

Marek ŻABKA

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Czy użyć AI do zrobienia sprawdzianu z odwracania macierzy?

Streszczenie. Dla wygenerowania zadania na sprawdzian można by użyć modeli językowych, zwanych sztuczną inteligencją (AI). Oczywiście należy zastosować odpowiednie prompty oraz wybrać właściwe platformy AI. W badaniu przeanalizowano trzy wersje zapytań skierowanych do trzech aplikacji: ChatGPT, Microsoft 365 Copilot oraz Gemini. Oczekiwany rezultat miało być poprawne zadanie, które można użyć na sprawdzianie oraz pełne jego rozwiązanie i odpowiedź. Wyniki nie były jednak w pełni poprawne — w dwóch przypadkach nawet odpowiedź była błędna. Artykuł jest głosem w dyskusji na temat możliwości zastosowania AI w procesie dydaktycznym na uczelniach technicznych i jest skierowany przede wszystkim do nauczycieli akademickich.

Słowa kluczowe: AI, ChatGPT, Copilot, Gemini, macierz odwrotna, sprawdzian, proces Gaussa, proces Gaussa–Jordana.

1. Wstęp

Obecnie coraz powszechniej wykorzystujemy modele językowe, w skrócie nazywane AI. Wielu autorów, między innymi w pracach [1], [4] i [3], analizuje wykorzystywanie AI w procesie dydaktycznym. Przykładowo Jerzy Dydak w pracy [3] opisuje zastosowanie dedykowanych agentów AI do wybranych zagadnień algebry liniowej, w szczególności do generowania zadań domowych o zróżnicowanych danych. Z kolei autorzy pracy [4] rozważają użycie AI do tworzenia sylabusów zajęć, wraz z materiałami dydaktycznymi i ćwiczeniami. Wskazują również, że AI może odpowiadać na pytania studentów oraz personalizować proces nauczania. Jednak autorzy w pracy [1] po analizie szeregu modeli, zarówno zamrożonych, jak i dodatkowo trenowanych, zwracają uwagę na liczne problemy. W szczególności wskazują na niespójne wyniki przy mieszanych danych tekstowych i liczbowych oraz na możliwość otrzymywania różnych odpowiedzi przy kolejnych, identycznych próbach.

Celem niniejszej pracy jest z jednej strony zbadanie, czy wykładowca może skutecznie użyć AI do przygotowania zadań na potrzeby sprawdzianów lub ćwiczeń, a z drugiej strony ocena zasadności rekomendowania studentom korzystania z takich narzędzi w procesie samodzielnego studiowania. Ponadto przeanalizujemy niektóre problemy, które mogą się z tym wiązać. Należy podkreślić, że nie jest to wyczerpująca analiza problemu; w tej pracy skoncentrujemy się na próbie wygenerowania jednego konkretnego zadania przy pomocy trzech powszechnie dostępnych narzędzi. Przy okazji sprawdzimy, czy mimo dynamicznego postępu w technologiach AI, trudności wskazywane w cytowanych pracach potwierdzają się w 2026 roku.

Zadanie brzmi następująco:

„Odwróć macierz, wykorzystując proces Gaussa-Jordana”.

W badaniu zastosowano trzy modele: Gemini, ChatGPT oraz Microsoft 365 Copilot. Model Gemini uruchomiono poprzez przeglądarkę Chrome i jej „Tryb AI”, natomiast z ChatGPT oraz Copilota korzystano jako z dedykowanych aplikacji. Gemini oraz ChatGPT są dostępne bezpłatnie i w tych wersjach ich używano, a z kolei Microsoft 365 Copilot wykorzystano w ramach licencji uczelnianej.

Czytelnik niezaznajomiony z odwracaniem macierzy za pomocą operacji elementarnych może skorzystać z literatury, np. [5] lub [2]. Z drugiej strony przestudiowanie kolejnych sekcji powinno dać pewne wyobrażenie o tym, jak odwracać macierze. W tym miejscu przedstawiamy jedynie skrótowe omówienie metody zwanej eliminacją Gaussa–Jordana. Metoda ta polega na dopisaniu do macierzy A macierzy jednostkowej, oznaczanej przez E lub I . Otrzymaną w ten sposób macierz rozszerzoną $[A|E]$ przekształcamy za pomocą operacji elementarnych do postaci $[E|B]$, o ile jest to możliwe. Do operacji elementarnych zaliczamy:

- 1) zamianę dwóch wierszy, oznaczaną przez $R_i \leftrightarrow R_j$,
- 2) pomnożenie wiersza przez niezerową liczbę λ , oznaczane przez $R_i \leftarrow \lambda R_i$,
- 3) dodanie do jednego wiersza wielokrotności innego wiersza, oznaczane przez $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$.

Zamiast litery R (od angielskiego row), Gemini używa dużej lub małej litery w oznaczającej wiersz. Jeżeli opisane przekształcenie jest możliwe, to macierz A jest odwracalna, a macierz B jest macierzą odwrotną do macierzy A , czyli $B = A^{-1}$. Szczegóły procedury najlepiej prześledzić w ostatniej z cytowanych odpowiedzi, która zawiera komentarze wyjaśniające znaczenie kolejnych kroków.

Warunkiem wykorzystania wygenerowanego zadania konieczne jest, obok sformułowania samego zadania, uzyskanie poprawnej odpowiedzi oraz prawidłowego rozwiązania, na podstawie którego można przygotować schemat oceniania lub materiały dydaktyczne na Platformę Zdalnej Edukacji. Treść musi spełniać określone przez wykładowcę warunki. W tym celu przygotowano trzy prompty. Każdy z nich wskazywał ograniczenia oraz kroki niezbędne dla uzyskania prawidłowego wyniku. W kolejnych sekcjach przedstawiamy teksty tych zapytań oraz rezultaty ich wykonania.

Prompty mają zastąpić szczegółowo dopracowane programy komputerowe, co powinno przełożyć się na oszczędność czasu pracy wykładowcy. Jest to jedna z podstawowych przesłanek użycia AI. Przygotowane polecenia sformułowano w sposób algorytmiczny, nacisk położono na efekt końcowy, czyli na uzyskanie zadania o pożądanych właściwościach. Należy przypuszczać, że bardziej dopracowane instrukcje wpłynęłyby na jakość odpowiedzi. Konieczne jest jednak zachowanie odpowiedniej równowagi między jakością uzyskiwanych wyników a czasem poświęconym na przygotowanie poleceń.

Prompty zapisujemy *pismem bezszeryfowym w kolorze ciemnoniebieskim*. Odpowiedzi wygenerowane przez AI są składane tym samym krojem pisma, lecz dodatkowo w dwóch kolumnach. Czasem odpowiedzi są skrócone w miejscach, które są poprawne i nie wymagają dalszego komentarza; takie miejsca oznaczmy przez W odpowiedziach konieczne były zmiany techniczne, a w szczególności usunięcie znaków niedozwolonych w systemie L^AT_EX. Usunięte zostały również nadmiarowe odstępy i często występujący znak #. Elementy te nie wносиły wartości merytorycznej do odpowiedzi, a jedynie wydłużały tekst. Kilkukrotnie komentarze do konkretnego miejsca zostały umieszczone bezpośrednio wewnątrz kolumn, wyróżnione *pismem pochyłym w kolorze czarnym*.

Tekst niniejszego opracowania został zweryfikowany pod względem językowym i stylistycznym przy użyciu tych samych narzędzi sztucznej inteligencji, które wykorzystano do generowania zadań. Wprowadzone poprawki stanowią syntezę sugerowanych zmian, które w wielu przypadkach były zbieżne.

2. Próba pierwsza

Tekst promptu

Wygeneruj zadanie wg następujących kroków:

(1) Weź losową macierz stopnia 5, losując liczby od -4 do 7, a liczba zer musi być co najmniej 10 a nie więcej niż 12.

(2) Oblicz wyznacznik tej macierzy, jeśli jest różny od 2, -2, 3, -3, to zacznij od nowa.

(3) Oblicz macierz odwrotną, oznacz ją przez A.

(4) Zapisz zadanie o postaci: odwróć macierz A, zapisz to w LaTeXu.

(5) Pokaż rozwiązanie procesem Gaussa, zapisz odpowiedź.

2.1. Odpowiedź ChatGPT

Aby zapisać odpowiedź w $\text{\LaTeX}$ u, zostało poprawione formatowanie oraz dokonano poprawek zapisu $\text{\LaTeX}$ u, np. w macierzach zamiast $\backslash\backslash$ pojawiło się $\backslash$, brakowało znaków $\$$ itp., choć sam tekst zadania był prawidłowy i można go skopiować do sprawdzianu bez zmian.

Wygenerowane zadanie spełniające warunki:

- * macierz (5×5) ,
- * elementy z przedziału $([-4, 7])$,
- * dokładnie 11 zer,
- * wyznacznik równy (2).

Najpierw wylosowana została macierz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(B) = 2.$$

Jej macierz odwrotna wynosi

$$A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & -35 & -60 \\ 0 & 1 & -4 & 18 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Treść zadania (LaTeX)

Zadanie. Korzystając z metody Gaussa–Jordana, wyznacz macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & -35 & -60 \\ 0 & 1 & -4 & 18 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie metodą Gaussa

Tworzymy macierz rozszerzoną:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -2 & 8 & -35 & -60 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 18 & 30 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Krok 1

$$R_5 \leftarrow 2R_5$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -2 & 8 & -35 & -60 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 18 & 30 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Krok 2 Usuamy elementy nad pivotem w kolumnie 5:

$$R_4 \leftarrow R_4 - \frac{3}{2}R_5,$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 8R_5,$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 30R_5,$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + 60R_5.$$

Otrzymujemy

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -2 & 8 & -35 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & -4 & 18 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -60 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Pominiemy tu resztę poprawnie wykonanego rozwiązania. Zwróćmy uwagę na to, że eliminację zaczynamy tu od ostatniej kolumny. Angielską nazwę *pivot* można by zastąpić polskim terminem *jedyńska wiodąca*. W tekście wygenerowanego zadania mamy zdanie „Korzystające z metody Gaussa-Jordana”, a w rozwiązaniu ChatGPT określił ją jako metodę Gaussa.

ChatGPT wygenerował zadanie, które jest zgodne z promptem, jednak nie jest interesujące dydaktycznie. Macierz jest trójkątna, co zbytnio upraszcza schemat obliczeń. Z drugiej strony jej elementy mają stosunkowo duże wartości, co zwiększa pracochłonność obliczeń, mimo że większość działań jest wykonywana na liczbach całkowitych.

Przyjrzyjmy się jeszcze sposobowi zapisu macierzy w systemie $\text{\LaTeX}$. Po lewej stronie przedstawiono zapis wykorzystywany w treści zadania, a po prawej zastosowany w rozwiązaniu. W pierwszym przypadku mamy otoczenie `\pmatrix`, a w drugim `\array`. W dalszej części pracy zobaczymy, że Copilot użył w analogicznych miejscach innych poleceń.

```
\[
A=
\begin{pmatrix}
1 & -2 & 8 & -35 & -60\\
0 & 1 & -4 & 18 & 30\\
0 & 0 & 1 & -5 & -8\\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{32}{11}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}.
```

```
\[
\left(
\begin{array}{ccccc|ccccc}
1&-2&8&-35&-60&1&0&0&0&0\\
0&1&-4&18&30&0&1&0&0&0\\
0&0&1&-5&-8&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&\frac{32}{11}&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&2
\end{array}
\right).
```

2.2. Odpowiedź Microsoft 365 Copilot

Tak jak poprzednio wpisanie kopii pobranej z Copilota wymagało poprawy formatowania oraz usunięcia znaków spoza kodowania $\text{\LaTeX}$ a.

W szczególności odpowiedź używa otoczenia `\pmatrix`, mającego domyślny limit wykonania dziesięć kolumn. Mamy wprowadzić dokładnie tyle kolumn liczbowych, lecz pionowa kreska w macierzy rozszerzonej tworzy kolejną kolumnę ze znakiem „|”. Polecenie `\setcounter{MaxMatrixCols}{11}` pozwala na podwyższenie tego limitu.

Krok 1–3: Konstrukcja i obliczenia

Wylosujmy macierz trójkątną górną (spełnia warunek liczby zer = 10):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

liczba zer = 10 wyznacznik (iloczyn przekątnej):

$$\det(M) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

Macierz odwrotna

$$A = M^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 15 & -53 & \frac{175}{2} \\ 0 & 1 & -6 & 20 & -\frac{71}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Krok 4: TREŚĆ ZADANIA (LaTeX)

Zadanie:

$$\text{Odwróć macierz } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 15 & -53 & \frac{175}{2} \\ 0 & 1 & -6 & 20 & -\frac{71}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Krok 5: Rozwiązanie metodą Gaussa

Tworzymy macierz rozszerzoną:

$$[A \mid I] = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -2 & 15 & -53 & \frac{175}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 20 & -\frac{71}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Eliminacja (w skrócie)

1.

$$R_5 \cdot 2 \Rightarrow x_5 = 2$$

2. Eliminujemy kolumnę 5 w górę 3. Następnie kolumny 4,3,2,1

Po wykonaniu eliminacji Gaussa otrzymujemy:

$$[I \mid M]$$

Odpowiedź

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zadanie jest poprawne i spełnia wszystkie warunki.

Tutaj zadanie jest zbliżone do wersji ChatGPT, podobne są też wady takiego zadania.

W treści zadania Copilot nie umieścił nazwy metody, wskazał jedynie, że należy odwrócić macierz. Warto dodać, że sam tekst „Odwróć macierz” został umieszczony w otoczeniu $\backslash[\dots]$, inaczej niż w odpowiedzi ChatGPT.

W podstawowej wersji odpowiedzi brakuje opisu wszystkich kroków, jednak można poprosić model o uzupełnienie odpowiedzi.

W kodzie $\text{\LaTeX}$, Copilot dla macierzy użył wyłącznie otoczenia `pmatrix`. Wskutek użycia tego otoczenia z wpisaniem znakiem „|” (jak wspomniano powyżej), kreska pionowa nie jest ciągła.

2.3. Odpowiedź Gemini

W celu wypisania tej odpowiedzi wystarczyło usunąć niektóre znaki # oraz odstępy. W odróżnieniu od poprzednich przypadków, tu mamy pojedyncze długie linie, co wymaga od edytora „zwijania wiesz”. Ponadto każda linia oznacza akapit, więc w $\text{\LaTeX}$ u konieczne było wstawienie pustych linii.

Oto kompletne zadanie przygotowane zgodnie z Twoją procedurą.

Aby końcowy proces odwracania macierzy A metodą Gaussa nie prowadził do skomplikowanych ułamków, jako macierz wyjściową w kroku (1) wylosowaliśmy macierz (oznaczymy ją jako B), której elementy są całkowite i która spełnia Twoje kryteria liczby zer oraz wyznacznika ($\det(B) = -2$).

Jej macierz odwrotna $A = B^{-1}$ posiada ułamki, ale dzięki temu podczas rozwiązywania zadania i odwracania macierzy A , kroki eliminacji Gaussa doprowadzą nas z powrotem do bardzo czystej, całkowitej macierzy B . Parametry wygenerowanej macierzy bazowej:

* Zakres liczb: od -4 do 7

* Liczba zer: dokładnie 11 (mieści się w przedziale 10-12)

* Wyznacznik: -2 (spełnia warunek)

(4) Treść zadania

Zadanie: Wyznacz macierz odwrotną A^{-1} do macierzy A metodą eliminacji Gaussa-Jordana, gdzie macierz A dana jest wzorem:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -99 & 121 & \frac{1}{2} & \frac{481}{2} \\ 0 & -4 & 5 & 0 & 10 \\ 1 & 31 & -38 & 0 & -76 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(5) Rozwiązanie procesem Gaussa

Tworzymy macierz blokową $[A \mid I]$. Naszym celem jest sprowadzenie lewej strony do macierzy jednostkowej.

Krok 0: Zapisanie macierzy uzupełnionej $[A \mid I]$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -99 & 121 & \frac{1}{2} & \frac{481}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 31 & -38 & 0 & -76 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Krok 1: Zamiana wierszy (ustawienie jedynki na pierwszym pivocie)

Zamieniamy wiersz 1 z wierszem 4 ($w_1 \leftrightarrow w_4$):

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 31 & -38 & 0 & -76 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -99 & 121 & \frac{1}{2} & \frac{481}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Krok 2: Eliminacja w pierwszej kolumnie Dodajemy potrojony wiersz 1 do wiersza 2 ($w_2 \leftarrow w_2 + 3w_1$):

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 31 & -38 & 0 & -76 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & \frac{1}{2} & \frac{253}{2} & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Tu przerwiemy AI, jako że w miejscu, gdzie jest $\frac{253}{2}$ powinno być $\frac{25}{2}$. Taki błąd jest dość nieoczekiwany. Dalszy ciąg odzwierciedla ten błąd, choć na końcu AI podaje jednak prawidłową odpowiedź. Tu zobaczymy ostatnie kroki:

Krok 7: Ostateczna eliminacja w piątej kolumnie Używając piątego wiersza zerujemy ostatnią kolumnę po lewej stronie: $w_1 \leftarrow w_1 - 13w_5$, $w_3 \leftarrow w_3 - 2w_5$ oraz $w_4 \leftarrow w_4 - 225w_5$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -225 & 2 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Poprawka upraszczająca wynikająca ze struktury macierzy pierwotnej: Wracając bezpośrednio do pierwotnej macierzy całkowitej przed przekształceniami, prawa strona po pełnej redukcji układu Gaussa-Jordana przyjmuje ostateczną, uproszczoną postać.

Odpowiedź:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podsumowując, macierz jest nieco ciekawsza, nie jest trójkątna, jednak pozostaje problem dużych liczb. Nie można mieć zaufania do rozwiązania, więc odpowiedź również może być błędna.

Treść zadania jest zapisana najdłuższym zdaniem. Porównajmy:

ChatGPT: „Korzystając z metody Gaussa-Jordana, wyznacz macierz odwrotną do macierzy $A = \dots$ ”

Copilot: „Odwróć macierz $A = \dots$ ”

Gemini: „Wyznacz macierz odwrotną A^{-1} do macierzy A metodą eliminacji Gaussa-Jordana, gdzie macierz A dana jest wzorem: $\dots$ ”

W zapisie $\text{\LaTeX}$ Gemini używa `\bmatrix`, a nie jak poprzednie programy `\pmatrix`, co daje nawiasy kwadratowe a nie okrągłe. W rozwiązaniu używa otoczenia `\array`, podobnie jak ChatGPT, choć konsekwentnie z nawiasami kwadratowymi.

3. Próba druga

Próbujemy naprawić główne problemy z pierwszej próby, pisząc kolejny prompt.

Tekst promptu

Wygeneruj zadanie wg następujących kroków:

- (1) Weź losową macierz stopnia 5, która nie jest trójkątna, losując liczby od -4 do 7, a liczba zer musi być co najmniej 10 a nie więcej niż 12.
- (2) Oblicz wyznacznik tej macierzy, jeśli jest różny od 2, -2, 3, -3, to zacznij od nowa.
- (3) Oblicz macierz odwrotną, oznacz ją przez A .
- (4) Jeżeli w tej macierzy odwrotnej są liczby większe niż 9 lub mniejsze niż -9, zacznij od nowa.
- (5) Zapisz zadanie o postaci: odwróć macierz A , zapisz to w LaTeXu.
- (6) Pokaż rozwiązanie procesem Gaussa, zapisz odpowiedź.

Zwróćmy tu uwagę, że aplikacja ma wpierw generować macierz A^{-1} , potem ją odwrócić. Powstaje macierz A , a zadanie ma dotyczyć odwrócenia tej macierzy. Znamy więc wpierw wynik, a potem zadanie. Powoduje to, że w treści zadania pojawiają się ułamki, a w odpowiedzi występują wyłącznie liczby całkowite. Pierwszy prompt został w ten sposób zinterpretowany przez wszystkie modele językowe.

W tej wersji dodano wymaganie, aby wygenerowana macierz nie była trójkątna oraz wprowadzono dodatkowe ograniczenie dotyczące wielkość liczb. Tym razem jednak tylko wersja Gemini zrozumiała intencję prompta dotyczącej tego, która macierz jest w zdaniu odwracana, a która stanowiła wynik. Pozostałe aplikacje zrobiły odwrotnie, tworząc zadanie dotyczące wygenerowanej macierzy.

Nie będziemy tu zapisywać pełnych rozwiązań, a jedynie zadanie i odpowiedź.

Poprawki jak opisano w poprzedniej sekcji.

3.1. Odpowiedź ChatGPT

.....
Odwróć macierz (A):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.....

Odpowiedź:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.....

Do rozwiązania niezbędnych jest 6 kroków. Zadanie wygląda ciekawie, poza wspomnianym powyżej błędem. Tu cała kolumna w pierwszej macierzy jest podzielna przez 2, a w macierzy odwrotnej – wiersz. Wyznacznik równy 2 jest uzyskany dość trywialnie. ChatGPT potrzebował prawie 2 minut na wygenerowanie takiej odpowiedzi, najwięcej ze wszystkich trzech AI. Przy większej liczbie podobnych zadań czas jest dość duży.

3.2. Odpowiedź Microsoft 365 Copilot

Zapiszmy zadanie i odpowiedź, pomijając szczegóły. Wyznacznik macierzy A jest równy 3.

.....
Zadanie: Oblicz macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.....

Macierz odwrotna

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

.....

Można zauważyć, że odpowiedź jest błędna. Prawidłowa odpowiedź, która jest wyliczona np. w programie Excel, różni się w 11 elementach!

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Gdy prześledzimy rozszerzoną odpowiedź (po wybraniu „pełne rachunki”), okazuje się, że Copilotowi zabrakło cierpliwości. Poniżej zapisane są kroki, gdzie na początku mamy dobrą odpowiedź, a na końcu złą. Kroki 8 i 9 są potraktowane skrótowo; to w nich kryje się błąd.

Krok 7: Pivot w kolumnie 4

$$R_5 \leftarrow R_5 + \frac{1}{2}R_4$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

Krok 8: Pivot w kolumnie 5

$$R_5 \leftarrow \frac{2}{3}R_5$$

$$R_5 = (0, 0, 0, 0, 1 | -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

Krok 9: Zerujemy kolumnę 5

Eliminujemy wiersze 1-4:

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.3. Odpowiedź Gemini

.....
Zadanie: Dane jest macierz A . Znajdź macierz odwrotną A^{-1} , gdzie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & 2 & 7 & 0 \\ 1 & -\frac{8}{3} & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{5}{3} & -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

.....

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

.....

Odpowiedź jest prawidłowa, jednak gdy prześledzimy kolejne kroki procesu Gaussa, pojawiają się problemy.

Nie będziemy tu analizować wszystkich kroków. Pod koniec kroku 2 mamy jeszcze prawidłowy wynik:

..... Zamieniamy wiersz trzeci z piątym: $W_3 \leftrightarrow W_5$.

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 7 & 7 & 8 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dalej AI pisze:

Krok 3: Zamiana wierszy w celu uzyskania schodkowości (potrzebujemy elementu niezerowego w trzeciej kolumnie).

Uwaga: Wiersz pierwszy został zaktualizowany o nową pozycję wiersza trzeciego.

Zapis ten jest przede wszystkim niejasny, a ponadto prawa strony macierzy ma dwa identyczne wiersze, czyli ma wyznacznik zerowy. Taki rezultat nie może być efektem żadnych poprawnie wykonanych operacji elementarnych. Dalsze przekształcenia pominiemy, choć jeden z wykonanych kroków prowadzi do prawidłowej postaci, jednak następne są ponownie błędne. Mimo tego na końcu pojawia się prawidłowy wynik. Widać tu efekt znanego zjawiska „halucynacji” AI.

3.4. Podsumowanie tej wersji pytania

Jak można zauważyć, zadania są sensowniejsze, ale tylko ChatGPT daje prawidłowy wynik i obliczenia. Copilot daje błędną odpowiedź do wygenerowanego zadania, a Gemini, co prawda daje prawidłową odpowiedź, ale błędne obliczenia. Czas pracy ChatGPT był tu najdłuższy.

4. Trzecia próba

W poprzednich próbach nie uzyskano zadania, które byłoby jednocześnie interesujące i proste do rozwiązania. W związku z tym kolejny prompt będzie wskazywał sposób wygenerowania macierzy, której odwrócenie będzie wymagało niewielkiej liczby kroków. Autor stosował podobne podejście w programie napisanym w języku C++, jednak jego wykorzystanie wymaga odpowiednich umiejętności programistycznych oraz dodatkowego nakładu czasu.

Tekst promptu

Wygeneruj zadanie wg następujących kroków:

- (1) Weź macierz jednostkową stopnia 5, oznacz przez B.
- (2) Pomnóż losowy wiersz przez 2, -2, 3 lub -3.
- (3) Wykonaj 3 krotnie krok elementarny Gaussa polegający na dodaniu losowo wybranego wiersza do innego losowo wybranego wiersza pomnożonego przez jedną z liczb: -2, -1, 1, 2. Każdy krok musi być inny od poprzedniego.
- (4) Zamień dwa losowo wybrane wiersze, powtórz operację zamiany na innych dwóch wybranych wierszach.

- (5) Odwróć macierz B, wynik odwracania nazwij A.
 (6) Napisz zadanie postaci: odwróć macierz A. Macierz zapisz w LaTeX-u
 (7) Przygotuj rozwiązanie, pokazując kroki Gaussa potrzebne do rozwiązania i zapisz odpowiedź do zadania.
 Tym razem tylko ChatGPT nie zrozumiał, która z macierzy ma być zadaniem, a która odpowiedzią.

4.1. Odpowiedź ChatGPT

Ta odpowiedź AI pokazuje treść zadania, a następnie jego rozwiązanie. Spójrzmy wpierw skrótowo na zadanie i odpowiedź:

Zadanie

Odwróć macierz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

.....

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podana odpowiedź okazuje się błędna, od poprawnej różni się w 3 miejscach (tu są podkreślone):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & \underline{0} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \underline{0} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Błąd pojawia się w tuż przed końcu, wynik oznaczony jako „Krok 9” jest prawidłowy, natomiast wynik oznaczony jako „Krok 10” jest błędny oraz trochę dziwny, można to zobaczyć na zrzucie ekranu:

Krok 9	Krok 10
$R_5 \leftarrow -\frac{1}{2}R_5.$ $\left[\begin{array}{ccccc ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array} \right].$	$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_5.$ Otrzymujemy $\left[\begin{array}{ccccc ccccc} I_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$
	Zatem $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

4.2. Odpowiedź Microsoft 365 Copilot

Wpierw otrzymujemy zadanie, potem macierz rozszerzoną oraz ciąg kroków prowadzących do odpowiedzi. Na końcu jest dobra odpowiedź. Jednak pokazane kroki są błędne. Można zażądać pełniejszej odpowiedzi. Wtedy otrzymamy inne kroki, tym razem prawidłowe. Zmieniła się też nazwa metody: „Rozwiązanie metodą Gaussa” na „Poniżej pokazuję pełne odwracanie macierzy A metodą Gaussa-Jordana”

W zapisie zostały zmniejszone różne odstępny, aby pokazać istotne elementy odpowiedzi.

Jeszcze raz zwróćmy uwagę na prawidłową interpretację, która macierz ma być odwracana.

Zadanie

Odwróć macierz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie metodą Gaussa

Tworzymy macierz rozszerzoną:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Po wykonaniu tych operacji lewa strona przyjmuje postać jednostkową:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Gdy prześledzimy podane kroki, otrzymamy zupełnie inną macierz

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

W odpowiedzi na prośbę pełnego rozwiązania, dostajemy następujące kroki (pominęliśmy pokazane efekty każdego kroku; część kroków się zgadza, a część jest w innej kolejności lub dotyczy innych wierszy):

$$R_1 \leftrightarrow R_4 \quad R_2 \leftrightarrow R_5 \quad R_5 \leftarrow R_5 + 2R_1 \quad R_3 \leftarrow -3R_3 \quad R_4 \leftarrow R_4 + 2R_3 \quad R_2 \leftarrow R_2 - R_4$$

Wykonujemy kolejno operacje elementarne (dokładnie te, z których została zbudowana macierz $B = A^{-1}$):

1. Zamiana wierszy $R_1 \leftrightarrow R_4$.

2. Zamiana wierszy $R_2 \leftrightarrow R_5$.

3. Dodanie podwojonego czwartego wiersza do drugiego:

$$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_4.$$

4. Odjęcie pierwszego wiersza od piątego: $R_5 \leftarrow R_5 - R_1$.

5. Dodanie podwojonego trzeciego wiersza do pierwszego:

$$R_1 \leftarrow R_1 + 2R_3.$$

6. Pomnożenie trzeciego wiersza przez -3 :

$$R_3 \leftarrow -3R_3.$$

Zatem prawa strona jest macierzą odwrotną do A .
Odpowiedź

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3. Odpowiedź Gemini

Odpowiedź Gemini zawiera poprawnie sformułowane zadanie oraz prawidłowo przeprowadzone przekształcenia. Zaprezentujemy ją w całości, z minimalnymi poprawkami, aby zilustrować właściwy sposób rozwiązywania problemów o takim poziomie trudności.

Podkreślmy, że dla dowolnej macierzy piątego stopnia potrzebnych jest maksymalnie 25 operacji elementarnych: 5 mnożeń wiersza przez liczbę oraz 20 operacji w postaci dodania jednego wiersza do innego. Dodatkowo czasem konieczne jest przestawienie wierszy, gdy na przekątnej pojawia się zero – wtedy jednak zbędna staje się jedna operacja poprzedniej postaci. Każda jedynka na przekątnej lub zera poza nią zmniejszają tę liczbę. Aby zadanie wykorzystać na sprawdzianie, korzystna jest jak najmniejsza liczba operacji elementarnych, aby ograniczyć trudności czysto obliczeniowe. Tutaj mamy tylko 7 takich przekształceń, pogrupowanych w 6 kroków. Gemini bardzo dobrze opisał te przekształcenia, co może być doskonałym przykładem dla studentów.

Oto wygenerowane zadanie wraz z pełnym rozwiązaniem krok po kroku za pomocą metody eliminacji Gaussa–Jordana.

Zadanie

Odwróć macierz A , gdzie macierz A dana jest wzorem:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć macierz odwrotną A^{-1} , tworzymy macierz blokową $[A \mid I]$, gdzie I to macierz jednostkowa stopnia 5, a następnie wykonujemy operacje elementarne na wierszach, dążąc do postaci $[I \mid A^{-1}]$.

Krok 0: Zapisanie macierzy rozszerzonej

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Krok 1: Wyzerowanie elementu w pierwszej kolumnie

Operacja:

$$W_5 \leftarrow W_5 + W_1.$$

Krok 4: Wyzerowanie elementu nad przekątną w czwartej kolumnie

Operacja:

$$W_2 \leftarrow W_2 + 2W_4.$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Krok 5: Zmiana znaku w pierwszym wierszu

Operacja:

$$W_1 \leftarrow -W_1.$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Krok 6: Redukcja piątej kolumny za pomocą wiersza piątego

Wykonujemy operacje:

$$W_1 \leftarrow W_1 + W_5, \quad W_3 \leftarrow W_3 - W_5.$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Krok 2: Uporządkowanie wierszy
Zamieniamy wiersze:

$$W_2 \leftrightarrow W_4.$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Krok 3: Uzyskanie jedynki w czwartej kolumnie

Operacja:

$$W_4 \leftarrow -2W_4.$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Po lewej stronie uzyskaliśmy macierz jednostkową I . Prawa strona stanowi szukaną macierz odwrotną.

Odpowiedź

Odwrotnością macierzy A jest macierz B :

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Podsumowanie

Na pewno wielu wykładowców w pracy dydaktycznej chciałoby wykorzystywać AI do generowania ciekawych zadań. Jednak zauważmy (tab. 1), że na 9 prób aż w 5 pojawił się jakiś błąd. Aż dwa razy była to zła odpowiedź, a trzykrotnie błędy w rozwiązaniach. Oznacza to, że każde zadanie wygenerowane przez AI wymaga weryfikacji, co istotnie ogranicza użyteczność takiego rozwiązania. Z dotychczasowych doświadczeń autora wynika, że najwięcej błędów pojawia się w algebrze macierzy. Być może łatwiejsze jest zatem generowanie zadań z analizy matematycznej. Jest to jednak temat na odrębną pracę.

Dla wygenerowania ciekawych zadań konieczny jest dobry prompt. Można go traktować jako program zapisany w języku naturalnym, dlatego nie jest wymagana znajomość klasycznych języków pro-

gramowania. Dodatkowo Gemini często dołącza program w Pythonie, co może być użyteczne dla osób programujących w tym języku. Jednak sam program nie przedstawiał sposobu uzyskania przykładu.

Również sama odpowiedź zazwyczaj nie pokazywała procesu powstawania macierzy. Jedynym wyjątkiem była jedna z prób, której nie przedstawiono w niniejszej pracy, z powodu pomyłki w prompcie. Wszystkie testowane modele AI poprawnie wskazywały natomiast kolejne kroki prowadzące do uzyskania macierzy B .

Copilot zazwyczaj nie przedstawiał od razu pełnego przebiegu eliminacji Gaussa i wymagał dodatkowej prośby o jego rozwinięcie. W jednym przypadku autor nie zwrócił się o takie uzupełnienie, co uniemożliwiło późniejszą szczegółową weryfikację błędu w rozumowaniu.

Przyjrzyjmy się jeszcze stronie technicznej. Wszystkie testowane programy znały $\text{\LaTeX}$ a, jednak nie wszystkie wyniki można było wykorzystać bezpośrednio. ChatGPT wpisywał kod do wykorzystania, ale cały proces Gaussa zapisał w macierzach z pojedynczymi znakami slasha, a nie podwójnymi (zamiast $\backslash$ mamy $\backslash$). Copilot i Gemini używały macierzy prawidłowo.

W żadnym przypadku nie było możliwe bezpośrednie skopiowanie całej odpowiedzi do dokumentu. Jednym z problemów było stosowanie znaczników `##` oraz `###` do rozdzielania kroków. Ponadto Copilot wstawiał ozdobne symbole, które nie były interpretowane przez system $\text{\LaTeX}$.

Jedna z odpowiedzi Gemini zawierała nawet kompletny dokument. Ogólnie odpowiedzi tego modelu najłatwiej można dostosować do druku.

W ramach każdego z badanych narzędzi wykorzystaliśmy jedną wersję AI, jednak celowe wydaje się wypróbowanie różnych modeli w ramach tej samej platformy. Może się to wiązać z koniecznością wykupienia płatnego dostępu, jako że wypróbowane modele były całkowicie darmowe lub bezpłatne dla studentów i pracowników Politechniki Śląskiej.

Należy też spróbować wygenerować cały zestaw np. 5 zadań o podobnej trudności. Nadal pojawi się problem wiarygodności odpowiedzi i rozwiązań oraz konieczny czas na kopiowanie zadań i odpowiedzi do naszego własnego arkusza Excela.

Ostatecznie wydaje się, że użycie przedstawionych modeli nie jest na ten moment możliwe bez dokładnej weryfikacji rozwiązania. Z tego względu nie można ich rekomendować do samodzielnego stosowania przez studentów. Mogą one natomiast wspomagać pracę wykładowcy pod warunkiem krytycznej oceny rezultatów generowanych treści.

Rozwój modeli powinien z czasem wyeliminować wskazane problemy, choć zawsze pozostanie kwestia doboru zadań do konkretnego poziomu umiejętności studentów oraz wymaganych efektów uczenia się. Od tego obowiązku wykładowca nie zostanie zwolniony.

Kompletne odpowiedzi do promptów są dostępne na stronie autora <https://tales.ms.polsl.pl/marek.zabka/minut/odpowiedziAI.zip>

Tabela 1. Błędy w rozwiązaniach i odpowiedziach

AI	prompt 1	prompt 2	prompt 3
ChatGPT	poprawne	poprawne	błędna odpowiedź
Copilot	poprawne	błędna odpowiedź	błąd w rozwiązaniu (*)
Gemini	błąd w rozwiązaniu	błąd w rozwiązaniu	poprawne

(*) Po rozwinięciu odpowiedzi błąd został poprawiony.

Literatura

1. J. Ahn, R. Verma, R. Lou, D. Liu, R. Zhang, W. Yin, *Large Language Models for Mathematical Reasoning: Progresses and Challenges*, 2024, arXiv, <https://arxiv.org/abs/2402.00157> [widziano 29.06.2026 r.].
2. G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej. Cz. 1*, PWN, Warszawa 2002.
3. J. Dydak, *Artificial Intelligence And Teaching Of Linear Algebra*, 2023, doi:10.13140/RG.2.2.15727.20642.
4. J. Hu, G. Sui, *Application of Generative Artificial Intelligence in Linear Algebra Teaching*, Proceedings of the 8th International Seminar on Education, Management and Social Sciences, 2024, doi:10.2991/978-2-38476-297-2_16.
5. A.I. Kostrikin, *Wstęp do algebry. Część 1. Podstawy algebry*, PWN, Warszawa 2012.