MINUT 2026 (8), s. 190–205
ISSN 2719-3063

Elwira MATEJA-LOSA

Katedra Zastosowań Matematyki i Metod Sztucznej Inteligencji, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Całkowanie funkcji wymiernych — teoria i przykłady

Streszczenie. Celem artykułu jest przedstawienie metod całkowania funkcji wymiernych oraz zilustrowania ich przykładami o różnym stopniu trudności. W pierwszej części przypomniano definicję funkcji wymiernej, podział na funkcje wymierne właściwe i niewłaściwe oraz metodę przedstawienia funkcji wymiernej niewłaściwej jako sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej. Następnie omówiono rozkład na ułamki proste wraz z algorytmem wyznaczania współczynników. Główną część stanowią wzory i metody całkowania ułamków prostych oraz funkcji wymiernych. Każde zagadnienie zilustrowano przykładami. Artykuł pokazuje, że całkowanie funkcji wymiernych jest procesem w pełni algorytmicznym, a opanowanie przedstawionych technik stanowi podstawę dalszej nauki analizy matematycznej.
Artykuł adresowany jest przede wszystkim do studentów kierunków ścisłych i technicznych, którzy chcą usystematyzować i pogłębić swoją wiedzę z zakresu rachunku całkowego.
Słowa kluczowe: całka nieoznaczona, funkcje wymierne, ułamki proste, rozkład na ułamki proste, dzielenie wielomianów, logarytm naturalny, arcus tangens.

Wstęp

Całkowanie funkcji wymiernych stanowi jeden z fundamentalnych działów rachunku całkowego, o szerokim zastosowaniu zarówno w matematyce, jak i w naukach stosowanych.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie przystępnego opracowania dotyczącego całkowania funkcji wymiernych. W kolejnych rozdziałach przypomnimy podstawowe definicje i własności funkcji wymiernych ze szczególnym uwzględnieniem podziału na funkcje wymierne właściwe i niewłaściwe. Następnie omówimy kluczowe narzędzie, jakim jest rozkład funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste.

W głównej części pracy zaprezentujemy całkowanie ułamków prostych oraz całkowanie funkcji wymiernych. Każde z omawianych zagadnień zilustrujemy przykładami obliczeniowymi, przeprowadzonymi „krok po kroku”, co pozwoli czytelnikowi nie tylko zrozumieć teorię, ale również nabyć praktyczne umiejętności.

Autor korespondencyjny: E.Mateja-Losa (e.mateja@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 13.08.2026 r.

1. Funkcja wymierna

W niniejszym rozdziale przypomnimy czytelnikowi podstawowe wiadomości dotyczące funkcji wymiernych, które stanowią niezbędne zaplecze teoretyczne w dalszej części artykułu.

Definicja 1. *Funkcję wymierną definiujemy jako iloraz dwóch wielomianów.*

Funkcję wymierną można zapisać w postaci

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0},$$

gdzie $a_n \neq 0, b_m \neq 0$. Dziedziną funkcji wymiernej f jest zbiór $D_f = \mathbb{R}\backslash\{x_1, x_2, \ldots x_k\}$, gdzie $x_1, x_2, \ldots x_k$, $k \leq m$ są wszystkimi rzeczywistymi pierwiastkami wielomianu występującego w mianowniku.

Przykład 1. Rozważmy funkcję

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-4}.$$

Jest to funkcja wymierna, ponieważ można ją zapisać w postaci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x) = 2x + 3$ oraz $Q(x) = x^2 - 4$. Miejscami zerowymi mianownika są liczby 2 oraz -2, zatem $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Definicja 2. *Funkcję wymierną nazywamy funkcją wymierną właściwą, jeśli stopień wielomianu w liczniku jest mniejszy niż stopień wielomianu w mianowniku.*

Przykład 2. Funkcjami wymiernymi właściwymi są np. funkcje:

$$f_1(x) = \frac{5}{x-2}, \quad f_2(x) = \frac{x^2+3}{x^3-2x+5}, \quad f_3(x) = \frac{x^3+4x-3}{2x^5-3x^3-x+5}, \quad f_4(x) = \frac{x-1}{x^4-3x^2+2}.$$

Definicja 3. *Funkcję wymierną nazywamy funkcją wymierną niewłaściwą, jeśli stopień wielomianu w liczniku jest większy lub równy stopniowi wielomianu w mianowniku.*

Przykład 3. Funkcjami wymiernymi niewłaściwymi są np. funkcje:

$$g_1(x) = \frac{x^2}{x-1}, \quad g_2(x) = \frac{5x^4+2x-1}{x^3-2}, \quad g_3(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad g_4(x) = \frac{x^7+2x^3-1}{3x^4-x^2}.$$

Każdą funkcję wymierną niewłaściwą można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej. Przekształcenie to wykonuje się poprzez dzielenie licznika przez mianownik. Jest to operacja analogiczna do dobrze znanego dzielenia pisemnego liczb całkowitych z resztą. Wykorzystujemy przy tym następujące twierdzenie (zob. [1], s. 80).

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych wielomianów $P(x)$ i $Q(x)$ (przy czym $Q(x) \not\equiv 0$), istnieją dokładnie dwa wielomiany $W(x)$ oraz $R(x)$, takie że*

$$P(x) = W(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

gdzie $R(x)$ jest wielomianem zerowym lub $\deg(R) < \deg(Q)$.

Dzieląc obie strony powyższej równości przez $Q(x)$, otrzymujemy pożądaną postać

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

gdzie $W(x)$ jest wynikiem dzielenia (wielomianem), natomiast $R(x)$ jest resztą, przy czym $\deg(R) < \deg(Q)$. Zwróćmy uwagę, że funkcja $g(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$ jest już funkcją wymierną właściwą.

Przykład 4. Przedstawmy funkcję wymierną niewłaściwą $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 4}{x^2 - 1}$ w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Zauważmy, że wielomian w liczniku jest stopnia 3, natomiast wielomian w mianowniku stopnia 2. Poniżej, dla przypomnienia, przedstawiono dzielenie licznika przez mianownik[1].

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl}
 & x & + & 3 & & & & & & (wynik) \\
\hline
(& x^3 & + & 3x^2 & + & 3x & + & 4 &) : & (x^2-1) \\
- & x^3 & & & + & x & & & & \\
\cline{2-8}
 & & & 3x^2 & + & 4x & + & 4 & & \\
 & & - & 3x^2 & & & + & 3 & & \\
\cline{3-8}
 & & & & & 4x & + & 7 & & (reszta)
\end{array}$$

Otrzymujemy $W(x) = x + 3$, $R(x) = 4x + 7$. Zatem funkcja f ma postać

$$f(x) = x + 3 + \frac{4x + 7}{x^2 - 1}.$$

Wiemy już, czym jest funkcja wymierna, potrafimy odróżnić funkcję wymierną właściwą od funkcji wymiernej niewłaściwej, a także zapisać funkcję wymierną niewłaściwą jako sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej. Kolejnym etapem jest rozkład na ułamki proste.

Zauważmy, że przy dodawaniu wyrażeń wymiernych sprowadzamy je do wspólnego mianownika, otrzymując jeden (często skomplikowany) ułamek. Teraz postąpimy odwrotnie: spróbujemy dany ułamek zapisać jako sumę kilku prostszych ułamków. Okazuje się, że w tym celu wystarczają dwa typy ułamków, zwanych ułamkami prostymi.

Definicja 4. *Ułamkami prostymi* ***I rodzaju*** *nazywamy każde wyrażenie wymierne postaci* $\dfrac{A}{(ax+b)^n}$, *gdzie* $A, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.
Ułamkami prostymi ***II rodzaju*** *nazywamy każde wyrażenie wymierne postaci* $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$, *gdzie* $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Przykład 5. Ułamki proste I rodzaju to np.:

$$\frac{3}{3x-2}, \quad \frac{-1}{(x+5)^3}, \quad \frac{4}{(2x-3)^4}, \quad \frac{3}{x^2}, \quad \frac{1}{x^9}.$$

[1] Algorytm dzielenia pisemnego wielomianów wraz z przykładami omówiono szczegółowo w [3], s. 90–97.

Ułamki proste II rodzaju to np.:

$$\frac{2x-1}{x^2+x+5}, \quad \frac{5}{(x^2+2)^3}, \quad \frac{x+5}{(x^2+3)^4}.$$

Następujące wyrażenia algebraiczne nie są ułamkami prostymi:

$$\frac{3x+1}{x^2}, \quad \frac{-5}{x^2-3x}, \quad \frac{3x-1}{x^2+3x-6}, \quad \frac{x^2+x-7}{x^3+1}, \quad \frac{x}{x^4+11}.$$

Rozkład na ułamki proste to metoda algebraiczna, która ma fundamentalne znaczenie w całkowaniu funkcji wymiernych. Korzysta się w niej z poniższego twierdzenia (zob. [1], s. 98).

Twierdzenie 2. *Każda funkcja wymierna właściwa, która nie jest ułamkiem prostym, daje się przedstawić w postaci sumy skończonej liczby ułamków prostych.*

Jeżeli $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ jest funkcją wymierną spełniającą założenia twierdzenia 2, to możemy ją rozłożyć na ułamki proste według następującego schematu:

Krok 1. Rozkład mianownika — zapisujemy mianownik $Q(x)$ w postaci iloczynu czynników nierozkładalnych[2].

Krok 2. Zapisujemy ogólną postać rozkładu funkcji f na ułamki proste, przy czym:

- jeżeli w mianowniku jest czynnik postaci $(ax+b)^n$, to w rozkładzie odpowiada mu suma n ułamków prostych I rodzaju

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}, \tag{1}$$

  gdzie A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, są pewnymi stałymi (na razie nieznanymi);

- jeżeli w mianowniku jest czynnik postaci $(ax^2+bx+c)^m$, to w rozkładzie odpowiada mu suma m ułamków prostych II rodzaju

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx+C_m}{(ax^2+bx+c)^m}; \tag{2}$$

  gdzie B_i oraz C_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, są pewnymi stałymi (na razie nieznanymi).

Krok 3. Znajdujemy nieznane stałe występujące w licznikach (można to zrobić kilkoma metodami, dwie z nich wyjaśnimy na dalszych przykładach).

Przykład 6. Rozłóżmy na ułamki proste funkcję wymierną właściwą $f(x) = \dfrac{4x+7}{x^2-1}$.

Krok 1. Przedstawiamy wielomian z mianownika w postaci iloczynu czynników nierozkładalnych:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

[2] Czynnikami nierozkładalnymi są funkcje liniowe oraz funkcje kwadratowe o ujemnych wyróżnikach. Czynniki te mogą występować wielokrotnie.

Krok 2. Zapisujemy ogólną postać rozkładu

$$\frac{4x+7}{(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}. \tag{3}$$

Krok 3. Wyznaczamy współczynniki A_1 i A_2. W tym celu najpierw mnożymy obie strony (3) przez mianownik ułamka z lewej strony i mamy

$$4x+7 = A_1(x+1) + A_2(x-1).$$

Wstawiamy $x = 1$. Otrzymujemy $11 = 2A_1$, czyli $A_1 = \frac{11}{2}$.

Wstawiamy $x = -1$. Otrzymujemy $3 = -2A_2$, czyli $A_2 = -\frac{3}{2}$.

Wstawiamy obliczone wartości A_1 i A_2 do (3):

$$\frac{4x+7}{(x^2-1)} = \frac{\frac{11}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+1}.$$

Zatem

$$f(x) = \frac{\frac{11}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+1}.$$

Przykład 7. Rozłóżmy na ułamki proste funkcję wymierną właściwą $f(x) = \dfrac{6x+2}{x^4-x^3+x^2-x}$.

Krok 1. Przedstawiamy wielomian z mianownika w postaci iloczynu czynników nierozkładalnych:

$$x^4-x^3+x^2-x = x^2(x^2+1) - x(x^2+1) = (x^2-x)(x^2+1) = x(x-1)(x^2+1).$$

Krok 2. Zapisujemy ogólną postać rozkładu

$$\frac{6x+2}{x(x-1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}. \tag{4}$$

Krok 3. Wyznaczamy nieznane współczynniki A_1, A_2, B, C. W tym celu mnożymy obustronnie (4) przez $x(x-1)(x^2+1)$ i mamy

$$6x+2 = A_1(x-1)(x^2+1) + A_2x(x^2+1) + (Bx+C)x(x-1).$$

Po wymnożeniu i uporządkowaniu otrzymujemy

$$6x+2 = A_1x^3 + A_1x - A_1x^2 - A_1 + A_2x^3 + A_2x + Bx^3 - Bx^2 + Cx^2 - Cx,$$

$$6x+2 = (A_1+A_2+B)x^3 + (-A_1-B+C)x^2 + (A_1+A_2-C)x - A_1. \tag{5}$$

Dwa wielomiany są równe, gdy mają jednakowe współczynniki przy odpowiadających sobie potęgach zmiennej x.

- przy x^3 mamy z lewej strony równania (5) współczynnik równy 0, z prawej A_1+A_2+B, zatem $0 = A_1+A_2+B$;
- przy x^2 mamy z lewej współczynnik równy 0, z prawej $-A_1-B+C$, zatem $0 = -A_1-B+C$;

- przy x mamy z lewej współczynnik równy 6, z prawej $A_1 + A_2 - C$, zatem $6 = A_1 + A_2 - C$;
- dla wyrazu wolnego (x^0) mamy z lewej współczynnik równy 2, z prawej $-A_1$, zatem $2 = -A_1$ stąd $A_1 = -2$.

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 + B \\ 0 = -A_1 - B + C \\ 6 = A_1 + A_2 - C \\ A_1 = -2. \end{cases} \tag{6}$$

Po rozwiązaniu układu (6) otrzymujemy $A_1 = -2$, $A_2 = 4$, $B = -2$, $C = -4$. Zatem

$$\frac{6x+2}{x(x-1)(x^2+1)} = \frac{-2}{x} + \frac{4}{x-1} - \frac{2x+4}{x^2+1},$$

czyli

$$f(x) = \frac{-2}{x} + \frac{4}{x-1} - \frac{2x+4}{x^2+1}.$$

Przykład 8. Funkcja $f(x) = \dfrac{x^3-6}{x-2}$ jest funkcją wymierną niewłaściwą. Przedstawmy ją w postaci sumy wielomianu i ułamka prostego.
Wykonujemy dzielenie wielomianu z licznika przez wielomian z mianownika, jak w przykładzie 4. Otrzymujemy $W(x) = x^2 + 2x + 4$ i $R(x) = 2$. Funkcję f możemy zatem zapisać jako:

$$f(x) = x^2 + 2x + 4 + \frac{2}{x-2}.$$

Stwierdzamy, że $\dfrac{2}{x-2}$ jest ułamkiem prostym I rodzaju, więc zadanie zostało zakończone.

Przykład 9. Przedstawmy funkcję daną wzorem $f(x) = \dfrac{x^4+x+1}{x^4+x^2}$, wymierną niewłaściwą, w postaci sumy wielomianu i ułamków prostych.
Funkcja jest funkcją wymierną niewłaściwą, wykonujemy dzielenie jak w przykładzie 4, otrzymując:

$$W(x) = 1, \qquad R(x) = -x^2 + x + 1.$$

Funkcję f możemy zatem zapisać jako:

$$f(x) = 1 + \frac{-x^2+x+1}{x^4+x^2}.$$

Stwierdzamy, że $\dfrac{-x^2+x+1}{x^4+x^2}$ nie jest ułamkiem prostym.

Krok 1. Rozbijamy wielomian z mianownika na iloczyn czynników:

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2+1).$$

Krok 2. Ułamek $\dfrac{-x^2+x+1}{x^4+x^2}$ przedstawiamy jako sumę trzech ułamków prostych:

$$\frac{-x^2+x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Krok 3. Wyznaczamy: A_1, A_2, B oraz C, w sposób analogiczny jak w przykładzie 7, otrzymując po rozwiązaniu układu równań $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $B = -1$ oraz $C = -2$.

Zatem otrzymujemy ostatecznie

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x+2}{x^2+1}.$$

Przykład 10. Przedstawmy funkcję daną wzorem $f(x) = \dfrac{x^6+x^5+9x^4+8x^3+25x^2+16x+16}{x^5+8x^3+16x}$ w postaci sumy wielomianu oraz ułamków prostych.
Funkcja jest funkcją wymierną niewłaściwą, wykonujemy dzielenie jak w przykładzie 4, otrzymując:

$$W(x) = x+1, \qquad R(x) = x^4+9x^2+16.$$

Funkcję f możemy zapisać jako:

$$f(x) = x + 1 + \frac{x^4+9x^2+16}{x^5+8x^3+16x}.$$

Stwierdzamy, że $\dfrac{x^4+9x^2+16}{x^5+8x^3+16x}$ nie jest ułamkiem prostym.

Krok 1. Rozbijamy wielomian z mianownika na iloczyn czynników:

$$x^5+8x^3+16x = x(x^4+8x^2+16) = x(x^2+4)^2.$$

Krok 2. Ułamek $\dfrac{x^4+9x^2+16}{x(x^2+4)^2}$ rozkładamy na ułamki proste I rodzaju oraz II rodzaju:

$$\frac{x^4+9x^2+16}{x(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}.$$

Krok 3. Wyznaczamy: A, B, C, D oraz E w sposób analogiczny jak w przykładzie 7, otrzymując po rozwiązaniu układu równań $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$ oraz $E = 0$.

Wracając do funkcji wymiernej z tego przykładu, otrzymujemy jej rozbicie na sumę wielomianu oraz ułamków prostych:

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{x}{(x^2+4)^2}.$$

Jeśli czytelnik czuje niedosyt, warto przed przystąpieniem do całkowania funkcji wymiernych zgłębić zagadnienia dzielenia wielomianów, rozkładu na ułamki proste (np. [2], [3], s. 83–98) oraz rozwiązywania układów równań liniowych (np. [6]).

2. Całkowanie ułamków prostych

W tym rozdziale pokażemy, że całkowanie ułamków prostych jest zadaniem bardzo łatwym. Będziemy korzystać z następujących wzorów:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \tag{7}$$

$$\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1, \tag{8}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} x + C, \tag{9}$$

Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną f' i $f(x) \neq 0$, to możemy zastosować wzór

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C. \tag{10}$$

2.1. Całkowanie ułamków prostych I rodzaju

Przy całkowaniu ułamków prostych I rodzaju stosujemy całkowanie przez podstawienie ([4], s. 169). Przy obliczaniu całki $\displaystyle\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,dx$ najlepiej zastosować podstawienie $t = ax + b$.

Dla $n = 1$ mamy

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \begin{bmatrix} t = ax+b \\ dt = a\,dx \\ \dfrac{1}{a}\,dt = dx \end{bmatrix} = \frac{A}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{A}{a}\ln|t| + C = \frac{A}{a}\cdot\ln|ax+b| + C. \tag{11}$$

Dla $n > 1$ mamy

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(ax+b)^n}\,dx = \begin{bmatrix} t = ax+b \\ dt = a\,dx \\ \dfrac{1}{a}\,dt = dx \end{bmatrix} = \frac{A}{a}\int \frac{dt}{t^n} = \frac{A}{a}\int t^{-n}\,dt = \frac{A}{a}\cdot\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \\ = \frac{A}{a(1-n)}\cdot\frac{1}{t^{n-1}} + C = \frac{A}{a(1-n)}\cdot\frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C. \end{aligned} \tag{12}$$

Czytelnik znający metodę całkowania przez podstawienie nie musi pamiętać wzorów (11) i (12); wystarczy, że zapamięta, iż tego typu całki oblicza się właśnie metodą podstawienia.

Przykład 11. Obliczmy całkę

$$\int \frac{3}{x-2}\,dx.$$

Korzystając ze wzoru (11) dla $A = 3$, $a = 1$, $b = -2$, otrzymujemy

$$\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3\ln|x-2| + C.$$

Stosując metodę podstawienia dla całki nieoznaczonej, mamy

$$\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3\int \frac{dx}{x-2} = \left[\begin{array}{c} t = x-2 \\ dt = dx \end{array}\right] = 3\int \frac{dt}{t} = 3\ln|t| + C = 3\ln|x-2| + C.$$

Przykład 12. Obliczmy całkę

$$\int \frac{5}{3x+2}\,dx.$$

Korzystając ponownie z wzoru (11), otrzymujemy

$$\int \frac{5}{3x+2}\,dx = \frac{5}{3}\ln|3x+2| + C.$$

Możemy też zastosować metodę podstawienia:

$$\int \frac{5}{3x+2}\,dx = 5\int \frac{dx}{3x+2} = \left[\begin{array}{c} t = 3x+2 \\ dt = 3dx \\ \frac{1}{3}dt = dx \end{array}\right] = 5\int \frac{\frac{1}{3}}{t}\,dt = \frac{5}{3}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{5}{3}\ln|t| + C = \frac{5}{3}\ln|3x+2| + C.$$

Przykład 13. Obliczmy całkę

$$\int \frac{2}{(x-3)^5}\,dx.$$

Skorzystamy w tym przykładzie ze wzoru (12) dla $A = 2$, $a = 1$, $b = -3$, $n = 5$,

$$\int \frac{2}{(x-3)^5}\,dx = \frac{2}{1(1-5)}\cdot\frac{1}{(x-3)^{5-1}} + C = \frac{-1}{2(x-3)^4} + C.$$

Stosując metodę podstawienia, mamy

$$\int \frac{2}{(x-3)^5}\,dx = 2\int \frac{dx}{(x-3)^5} = \left[\begin{array}{c} t = x-3 \\ dt = dx \end{array}\right] = 2\int \frac{dt}{t^5} = 2\int t^{-5}\,dt = \frac{2t^{-4}}{-4} + C = \frac{-1}{2t^4} + C =$$
$$= \frac{-1}{2(x-3)^4} + C.$$

2.2. Całkowanie ułamków prostych II rodzaju

Zacznijmy od całki typu

$$\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\,dx,$$

gdzie $a \neq 0$ i $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Zapiszmy rozważaną całkę w postaci:

$$\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\frac{B}{2a}(2ax+b) + C - \frac{bB}{2a}}{ax^2+bx+c}\,dx =$$
$$= \frac{B}{2a}\underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx}_{I_1} + \left(C - \frac{bB}{2a}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2}. \tag{13}$$

Całkę I_1 wyznaczamy przez podstawienie

$$I_1 = \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = ax^2+bx+c \\ dt = (2ax+b)\,dx \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln|ax^2+bx+c| + C_1. \quad (14)$$

Aby obliczyć całkę I_2, najpierw zapiszemy funkcję kwadratową z mianownika w postaci kanonicznej, tzn.

$$ax^2+bx+c = a(x-p)^2+q, \text{ gdzie} \qquad p = -\frac{b}{2a},\ q = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Mamy

$$I_2 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dx}{a(x-p)^2+q} = \frac{1}{q}\int \frac{dx}{\frac{a}{q}(x-p)^2+1} = \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{\frac{a}{q}}(x-p) \\ dt = \sqrt{\frac{a}{q}}\,dx \\ \sqrt{\frac{q}{a}}\,dt = dx \end{array}\right] = \quad (15)$$

$$= \frac{1}{q}\sqrt{\frac{q}{a}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{q}\sqrt{\frac{q}{a}}\operatorname{arc\,tg} t + C_2 = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} + C_2.$$

Podstawiamy (15) i (14) do (13). Po uproszczeniu otrzymujemy

$$\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{B}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \frac{2aC-bB}{a\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} + C_3. \quad (16)$$

Warto zauważyć, że podczas całkowania ułamków prostych drugiego rodzaju dla $n=1$ otrzymujemy sumę $A_1I_1 + A_2I_2$, gdzie A_1 i A_2 są pewnymi stałymi, natomiast I_1 i I_2 są całkami z ułamków prostych. Całka I_1 to całka z ułamka, którego licznik jest pochodną mianownika. Całka I_2 po odpowiednim podstawieniu daje funkcję arcus tangens. Można zatem zapamiętać następującą zależność:

$$\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\,dx = A_1\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + A_2\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}. \quad (17)$$

Przykład 14. Obliczmy całkę

$$\int \frac{x+3}{2x^2-4x+9}\,dx.$$

Sprawdzamy, że wyróżnik mianownika jest ujemny ($\Delta = -56$). Mamy do scałkowania ułamek prosty II rodzaju. Możemy zastosować wzór (16). Jeśli jednak go nie pamiętamy, to najpierw zapisujemy szukaną całkę w postaci sumy (17). Zaczynamy od obliczenia pochodnej mianownika: $(2x^2-4x+9)' = 4x-4$. Następnie dzielimy licznik przez pochodną mianownika:

		$\frac{1}{4}$				*(wynik)*
(	x	+	3	)	:	$(4x-4)$
−	x	+	1			
			4			*(reszta)*

Otrzymujemy $A_1 = \frac{1}{4}$ i $A_2 = 4$. Zatem

$$\int \frac{x+3}{2x^2-4x+9}\,dx = \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{4x-4}{2x^2-4x+9}\,dx}_{I_1} + 4\underbrace{\int \frac{dx}{2x^2-4x+9}}_{I_2}.$$

Całkę I_1 możemy obliczyć ze wzoru (10)

$$I_1 = \int \frac{4x-4}{2x^2-4x+9}\,dx = \ln|2x^2-4x+9| + C_1 = \ln(2x^2-4x+9) + C_1.$$

Uwaga 1. Ponieważ $2x^2-4x+9 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, zamiast $\ln|2x^2-4x+9|$ możemy zapisać $\ln(2x^2-4x+9)$.

Całkę I_2 zapisujemy tak, aby można było skorzystać ze wzoru (15). Kolejne przekształcenia przedstawiono szczegółowo, aby ułatwić czytelnikowi prześledzenie rachunków.

$$I_2 = \int \frac{dx}{2x^2-4x+9} = \int \frac{dx}{2(x-1)^2+7} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{\frac{2}{7}(x-1)^2+1} = \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{\frac{2}{7}}\,(x-1) \\ dt = \sqrt{\frac{2}{7}}dx \\ \sqrt{\frac{7}{2}}dt = dx \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{2}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arc\,tg} t + C_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2}{7}}\,(x-1) + C_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2(x-1)}{\sqrt{14}} + C_2.$$

Zatem

$$\int \frac{x+3}{2x^2-4x+9}\,dx = \frac{1}{4}\ln(2x^2-4x+9) + \frac{4}{\sqrt{14}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2(x-1)}{\sqrt{14}} + C_3.$$

Obliczenie całki przy użyciu wzoru (13) pozostawiono czytelnikowi, aby mógł sprawdzić, że otrzyma ten sam wynik.

Zajmijmy się teraz całką postaci:

$$\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx,$$

gdzie $a \neq 0$ i $\Delta = b^2-4ac < 0$ oraz $n > 1$.
Całkę rozbijamy również na sumę dwóch całek:

$$\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n} = A_1\underbrace{\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx}_{I_1} + A_2\underbrace{\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}}_{I_2}. \tag{18}$$

Całkę I_1 obliczamy, stosując odpowiednie podstawienie oraz wzór (8):

$$I_1 = \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \begin{bmatrix} t = ax^2+bx+c \\ dt = (2ax+b)\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t^n} = \int t^{-n}\,dt = \frac{t^{1-n}}{1-n} + C_1 = \\ = \frac{(ax^2+bx+c)^{-n+1}}{-n+1} + C_1. \tag{19}$$

W całce I_2 sprowadzamy mianownik funkcji podcałkowej do postaci kanonicznej, a następnie zastosujemy podstawienie takie samo jak we wzorze (15), otrzymując

$$I_2 = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \begin{bmatrix} t = \sqrt{\frac{a}{q}}(x-p) \\ dt = \sqrt{\frac{a}{q}}\,dx \\ \sqrt{\frac{q}{a}}\,dt = dx \end{bmatrix} = \frac{1}{q^n}\sqrt{\frac{q}{a}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \left(\frac{4a}{-\Delta}\right)^{n-\frac{1}{2}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}. \tag{20}$$

Otrzymaną całkę obliczamy, korzystając z następującego związku rekurencyjnego (zob. [4], s. 174):

$$\text{jeżeli} \quad J_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}, \quad \text{to} \quad J_n = \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\,J_{n-1}. \tag{21}$$

Całki tego typu nie są trudne, jeśli chodzi o ich obliczanie, jednak ich policzenie jest żmudne i czasochłonne.

Przykład 15. Pokażemy, jak obliczyć całkę

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx,$$

bez stosowania wzoru (21).

Aby obliczyć całkę metodą przez części, przekształcimy najpierw licznik funkcji podcałkowej, zapisując jedynkę z licznika w postaci $(x^2+1)-x^2$.

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \\ = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \operatorname{arctg} x - \underbrace{\int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx}_{I_1}. \tag{22}$$

Do obliczenia całki I_1 zastosujemy metodę całkowania przez części.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \\ du = dx & v = -\dfrac{1}{2(x^2+1)} \end{bmatrix} = \\ &= x \cdot \left(-\frac{1}{2(x^2+1)}\right) - \int \left(-\frac{1}{2(x^2+1)}\right) dx = \\ &= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C_1 \end{aligned} \tag{23}$$

Podstawiając (23) do (22), otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \operatorname{arctg} x - \left[-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right] = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C. \tag{24}$$

3. Całkowanie funkcji wymiernych

Poprzednie rozdziały wyposażyły nas w kompletny aparat algebraiczny i analityczny. Znamy już zasady rozkładu wielomianów na czynniki, strukturę funkcji wymiernych oraz metody całkowania ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju. Niniejszy rozdział stanowi naturalne rozwinięcie i zwieńczenie poprzednich tematów. Przechodzimy w nim do wyznaczania całek z funkcji wymiernych – jest to zagadnienie wymagające trochę więcej rachunków.

Przykład 16. Obliczmy całkę

$$\int \frac{x^3-6}{x-2}\,dx.$$

Korzystając z obliczeń z przykładu 8 oraz wzorów (7), (8). otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3-6}{x-2}\,dx = \int \left(x^2+2x+4+\frac{2}{x-2}\right) dx &= \int x^2\,dx + 2\int x\,dx + 4\int dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 2\ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

Przykład 17. Obliczmy całkę:

$$\int \frac{x^3+3x^2+3x+4}{x^2-1}dx.$$

Funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną niewłaściwą. Korzystając z pracy wykonanej w przykładzie 4, po przekształceniu funkcji podcałkowej otrzymujemy całkę z wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej. Funkcję wymierną właściwą można rozłożyć na sumę ułamków prostych, co zostało zrobione w przykładzie 6. Otrzymane ułamki proste są ułamkami prostymi I rodzaju. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+3x^2+3x+4}{x^2-1}dx &= \int \left(x+3+\frac{4x+7}{x^2-1}\right) dx = \int x\,dx + 3\int dx + \int \frac{4x+7}{x^2-1}\,dx = \\ = \int x\,dx + 3\int dx + \frac{11}{2}\int \frac{dx}{x-1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+1} &= \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{11}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

Przykład 18. Obliczmy całkę

$$\int \frac{6x+2}{x^4-x^3+x^2-x}\,dx.$$

Funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną właściwą. W przykładzie 7 funkcja podcałkowa została rozłożona na sumę ułamków prostych. Wykorzystując wykonane obliczenia, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int \frac{6x+2}{x^4-x^3+x^2-x}\,dx &= \int \frac{-2}{x}\,dx + \int \frac{4}{x-1}\,dx - \int \frac{2x+4}{x^2+1}\,dx = \\ &= \int \frac{-2}{x}\,dx + \int \frac{4}{x-1}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{4}{x^2+1}\,dx = \\ &= -2\int \frac{dx}{x} + 4\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 4\int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= -2\ln|x| + 4\ln|x-1| - \ln|x^2+1| - 4\operatorname{arc\,tg} x + C_1 = \\ &= -2\ln|x| + 4\ln|x-1| - \ln(x^2+1) - 4\operatorname{arc\,tg} x + C_1.\end{aligned}$$

Przykład 19. Obliczmy całkę

$$\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+1)}\,dx.$$

Funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną właściwą. Rozkładamy ją na sumę następujących ułamków prostych

$$\frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{E}{x+1}. \tag{25}$$

Mnożymy obustronnie (25) przez mianownik lewej strony i otrzymujemy

$$x-1 = (Ax+B)(x^2+1)(x+1) + (Cx+D)(x+1) + E(x^2+1)^2.$$

Porządkujemy, a następnie rozwiązujemy układ równań (analogicznie jak w przykładzie 7) w celu wyznaczenia stałych A, B, C, D, E.

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy: $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = 1, D = 0, E = -\frac{1}{2}$.
Zatem

$$\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx}_{I_2} - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{x+1}}_{I_3}.$$

Otrzymujemy trzy całki: I_1 oraz I_2, w których funkcjami podcałkowymi są ułamki proste II rodzaju, a także I_3, gdzie funkcja podcałkowa jest ułamkiem prostym I rodzaju. Całki obliczamy kolejno:

$$I_1 = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \operatorname{arc\,tg} x + C_1.$$

$$I_2 = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + C_2 = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C_2.$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C_3.$$

Otrzymujemy zatem

$$\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+1)}\,dx = \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C_4.$$

4. Uwagi końcowe

W niniejszym artykule przedstawiono kompleksowe podejście do zagadnienia całkowania funkcji wymiernych. Przedstawione przykłady wskazują, że zagadnienie całkowania funkcji wymiernych może wydawać się skomplikowane oraz rachunkowo żmudne. Okazuje się jednak, że kryje się za nim elegancki i w pełni algorytmiczny proces, który przy zachowaniu odpowiedniej metodyki, prowadzi do jednoznacznego rozwiązania w skończonej liczbie kroków. Aby skutecznie całkować funkcje wymierne, potrzebna jest między innymi znajomość podstawowych wzorów rachunku całkowego, metody całkowania przez podstawienie (zwanej też często metodą całkowania przez zamianę zmiennej) oraz całkowanie przez części.

Zainteresowany czytelnik znajdzie więcej informacji o całce nieoznaczonej w [4] (s. 173) oraz [5] (s. 294). Polecam książkę [4], w której czytelnik znajdzie szczegółowe omówienie metody całkowania przez podstawienie oraz przez części znajduje się kolejno na stronach 178 i 180.

Zaprezentowany materiał stanowi spójne i praktyczne kompendium, które pozwala na usystematyzowanie wiedzy z zakresu całkowania funkcji wymiernych.

5. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Oblicz całki:

a) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+5x-10}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{(3-2x)^3}$ **c)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x-1)^4}$

d) $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{1-3x}$ **e)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x}$ **f)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$

g) $\displaystyle\int \frac{2x^3}{x^2+1}\,dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{4x-1}{x^2-2x+5}\,dx$ **i)** $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2-2x+2}\,dx$ **k)** $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3-4x}\,dx$ **l)** $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^3+4x}\,dx$

Odpowiedzi do zadań:

a) $\ln|x^2+5x-10|+C$, **b)** $\dfrac{3}{4(3-2x)^2}+C$

c) $-\dfrac{1}{15(5x-1)^3}+C$ **d)** $-\dfrac{4}{3}\ln|1-3x|+C$

e) $\dfrac{1}{3}\ln|x| - \dfrac{1}{3}\ln|x+3|+C$ **f)** $2\ln|x+2| - \ln|x+1|+C$

g) $x^2 - \ln(x^2+1)+C$ **h)** $2\ln(x^2-2x+5) + \dfrac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+C$

i) $\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10)-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{3}\right)+C$

j) $\ln(x^2-2x+2)+7\operatorname{arc\,tg}(x-1)+C$

k) $-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{3}{8}\ln|x-2|-\frac{1}{8}\ln|x+2|+C$

l) $\frac{3}{4}\ln|x|-\frac{3}{8}\ln(x^2+4)+\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

Literatura

1. G. Birkhoff, S. Mac Lane, *Przegląd algebry współczesnej*, PWN, Warszawa 1966.
2. R. Brociek, B. Pawlik, *Rozkład na ułamki proste*, MINUT 2019 (1), s. 56–62.
3. A. Chmielowska, E. Mateja-Losa, M. Żabka, *Matematyka dla kandydatów na studia techniczne. Cz. 1*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2022.
4. R. Grzymkowski, *Matematyka dla studentów wyższych uczelni technicznych*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2009.
5. W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach. Cz.1*, PWN, Warszawa 1999.
6. K. Sawicz, *Rozwiązywanie układów równań metodą eliminacji Gaussa*, MINUT 2023 (5), s. 237–245.