej główna przekątna zawiera wartości własne macierzy A, każdą zgodnie z jej krotnością.*

Zauważmy że dla zbudowania postaci diagonalnej D macierzy A nie jest konieczne wyznaczenie macierzy przejścia C, która spełnia warunek podobieństwa macierzy, czyli $D = C^{-1}AC$. Jednak w wielu zastosowaniach praktycznych jest ona niezbędna.

Twierdzenie 5. *Niech macierz A ma postać diagonalną $D = [d_{ij}]$ oraz C będzie macierzą przejścia, dla której $D = C^{-1}AC$. Wtedy kolumny macierzy C są wyznaczone przez warunek $AC_i = d_{ii}C_i$. Dodatkowo dla wielokrotnej wartości własnej należy wybrać niezależne rozwiązania odpowiedniego układu równań.*

Wspomniany w twierdzeniu wybór niezależnych rozwiązań został pokazany w przykładzie 14.

Uwaga 1. Postać diagonalna jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do kolejności wartości własnych.

Powyższe stwierdzenie oznacza, że w przypadku n różnych wartości własnych otrzymujemy $n!$ różnych postaci macierzy, jednak każde dwie z nich różnią się wyłącznie kolejnością elementów na głównej przekątnej.

Ponieważ ogólnie wartości własne są liczbami zespolonymi, a w zbiorze tych liczb nie jest określona sensowna relacja nierówności, więc trudno wyróżnić jedną z postaci diagonalnych. Jednak, w przypadku gdy wszystkie wartości własne są liczbami rzeczywistymi, można je na głównej przekątnej ustawić w kolejności rosnącej.

Wróćmy do twierdzenia 2. Zauważyliśmy w nim, że macierze podobne mają ten sam wielomian charakterystyczny.

Twierdzenie 6. *Jeżeli macierze A i B stopnia n mają ten sam wielomian charakterystyczny o n parami różnych pierwiastkach algebraicznych, to są podobne.*

Dowód. Ponieważ wielomian charakterystyczny macierzy A oraz B ma parami różne pierwiastki, to obie macierze A oraz B są podobne do wspólnej postaci diagonalnej D. Ponieważ relacja podobieństwa jest przechodnia, dowodzi to twierdzenia. □

Uwaga 2. Może się zdarzyć, że dwie macierze, które nie są podobne mają ten sam wielomian charakterystyczny o pierwiastkach wielokrotnych. W takiej sytuacji co najmniej jedna z nich z nich nie ma postaci diagonalnej.

Przykład 10. We wstępie przedstawiono dwie macierze symetrii względem prostej: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Zauważmy, że macierz B ma postać diagonalną. Wielomian charakterystyczny dla każdej z tych macierzy ma postać $\varphi(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda)$

Macierz $C = [c_{ij}]$ ma dwie kolumny. Aby je wyznaczyć rozwiązujemy równania dla każdej z kolumn, korzystając odpowiednio z kolejnych wartości własnych:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix}.$$

Ogólne rozwiązanie daje macierz

$$C = \begin{bmatrix} t & s \\ t & -s \end{bmatrix}, \quad t, s \neq 0.$$

Wrócimy teraz do przykładu 2. Zamiast rozwiązywać układ 4 równań, sprawdzimy, że obie macierze mają tę samą postać diagonalną.

Przykład 11. W przykładzie 2 sprawdzaliśmy podobieństwo $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$.

Wyznaczmy postać diagonalną macierzy $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. W tym celu obliczymy wielomian charakterystyczny:

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) - 3 \cdot (-2) = \\ = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1).$$

Ponieważ mamy dwie różne wartości własne, macierz A ma postać diagonalną $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Macierz B jest trójkątna, więc ma te same wartości własne co macierz A i tę samą postać diagonalną. Mamy więc $A \sim B$.

Przykład 12. W przykładzie 6 obliczyliśmy wszystkie wartości własne macierzy A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda = -2 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = 3.$$

Stąd mamy postać diagonalną, np.

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zapis postaci diagonalnej zależy od przyjętej kolejności wartości własnych. Zbudujemy teraz macierz przejścia C taką, że $AC = CD$.

Wybierzmy kolejne kolumny macierzy C jako rozwiązania odpowiednich równań. Czytelnik powinien samodzielnie rozwiązać poszczególne układy.

Zgodnie z definicją wartości własnej układ równań $(A - (-2)I)X = \mathbf{0}$ ma rozwiązania niezerowe, jedno z nich będzie kolumną C_1.

$$\begin{bmatrix} 0+2 & 8 & -2 \\ 1 & 2+2 & -1 \\ -3 & 8 & 1+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{C}, \text{ więc np. } C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Podobnie C_2 to jedno z niezerowych rozwiązań układu $(A - 2I)X = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} 0-2 & 8 & -2 \\ 1 & 2-2 & -1 \\ -3 & 8 & 1-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{C}, \text{ więc np. } C_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

C_3 to jedno z niezerowych rozwiązań układu $(A - 3I)X = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} 0-3 & 8 & -2 \\ 1 & 2-3 & -1 \\ -3 & 8 & 1-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{C}, \text{ więc np. } C_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz C składa się z wyliczonych kolumn:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \det(C) = 1+2+0-2-0-2 = -1.$$

Zauważmy, że macierz przejścia C nie jest wyznaczona jednoznacznie. Wybierając inne rozwiązania powyższych równań, można uzyskać na przykład macierz

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \det(\hat{C}) = 6.$$

Oczywiście, gdyby przyjąć inną kolejność wartości własnych, uzyskamy inną macierz diagonalną i inną macierz przejścia. Na przykład, jeżeli przyjmiemy

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

to odpowiadająca jej macierz przejścia może mieć postać, która jak powyżej nie jest wyznaczona jednoznacznie:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład 13. Pokażemy podobieństwo macierzy, korzystając tylko z identyczności wielomianów charakterystycznych oraz braku pierwiastków wielokrotnych. Ponieważ będziemy tu rozważać macierze stopnia 5, więc wielomiany będą piątego stopnia. Wykażemy, że wyznaczony wspólny wielomian charakterystyczny nie posiada pierwiastków wielokrotnych, przy czym samo jawne wyznaczenie tych pierwiastków nie będzie konieczne[1].

Gdyby zaszła taka potrzeba, macierz przejścia C można wyznaczyć bezpośrednio, tak jak w przykładzie 2. Rachunki wymagają jednak rozwiązania układu 25 równań.

Dane są dwie macierze:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

[1] Jeden z pierwiastków wielomianu charakterystycznego jest niewymierny, a pozostałe cztery są pierwiastkami nierzeczywistymi o niewymiernych częściach rzeczywistych i urojonych.

Wyznaczymy wielomiany charakterystyczne dla obu macierzy.

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-3-\lambda)(-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3-\lambda)(-\lambda)(-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-\lambda)^4 + 1 = -\lambda^5 + 3\lambda^4 + 1.$$

Dla macierzy B, wykonując analogiczne rachunki, uzyskamy identyczny wielomian charakterystyczny.

Sprawdzimy, czy istnieją pierwiastki wielokrotne wielomianu $\varphi(\lambda)$. W tym celu policzymy pochodną

$$\varphi'(\lambda) = -5\lambda^4 + 12\lambda^3.$$

Ewentualny pierwiastek wielokrotny $\varphi(\lambda)$ musi być również pierwiastkiem pochodnej[2]. Pochodna ma dwa pierwiastki: $\lambda_1 = 0$ oraz $\lambda_2 = \frac{12}{5}$, które nie są pierwiastkami samego wielomianu $\varphi(\lambda)$. Wnioskujemy, że obie macierze mają 5 parami różnych wartości własnych, czyli macierze A oraz B mają te same postacie diagonalne.

Znajdziemy teraz postać diagonalną macierzy z wielokrotnymi wartościami własnymi. Zbudujemy również macierz przejścia C.

Przykład 14. Niech będzie dana macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -2 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ -6 & -6 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Pokażemy obliczenia $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ trochę dokładniej, ponieważ na pierwszy rzut oka wydaje się to trudne. Wykorzystujemy operacje elementarne na wierszach, aby otrzymać zera oraz możliwość

[2] Istotnie, niech λ_0 będzie pierwiastkiem co najmniej dwukrotnym wielomianu $\varphi(\lambda)$. Wielomian ten można wówczas zapisać w postaci

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2\psi(\lambda).$$

Różniczkując to wyrażenie względem λ i stosując wzór na pochodną iloczynu, otrzymujemy:

$$\varphi'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\Big((\lambda-\lambda_0)^2\psi(\lambda)\Big) = 2(\lambda-\lambda_0)\psi(\lambda) + (\lambda-\lambda_0)^2\psi'(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)\Big(2\psi(\lambda) + (\lambda-\lambda_0)\psi'(\lambda)\Big).$$

Postać pochodnej pokazuje, że liczba λ_0 jest również pierwiastkiem pochodnej.

wyłączania wspólnego czynnika przed wyznacznik.

$$\varphi(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3 & -7 & -2\\ 5 & 3-\lambda & 5 & 5\\ 3 & 3 & 1-\lambda & 3\\ -6 & -6 & 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{matrix}w_3\leftarrow w_3-w_1\\ w_4\leftarrow w_4+2w_1\end{matrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3 & -7 & -2\\ 5 & 3-\lambda & 5 & 5\\ 2+\lambda & 0 & 8-\lambda & 5\\ -4-2\lambda & 0 & -10 & -7-\lambda\end{vmatrix}=\begin{matrix}w_1\leftarrow w_3+w_3\\ w_2\leftarrow w_2-w_3\\ w_4\leftarrow w_4+2w_3\end{matrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}3 & 3 & 1-\lambda & 3\\ 3-\lambda & 3-\lambda & \lambda-3 & 0\\ 2+\lambda & 0 & 8-\lambda & 5\\ 0 & 0 & 6-2\lambda & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2\begin{vmatrix}3 & 3 & 1-\lambda & 3\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 2+\lambda & 0 & 8-\lambda & 5\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{matrix}w_1\leftarrow w_1-3w_2\\ w_3\leftarrow w_3-5w_4\end{matrix}=$$

$$=(3-\lambda)^2\begin{vmatrix}0 & 0 & 4-\lambda & 3\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 2+\lambda & 0 & -2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2\begin{vmatrix}0 & 4-\lambda & 3\\ 2+\lambda & -2-\lambda & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-(3-\lambda)^2(2+\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(3-\lambda)^2(2+\lambda)(4-\lambda-6)=(3-\lambda)^2(-2-\lambda)^2.$$

Mamy więc dwie wartości własne $\lambda_1=3$ oraz $\lambda_2=-2$. Według twierdzenia 4 dla diagonalizowalności konieczne jest, aby rzędy $A-3I$ oraz $A+2I$ były równe 2. Obliczmy je.

Dla wartości 3:

$$\operatorname{rz}(A-3I)=\operatorname{rz}\begin{bmatrix}-2 & 3 & -7 & -2\\ 5 & 0 & 5 & 5\\ 3 & 3 & -2 & 3\\ -6 & -6 & 4 & -6\end{bmatrix}=\begin{matrix}w_3\leftarrow w_3-w_1\\ w_4\leftarrow w_4+2w_1\end{matrix}=\operatorname{rz}\begin{bmatrix}-2 & 3 & -7 & -2\\ 5 & 0 & 5 & 5\\ 5 & 0 & 5 & 5\\ -10 & 0 & -10 & -10\end{bmatrix}=2.$$

Dla wartości -2:

$$\operatorname{rz}(A+2I)=\operatorname{rz}\begin{bmatrix}3 & 3 & -7 & -2\\ 5 & 5 & 5 & 5\\ 3 & 3 & 3 & 3\\ -6 & -6 & 4 & -1\end{bmatrix}=\begin{matrix}w_1\leftarrow w_1-\frac{1}{5}w_2\\ w_2\leftarrow \frac{1}{5}w_2\\ w_3\leftarrow w_3-\frac{3}{5}w_2\\ w_4\leftarrow w_4+\frac{6}{5}w_2\end{matrix}=\operatorname{rz}\begin{bmatrix}0 & 0 & -10 & -5\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 5\end{bmatrix}=2.$$

Warunki z twierdzenia mają postać $\operatorname{rz}(A-3I)=n-k_1$ oraz $\operatorname{rz}(A+2I)=n-k_2$, gdzie $n=4$ oznacza stopień macierzy A, a $k_1=k_2=2$ to krotności algebraiczne odpowiednich wartości własnych. Postać diagonalna, z dokładnością do kolejności elementów na głównej przekątnej, wygląda następująco:

$$D=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

Obliczymy teraz macierz przejścia C. W tym celu musimy rozwiązać układy równań: $(A-3I)X=\mathbf{0}$ oraz $(A+2I)X=\mathbf{0}$.

W trakcie rozwiązywania równań wykonujemy te same operacje na wierszach, które zostały wykorzystane do obliczeń rzędu oraz kilka uzupełniających.

Dla układu $(A-3I)X=\mathbf{0}$ rozwiązanie ogólne ma postać:

$$X=\begin{bmatrix} -t-s \\ \frac{5}{3}t \\ t \\ s \end{bmatrix}, \text{ gdzie } t,s\in\mathbb{C}.$$

Biorąc rozwiązania szczególne niezależne od siebie, uzyskujemy możliwe wartości C_1 oraz C_2:

$$C_1=\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dla układu $(A+2I)X=\mathbf{0}$ rozwiązanie ogólne ma postać:

$$X=\begin{bmatrix} -t-\frac{1}{2}s \\ t \\ -\frac{1}{2}s \\ s \end{bmatrix}, \text{ gdzie } t,s\in\mathbb{C}.$$

Biorąc rozwiązania szczególne niezależne od siebie, uzyskujemy możliwe wartości C_1 oraz C_2:

$$C_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_4=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zatem macierz przejścia C i macierz do niej odwrotna to

$$C=\begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -6 & -6 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & -5 & -5 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Czytelnik może sprawdzić, że $C^{-1}AC=D$.

6. Przykłady wykorzystania postaci diagonalnej

Przykład 15. Znajdziemy wzór na potęgę macierzy A z przykładu 6. W przykładzie 12 otrzymaliśmy macierz przejścia C oraz postać diagonalną. Dodatkowo czytelnik może sprawdzić postać macierzy od-

wrotnej do macierzy C.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\quad C^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Potęga macierzy diagonalnej jest łatwa do wyliczenia:

$$D^n=\begin{bmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$D=C^{-1}AC,$$

więc

$$A=CDC^{-1}$$

i dalej:

$$A^n=\left(CDC^{-1}\right)^n=\left(CDC^{-1}\right)\left(CDC^{-1}\right)\ldots\left(CDC^{-1}\right)=$$
$$=CD\left(C^{-1}C\right)D\ldots\left(C^{-1}C\right)DC^{-1}=CDD\ldots DC^{-1}=CD^nC^{-1}.$$

Możemy wykonać stosowne wyliczenia.

$$A^n=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-2)^n & (-2)^{n+1} & 0 \\ -2^n & 2^n & 2^n \\ 3^n & 0 & -3^n \end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} (-2)^n-2^{n+1}+2\cdot 3^n & (-2)^{n+1}+2^{n+1} & 2^{n+1}-2\cdot 3^n \\ 3^n-2^n & 2^n & 2^n-3^n \\ (-2)^n-2^{n+1}+3^n & (-2)^{n+1}+2^{n+1} & 2^{n+1}-3^n \end{bmatrix}.$$

Przykład 16. Do tego przykładu potrzebna będzie pewna znajomość geometrii w przestrzeni trójwymiarowej.

Odwzorowanie liniowe w tej przestrzeni można zapisać w postaci $Y=AX$. Jest ono obrotem wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A spełnia następujące dwa warunki:

$$AA^T=I \text{ oraz } \det A=1.$$

Aby wyznaczyć oś obrotu, zauważmy, że każdy wektor v leżący na tej osi pozostaje nieruchomy, czyli spełnia równanie $Av=v$. Oznacza to, że liczba 1 jest wartością własną macierzy A, a wektor v jest odpowiadającym jej wektorem własnym.

Zobaczmy to na przykładzie. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ wtedy } A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ przy czym } AA^T = I \text{ oraz } \det(A) = 1.$$

Wyznaczymy wielomian charakterystyczny:

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 1 - \lambda^3 = (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1) = \\ = (1-\lambda)\left(\tfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} - \lambda\right)\left(\tfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} - \lambda\right).$$

Stąd postać diagonalna macierzy A ma następującą budowę:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix}.$$

Interesuje nas przede wszystkim kolumna C_1 macierzy przejścia, która ma własność $AC_1 = C_1$. Rozwiązujemy odpowiednie równanie:

$$AC_1 - C_1 = \mathbf{0}$$

$$(A - I)C_1 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie rzeczywiste ma postać:

$$\begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Mamy więc oś obrotu w kierunku wektora $[-1, 1, 1]$.

Ponieważ wszystkie wartości własne są tu pierwiastkami zespolonymi z liczby 1, więc

$$A^3 = (CJC^{-1})^3 = CJ^3C^{-1} = CIC^{-1} = I.$$

To oznacza, że trzykrotny obrót jest tożsamością, stąd mamy obrót o $\frac{2\pi}{3}$ lub inaczej o $120°$.

W tych wyliczeniach nie uwzględniono kierunku obrotu. Aby go jednoznacznie określić, należy wyróżnić jeden ze zwrotów osi obrotu, ale tę kwestię zostawiamy do przemyślenia czytelnikowi.

Literatura

1. G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej* część I i II, WNT, Warszawa 2002.
2. A.I. Kostrykin, *Wstęp do algebry. Podstawy algebry*, WNT, Warszawa 2004.