

Marek MORAWIAK

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Co warto wiedzieć o potęgowaniu oraz logarytmowaniu?

Streszczenie. W artykule przedstawione zostały podstawowe prawa potęgowania oraz logarytmowania. Zagadnienia zilustrowane zostały licznymi przykładami. Na końcu artykułu zamieszczono zadania do samodzielnego rozwiązania. Artykuł przeznaczony jest dla uczniów szkół średnich oraz studentów wydziałów niematematycznych.

Słowa kluczowe: potęga, pierwiastek, logarytm, logarytmowanie, prawa potęgowania, prawa logarytmowania, funkcja potęgowa, funkcja logarytmiczna, funkcja wykładnicza.

1. Wstęp

Matematyka odgrywa kluczową rolę w opisie zjawisk zachodzących w świecie przyrody, techniki i ekonomii. Wśród wielu jej działów szczególne miejsce zajmują działania na potęgach i logarytmach, które pozwalają opisywać zarówno bardzo duże, jak i bardzo małe wartości, analizować tempo wzrostu oraz upraszczać skomplikowane obliczenia. Prawa potęgowania i logarytmowania stanowią podstawę wielu zagadnień omawianych na kolejnych etapach edukacji matematycznej, dlatego ich dobre zrozumienie jest niezwykle istotne.

Artykuł powstał z potrzeby uporządkowania oraz przystępnego przedstawienia najważniejszych własności działań na potęgach i logarytmach dla studentów pierwszego semestru kierunków politechnicznych. W praktyce uczniowie często napotykają trudności związane z poprawnym stosowaniem wzorów, rozróżnianiem działań oraz interpretacją zależności między potęgowaniem a logarytmowaniem. Artykuł ten ma na celu nie tylko przypomnienie podstawowych reguł, lecz także pokazanie ich praktycznego zastosowania w rozwiązywaniu zadań matematycznych.

W dalszej części opracowania zostaną omówione prawa potęgowania, takie jak mnożenie i dzielenie potęg o tych samych podstawach, potęgowanie potęgi czy własności potęg o wykładnikach ujemnych i ułamkowych. Następnie przedstawione zostaną podstawowe prawa logarytmowania, w tym logarytm iloczynu, ilorazu i potęgi. Na sam koniec zestawione zostaną wykresy funkcji potęgowych, wykładniczych oraz logarytmicznych oraz podane ich własności. Zagadnienia występujące w artykule zilustrowane zostaną przykładami oraz zadaniami, mającymi ułatwić zrozumienie omawianych treści i wskazać najczęściej popełniane błędy. Dzięki temu artykuł będzie stanowił pomoc zarówno dla uczniów i studentów utrwalających wiedzę, jak i dla nauczycieli poszukujących materiałów dydaktycznych.

2. Potęga oraz podstawowe prawa potęgowania

2.1. Definicja potęgowania

Potęgowanie jest jednym z kluczowych pojęć w matematyce, stanowiąc naturalne rozwinięcie działań arytmetycznych, takich jak dodawanie i mnożenie. O ile mnożenie można interpretować jako wielokrotne dodawanie tej samej liczby, o tyle potęgowanie, dla wykładników naturalnych dodatnich, jest skróconym zapisem wielokrotnego mnożenia jednakowych czynników. Dzięki temu pozwala w sposób zwięzły i przejrzysty zapisywać oraz analizować wyrażenia zawierające powtarzające się operacje. W tym artykule przyjmujemy, że najmniejszą liczbą naturalną dodatnią jest 1, a sam zbiór liczb naturalnych to $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Definicja 1 (potęga o wykładniku naturalnym dodatnim). Dla dowolnej liczby rzeczywistej a oraz dodatniej liczby naturalnej n potęgę a^n definiujemy jako iloczyn n jednakowych czynników równych a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n,$$

gdzie a nazywamy podstawą potęgi, n nazywamy wykładnikiem potęgi.

W dalszym uogólnieniu pojęcie potęgowania rozszerza się na wykładniki całkowite, wymierne, a także rzeczywiste, co pozwala opisywać bardziej złożone zjawiska i zależności.

Definicja 2 (potęga o wykładniku zerowym). Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ definiujemy:

$$a^0 = 1.$$

Definicja 3 (potęga o wykładniku całkowitym ujemnym). Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ oraz liczby całkowitej ujemnej m potęgę a^m definiujemy następująco:

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}}.$$

Definicja 4 (potęga o wykładniku wymiernym). Jeżeli m jest liczbą całkowitą, n liczbą naturalną dodatnią oraz ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny, to potęgę $a^{\frac{m}{n}}$ definiujemy następująco:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

przy czym dla n parzystych liczba pod pierwiastkiem musi być nieujemna.

Z kolei definicja potęgi o wykładniku rzeczywistym wymaga zastosowania teorii granic. Przykładowo chcąc obliczyć $a^{\sqrt{5}}$ bierzemy dowolny ciąg (b_n) liczb wymiernych zbieżny do $\sqrt{5}$ i tworzymy nowy ciąg postaci:

$$(a^{b_1}, a^{b_2}, a^{b_3}, \dots, a^{b_n}, \dots).$$

Przyjmujemy, że granica tego ciągu jest równa $a^{\sqrt{5}}$. Oczywiście należy tutaj udowodnić, że granica ta zawsze istnieje oraz nie zależy od wyboru ciągu (b_n) . Dowody tych faktów można znaleźć np. w [3]. Warto także pamiętać, że w tym wypadku przyjmujemy $a > 0$.

Przytoczenie powyższych definicji ma na celu pokazanie czytelnikowi w jaki sposób matematycy rozszerzają definicje pojęć. Osobom zainteresowanym tematem rozszerzenia pojęcia potęgi na pozostałe przypadki oraz dowodami podstawowych praw potęgowania, można polecić [1], [2] oraz [3].

Z dydaktycznego punktu widzenia nauczanie potęgowania wymaga stopniowego przechodzenia od intuicyjnego rozumienia jako wielokrotnego mnożenia do bardziej abstrakcyjnych ujęć, obejmujących wykładniki ujemne i ułamkowe. Istotne jest także kształtowanie umiejętności stosowania praw działań na potęgach oraz interpretowania ich w kontekście praktycznym.

2.2. Podstawowe prawa potęgowania

Przejdźmy teraz do podstawowych praw potęgowania.

Podstawowe prawa potęgowania

Niech a , b , c oraz d będą liczbami rzeczywistymi, dla których działania po obu stronach znaku $=$ mają sens. Wówczas:

1. $a^c \cdot a^d = a^{c+d}$,
2. $\frac{a^c}{a^d} = a^{c-d}$,
3. $(a^c)^d = a^{c \cdot d}$,
4. $a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$,
5. $\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$,
6. $a^{-c} = \frac{1}{a^c}$.

Przykład 1. Poniższe wyrażenia zapiszemy w postaci pojedynczej potęgi:

- a) $2^9 \cdot 2^4 = 2^{13}$, (zastosowano wzór 1)
- b) $\frac{4^7}{4^5} = 4^2$, (zastosowano wzór 2)
- c) $(3^2)^3 = 3^6$, (zastosowano wzór 3)
- d) $2^4 \cdot 3^4 = 6^4$, (zastosowano wzór 4)
- e) $\frac{8^5}{4^5} = \left(\frac{8}{4}\right)^5 = 2^5$, (zastosowano wzory 2 oraz 5)
- f) $\frac{1}{4^6} = 4^{-6}$, (zastosowano wzór 6)

Rozpatrzmy teraz nieco trudniejszy przykład, w którym pokażemy własności potęgowania „w akcji”.

Przykład 2. Obliczmy:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \frac{4^{31} + 16^{15}}{2^{61} + 8^{21}}.$$

Mamy:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \frac{4^{31} + 16^{15}}{2^{61} + 8^{21}} = (2^{-2})^{-2} \cdot \frac{(2^2)^{31} + (2^4)^{15}}{2^{61} + (2^3)^{21}} = 2^4 \cdot \frac{2^{62} + 2^{60}}{2^{61} + 2^{63}} = 16 \cdot \frac{2^{62} + 2^{60}}{2^{61} + 2^{63}}.$$

Skorzystamy teraz z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania, aby w liczniku oraz mianowniku powyższego ułamka wyłączyć przed nawias wspólny czynnik. Korzystając dalej z praw potęgowania oraz

faktu, że wspólnym czynnikiem w liczniku i mianowniku jest 2^{60} , otrzymujemy:

$$16 \cdot \frac{2^{62} + 2^{60}}{2^{61} + 2^{63}} = 16 \cdot \frac{2^{60}(2^2 + 1)}{2^{60}(2 + 2^3)} = 16 \cdot \frac{4 + 1}{2 + 8} = 16 \cdot \frac{5}{10} = 8.$$

Podstawowe prawa pierwiastkowania

Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi, m liczbą całkowitą oraz n i k liczbami naturalnymi, dla których działania po obu stronach znaku $=$ mają sens. Wówczas:

$$7. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b},$$

$$8. \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

$$9. \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}.$$

Zwróćmy uwagę, że prawa pierwiastkowania są szczególnym przypadkiem praw potęgowania dla wykładnika $\frac{1}{n}$, gdzie n to dodatnia liczba naturalna. Przykładowo, własność 7 to szczególny przypadek własności 4, gdy przyjmiemy $c = \frac{1}{n}$. Rozpatrzmy teraz kilka prostych przykładów.

Przykład 3. Korzystając z praw potęgowania zapiszemy podane wyrażenia w postaci jednej potęgi:

$$a) \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2^4} = (2^4)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{4}{5}}, \quad (\text{zastosowano definicję potęgi o wykładniku wymiernym oraz wzór 3})$$

$$b) \sqrt[7]{8} \cdot \sqrt[7]{27} = \sqrt[7]{8 \cdot 27} = \sqrt[7]{2^3 \cdot 3^3} = \sqrt[7]{(2 \cdot 3)^3} = \sqrt[7]{6^3} = 6^{\frac{3}{7}}, \quad (\text{zastosowano kolejno wzory 7, 4 oraz definicję 4})$$

$$c) \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{\frac{16}{4}} = \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{2^2} = 2^{\frac{2}{5}}, \quad (\text{zastosowano kolejno wzór 8 oraz definicję 4})$$

$$d) \sqrt[3]{\sqrt[5]{625}} = \sqrt[15]{5^4} = 5^{\frac{4}{15}}, \quad (\text{zastosowano kolejno wzór 9 oraz definicję 4})$$

Wykorzystajmy teraz zdobytą wiedzę w kolejnym zadaniu.

Przykład 4. Sprawdźmy, czy liczba $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt[5]{32}}$ jest liczbą naturalną.

Otrzymujemy:

$$\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt[5]{32}} = \sqrt[3]{2 \cdot (2^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2^5)^{\frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2.$$

Widzimy zatem, że nasza liczba jest liczbą naturalną.

Powyższe przykłady prezentują co prawda różne poziomy trudności, jednak można powiedzieć, że są zadaniami, które pojawiają się raczej na poziomie szkoły średniej. Na studiach często wykonujemy podobne działania na wyrażeniach zawierających zmienną lub kilka zmiennych, a to często sprawia już spore problemy.

Przykład 5. Podane wyrażenia przedstawimy w postaci jednej potęgi:

$$a) \sqrt{\sqrt{\sqrt{x^3}}} = \left(\left((x^3)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = (x^3)^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{3}{8}} \quad (\text{dla } x \geq 0),$$

$$b) \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{a^3} \cdot a^3} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{3}{2}} \cdot a^3} = \frac{a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}}}{a^{\frac{3}{2} + 3}} = \frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{9}{2}}} = a^{\frac{5}{2} - \frac{9}{2}} = a^{-2} \quad (\text{dla } a > 0),$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad & \frac{y^2 \cdot \sqrt[3]{y}}{\frac{1}{\sqrt[3]{y}} \cdot \sqrt[3]{y^4}} = \frac{y^2 \cdot y^{\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{4}{3}}} = \frac{y^{2+\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}} = y^{2+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} = y^{\frac{11}{6}} \quad (\text{dla } y > 0), \\
\text{d)} \quad & \frac{\sqrt[5]{x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \cdot \sqrt[5]{x^2}} = \frac{(x \cdot x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}}} = \frac{x^{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}}{x^{-\frac{14}{15}}} = \frac{x^{\frac{4}{15} + \frac{1}{2}}}{x^{-\frac{14}{15}}} = x^{\frac{23}{30} + \frac{28}{30}} = x^{\frac{51}{30}} \quad (\text{dla } x > 0), \\
\text{e)} \quad & \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x^5}}{x \cdot \sqrt[6]{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x+1}} + \frac{x^{\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}}{x^{1+\frac{1}{6}}} = (\sqrt{x}-1) + 1 = x^{\frac{1}{2}} \quad (\text{dla } x \geq 0).
\end{aligned}$$

W podpunkcie e dodatkowo zastosowaliśmy wzór skróconego mnożenia: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Na zakończenie wróćmy na chwilę do definicji 4. Jednym z jej założeń było, że ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny. Pytanie tylko, dlaczego jest to konieczne. Zastanówmy się ile wynosi $(-1)^{\frac{2}{6}}$. Stosując prawa potęgowania mamy:

$$(-1)^{\frac{2}{6}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{6}} = 1^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{1} = 1,$$

ale również:

$$(-1)^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1.$$

Czyli pojawia się sprzeczność¹. Założenie o nieskracalności wskazuje, że należy najpierw skrócić $\frac{2}{6}$ do $\frac{1}{3}$, a wówczas $(-1)^{\frac{1}{3}}$ jest równe -1 .

3. Logarytm oraz podstawowe prawa logarytmowania

3.1. Definicja logarytmu

Logarytmy są jednym z tych pojęć matematycznych, które początkowo mogą wydawać się trudne i abstrakcyjne, lecz w rzeczywistości pełnią bardzo praktyczną i porządkującą rolę. Ich wprowadzenie wiąże się bezpośrednio z potęgowaniem — działaniem, które szybko prowadzi do bardzo dużych lub bardzo małych liczb. Logarytmy pozwalają odwrócić ten proces i odpowiedzieć na pytanie: do jakiej potęgi należy podnieść daną liczbę, aby uzyskać określony wynik? W kontekście dydaktycznym szczególnie ważne jest zrozumienie, że logarytmy nie są jedynie kolejnym formalnym narzędziem, lecz stanowią naturalne rozszerzenie wcześniej poznanych zagadnień. Dzięki nim możliwe staje się upraszczanie skomplikowanych obliczeń, przekształcanie wyrażeń oraz rozwiązywanie równań, które bez ich użycia byłyby znacznie trudniejsze do analizy.

W niniejszym rozdziale wprowadzone zostaną podstawowe definicje logarytmów, ich własności oraz związki z działaniami na potęgach. Szczególny nacisk zostanie położony na rozwijanie intuicji oraz stopniowe budowanie zrozumienia — od prostych przykładów po bardziej złożone zastosowania.

Rozważmy równanie $2^x = 8$. Ponieważ $2^3 = 8$, otrzymujemy od razu rozwiązanie $x = 3$. Co jednak zrobić z równaniem $2^x = 7$? Możemy oszacować, że x jest między 2 a 3, gdyż $2^2 < 7 < 2^3$, jednak nigdy nie zapiszemy wyniku dokładnie za pomocą znanych operacji. W tym celu wprowadzamy logarytm.

Definicja 5. Niech dane będą liczby rzeczywiste a , b takie, że $a > 0$, $a \neq 1$ i $b > 0$. Logarytmem przy podstawie a z liczby b nazywamy taką liczbę c , do której należy podnieść a , aby uzyskać liczbę b , tzn:

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b.$$

¹ Wynik działania nie jest jednoznaczny.

Mamy zatem:

- $\log_3 9 = 2$, ponieważ $3^2 = 9$,
- $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$, ponieważ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$,
- $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, ponieważ $4^{\frac{1}{2}} = 2$,

Trzy ważne fakty

1. Dla dowolnej dodatniej i różnej od 1 liczby a zachodzi równość:

$$\log_a 1 = 0.$$

2. Dla dowolnej dodatniej i różnej od 1 liczby a zachodzi równość:

$$\log_a a = 1.$$

3. Niech b będzie liczbą rzeczywistą dodatnią. W matematyce wyróżniamy dwa „specjalne” zapisy logarytmów w zależności od ich podstaw, mianowicie:

- zapis $\log b$ oznacza logarytm dziesiętny, czyli logarytm przy podstawie 10,
- zapis $\ln b$ oznacza logarytm naturalny, czyli logarytm przy podstawie e

gdzie:

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

która w przybliżeniu wynosi 2,718.

W związku z powyższym możemy zapisać:

- $\log 1000 = 3$, ponieważ $10^3 = 1000$,
- $\log 0,01 = -2$, ponieważ $10^{-2} = 0,01$,
- $\ln e^3 = 3$, ponieważ $e^3 = e^3$.

3.2. Podstawowe prawa logarytmowania

W tym rozdziale przedstawimy podstawowe prawa logarytmowania, takie jak logarytm potęgi, iloczynu, ilorazu oraz prawo o zamianie podstawy logarytmu. Prawa te wynikają bezpośrednio z definicji logarytmu i stanowią podstawę wielu przekształceń algebraicznych.

Na podstawie definicji logarytmu wiemy, że $\log_2 8 = 3$, ponieważ $2^3 = 8$. Dalej możemy powiedzieć, że $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$. Zwróćmy uwagę, że $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$. Oto kilka innych podobnych przykładów:

- $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$,

- $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$,
- $\log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Powyższą obserwację możemy zapisać w następujący sposób.

Logarytm potęgi — przypadek szczególny

Dla dowolnej dodatniej liczby a różnej od 1 oraz dowolnej liczby rzeczywistej b zachodzi równość:

$$\log_a a^b = b.$$

Własność ta wynika bezpośrednio z definicji logarytmu.

Przykład 6. Obliczmy:

- a) $\log 100 = \log 10^2 = 2$,
- b) $\log_6 \frac{1}{36} = \log_6 6^{-2} = -2$,
- c) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$,
- d) $\log_3 9\sqrt[3]{3} = \log_3 (3^2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}) = \log_3 3^{\frac{7}{3}} = \frac{7}{3}$,
- e) $\log_2 \frac{16\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{32}} = \log_2 \frac{2^4 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{5}{4}}} = \log_2 2^{\frac{14}{12}} = \log_2 2^{\frac{41}{12}} = \frac{41}{12}$.

Widzimy, że znajomość praw potęgowania jest tutaj konieczna, szczególnie przy trudniejszych przykładach. Zauważmy teraz, że:

$$8 = 2^3 = 2^{\log_2 8}.$$

Także tutaj możemy uogólnić obserwację.

Dla dowolnej dodatniej liczby a różnej od 1 oraz dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej b zachodzi równość:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Prawo to jest szczególnie użyteczne m.in. podczas rozwiązywania równań i nierówności. Oto prosty przykład.

Przykład 7. Rozwiążemy równanie:

$$\sqrt{4^{6x-4}} = 5.$$

Korzystając z praw potęgowania, możemy je zapisać w postaci:

$$2^{3x-2} = 5.$$

Wiemy, że $5 = 2^{\log_2 5}$ więc:

$$2^{3x-2} = 2^{\log_2 5}.$$

Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa, zatem:

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= \log_2 5, \\ x &= \frac{\log_2 5 + 2}{3}. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem równania jest liczba $\frac{\log_2 5 + 2}{3}$.

Kolejnym ważnym prawem logarytmowania jest twierdzenie o zamianie podstawy logarytmu.

Zamiana podstawy logarytmu

Niech dane będą liczby dodatnie a , b oraz c , przy czym a i c są różne od 1. Wówczas:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Prawo to pojawia się wszędzie tam, gdzie chcemy przeliczyć logarytm na „wygodniejszą” dla nas podstawę, albo uprościć wyrażenia. Dajmy na to, że chcemy policzyć na standardowym kalkulatorze $\log_2 7$. Większość takich kalkulatorów zawiera przyciski $\log$ oraz $\ln$. Korzystając z powyższego prawa możemy zapisać:

$$\log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2} \approx \frac{0,8451}{0,3010} \approx 2,81.$$

Zastanówmy się teraz, jak prawo o zamianie podstaw uzasadnić. Niech $\log_c b = x$ oraz $\log_c a = y$, wówczas na mocy definicji logarytmu otrzymujemy:

$$c^x = b, \quad c^y = a.$$

Jeżeli teraz liczbę $a = c^y$ podniesiemy do potęgi $\frac{x}{y}$, to na mocy praw potęgowania dostaniemy:

$$a^{\frac{x}{y}} = (c^y)^{\frac{x}{y}} = c^x = b.$$

W ten sposób otrzymujemy:

$$\log_a b = \log_a a^{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Powyższe postępowanie jest typowe dla dowodzenia praw logarytmowania. Zwróćmy uwagę, że z tego prawa od razu wynikają dwie użyteczne własności.

Wnioski z prawa o zamianie podstaw logarytmów

Niech a oraz b będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi, różnymi od 1. Wówczas:

1. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a},$
2. $\log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b.$

Przejdźmy teraz do zadań wymagających także wcześniejszych praw.

Przykład 8. Obliczmy:

$$\text{a) } \log_{16} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 16} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^4} = \frac{7}{4}$$

$$\text{b) } \log_9 27 + \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} + \frac{\log_2 \frac{1}{4}}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{3}{2} + \frac{-2}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2},$$

$$\text{c) } \log_{\sqrt[4]{8}} (4 \cdot \sqrt[3]{16}) = \frac{\log_2 (2^2 \cdot 2^{\frac{4}{3}})}{\log_2 2^{\frac{3}{4}}} = \frac{\log_2 2^{\frac{10}{3}}}{\log_2 2^{\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{10}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{40}{9},$$

$$\text{d) } \log_2 3 \cdot \log_3 4 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \log_2 4 = 2.$$

Jedną z najważniejszych zalet logarytmów jest to, że przekształcają mnożenie i dzielenie na prostsze działania — odpowiednio dodawanie i odejmowanie. To właśnie ta własność sprawiła, że przed erą kalkulatorów logarytmy były niezwykle praktyczne w obliczeniach (np. przy użyciu tablic logarytmicznych). Te szczególne własności wynikają bezpośrednio z praw działań na potęgach i stanowią fundament dalszej pracy z wyrażeniami logarytmicznymi. Wśród najważniejszych praw logarytmów znajdują się wzory dotyczące logarytmu iloczynu oraz ilorazu. Pozwalają one rozbić bardziej złożone wyrażenia na prostsze składniki, co znacznie ułatwia ich obliczanie i przekształcanie.

Logarytm iloczynu oraz logarytm ilorazu

Niech dane będą liczby rzeczywiste dodatnie a , b oraz c , przy czym $c \neq 1$. Wówczas:

$$1. \quad \log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b,$$

$$2. \quad \log_c \left(\frac{a}{b} \right) = \log_c a - \log_c b.$$

Przykład 9. Obliczmy:

$$\text{a) } \log 4 + \log 25 = \log (4 \cdot 25) = \log 100 = 2,$$

$$\text{b) } \log_4 704 - \log_4 11 = \log_4 \frac{704}{11} = \log_4 64 = 3,$$

$$\text{c) } \log_8 2 + \log_8 16 = \log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{5}{3}.$$

Wróćmy raz jeszcze do prawa o logarytmie potęgi. Rozważając wyrażenia, w których liczba jest podniesiona do pewnej potęgi, naturalne jest poszukiwanie sposobu ich uproszczenia. W takich sytuacjach kluczową rolę odgrywa możliwość „przeniesienia” wykładnika przed znak logarytmu. Wynika to z faktu, że potęgowanie polega na wielokrotnym mnożeniu tej samej liczby, a logarytm przekształca mnożenie w dodawanie — co ostatecznie prowadzi do pojawienia się czynnika w postaci wykładnika. Twierdzenie o logarytmie potęgi formalizuje tę zależność i pozwala znacząco upraszczać wyrażenia matematyczne, zwłaszcza w przypadku dużych wykładników lub bardziej złożonych obliczeń. Dzięki niemu możliwe jest przekształcanie trudniejszych działań w prostsze operacje algebraiczne, co ma istotne znaczenie zarówno w rozwiązywaniu równań, jak i w analizie różnych problemów matematycznych. Przedstawmy teraz ogólne prawo logarytmu potęgi.

Logarytm potęgi — wersja ogólna

Niech dane będą liczby rzeczywiste dodatnie a, b oraz liczba rzeczywista c , przym $a \neq 1$. Wówczas:

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b.$$

Korzystając z wcześniejszych praw bardzo łatwo uzasadnić powyższe prawo. Mamy mianowicie:

$$\log_a b^c = \frac{\log_b b^c}{\log_b a} = \frac{c}{\log_b a} = c \cdot \log_a b.$$

Znając podstawowe prawa logarytmowania, możemy przejść teraz do ciekawszych przykładów.

Przykład 10. Niech $\log 3 = a$. Każdy z poniższych logarytmów zapiszemy jako wyrażenie zawierające a .

- a) $\log 30 = \log (3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 = a + 1$,
- b) $\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3 = 2a$,
- c) $\log \sqrt[5]{9000} = \log (3^2 \cdot 1000)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot (2 \log 3 + \log 10^3) = \frac{1}{5} \cdot (2 \log 3 + 3) = \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}$,
- d) $\log \frac{81}{\sqrt{33\frac{1}{3}}} = \log 81 - \log \left(\frac{100}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 4 \log 3 - \frac{1}{2}(\log 100 - \log 3) = 4 \log 3 - \frac{1}{2}(2 - \log 3) = \frac{9}{2}a - 1$.

Zwiększmy teraz poziom trudności.

Przykład 11. Niech $\log_2 3 = a$ oraz $\log_2 5 = b$. Każdy z poniższych logarytmów zapiszemy za pomocą a oraz b .

- a) $\log_3 45 = \log_3 (9 \cdot 5) = \frac{\log_2 (9 \cdot 5)}{\log_2 3} = \frac{\log_2 3^2 + \log_2 5}{\log_2 3} = \frac{2 \log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 3} = \frac{2a+b}{a} = 2 + \frac{b}{a}$,
- b) $\log_{\sqrt[5]{8}} 75 = \frac{\log_2 (3 \cdot 5^2)}{\log_2 2^{\frac{3}{5}}} = \frac{\log_2 3 + 2 \log_2 5}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}a + \frac{10}{3}b$,
- c) $\log_{135} 4 = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 (3^3 \cdot 5)} = \frac{2 \log_2 2}{\log_2 (3^3 \cdot 5)} = \frac{2}{3 \log_2 3 + \log_2 5} = \frac{2}{3a+b}$,
- d) $\log_{15} \frac{3}{5} \cdot \log_{\sqrt{3}} 5 = (\log_{3 \cdot 5} 3 - \log_{3 \cdot 5} 5) \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\log_2 3}{\log_2 3 + \log_2 5} - \frac{\log_2 5}{\log_2 3 + \log_2 5} \right) \cdot \frac{b}{\frac{1}{2}a} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{2b}{a} = \frac{2ab-2b^2}{a^2+ab}$.

Na zakończenie zastanówmy się nad zbiorem określoności pewnych wyrażeń zawierających potęgi oraz logarytmy.

Przykład 12. Wyznaczmy teraz wszystkie wartości x , dla których dane wyrażenie ma sens liczbowy.

- a) Wyrażenie $(3x+5)^{-2}$ jest określone, gdy nie dzielimy przez zero. Oznacza to, że $3x+5 \neq 0$, stąd otrzymujemy, że $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\}$.
- b) Wyrażenie $(1-7x)^{\frac{1}{4}}$ ma sens liczbowy, gdy $1-7x \geq 0$. Zatem $x \in (-\infty, \frac{1}{7}]$.
- c) Wyrażenie $\log_3(2x-7)$ ma sens liczbowy, gdy $2x-7 > 0$, stąd mamy $x \in (\frac{7}{2}, +\infty)$.
- d) Wyrażenie $\log_{(1-x)}(3x+4)$ jest określone, gdy $3x+4 > 0$ oraz $1-x > 0$ i $1-x \neq 1$. Otrzymujemy stąd, że $x \in (-\frac{4}{3}, 0) \cup (0, 1)$.

4. Kilka informacji o wybranych funkcjach elementarnych

Pełne zrozumienie praw potęgowania oraz logarytmowania wymaga nie tylko znajomości przekształceń algebraicznych, ale również interpretacji geometrycznej w postaci wykresów funkcji potęgowych, wykładniczych i logarytmicznych.

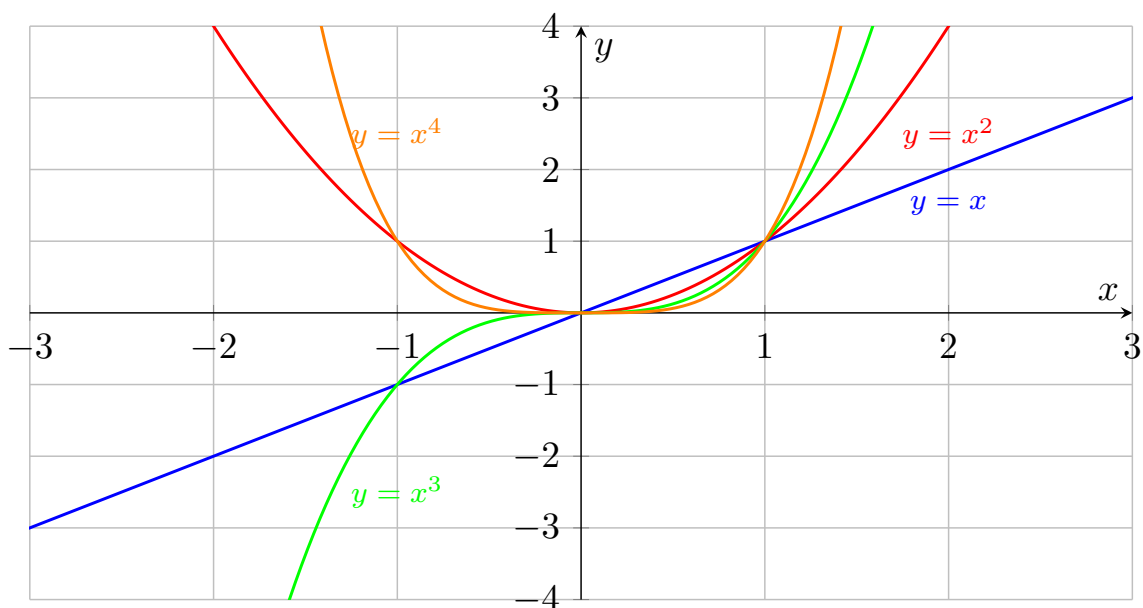
4.1. Funkcja potęgowa

Funkcję potęgową zmiennej niezależnej x określamy wzorem:

$$y = x^s,$$

gdzie s to ustalona liczba rzeczywista. Przyjmujemy, że zbiorem określoności (dziedziną) tej funkcji jest maksymalny podzbiór zbioru $\mathbb{R}$, dla którego powyższe wyrażenie ma sens liczbowy. Poniżej przedstawimy uporządkowane podejście, zgodne z naturalnym rozszerzaniem pojęcia potęgi: od wykładników naturalnych, przez całkowite ujemne, aż po wymierne niecałkowite.

Na rys. 1 przedstawiono wykresy kilku funkcji potęgowych o wykładnikach naturalnych.



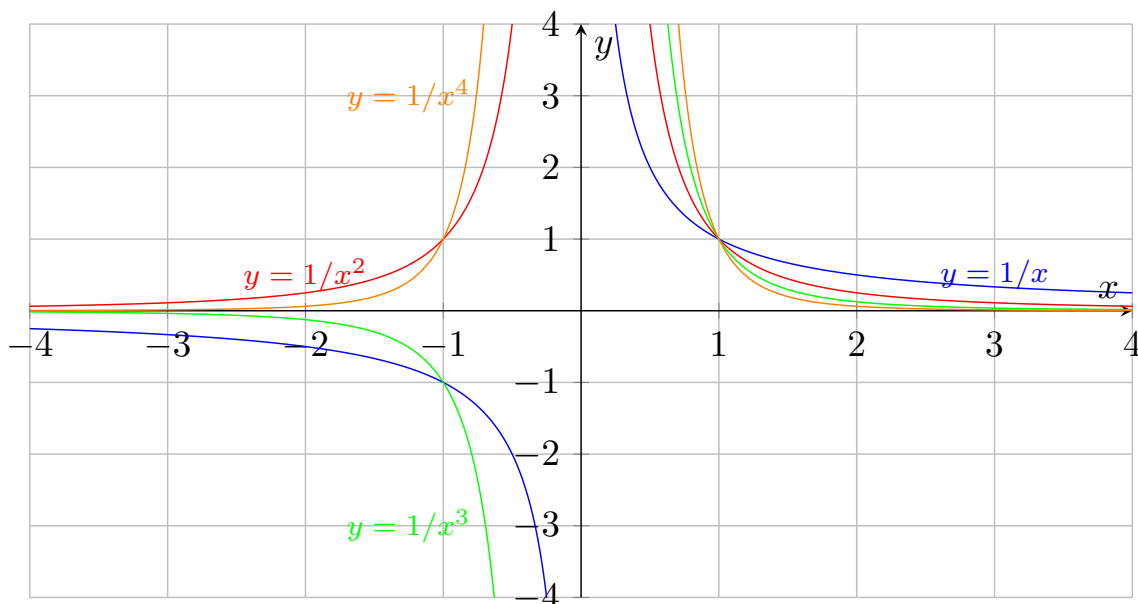
Rys. 1. Funkcje potęgowe o wykładnikach naturalnych

Najważniejsze własności funkcji $y = x^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$:

- funkcje są parzyste w przypadku wykładników parzystych,
- funkcje są nieparzyste w przypadku wykładników nieparzystych,
- w przypadku wykładników nieparzystych funkcje są rosnące oraz różnowartościowe,
- dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,
- zbiór wartości funkcji zależy od wykładnika, dla wykładnika parzystego jest to przedział $[0, +\infty)$, natomiast dla wykładnika nieparzystego zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,

- dla wykładników nieparzystych punktami wspólnymi wykresów takich funkcji są punkty $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(1,1)$,
- dla wykładników parzystych punktami wspólnymi wykresów takich funkcji są punkty $(0,0)$, $(-1,1)$, $(1,1)$.

Na rys. 2 przedstawiono wykresy kilku funkcji potęgowych o wykładnikach całkowitych ujemnych. Jeżeli wykładnik jest liczbą całkowitą ujemną, to wzór funkcji potęgowej ma postać $y = \frac{1}{x^n}$, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią.

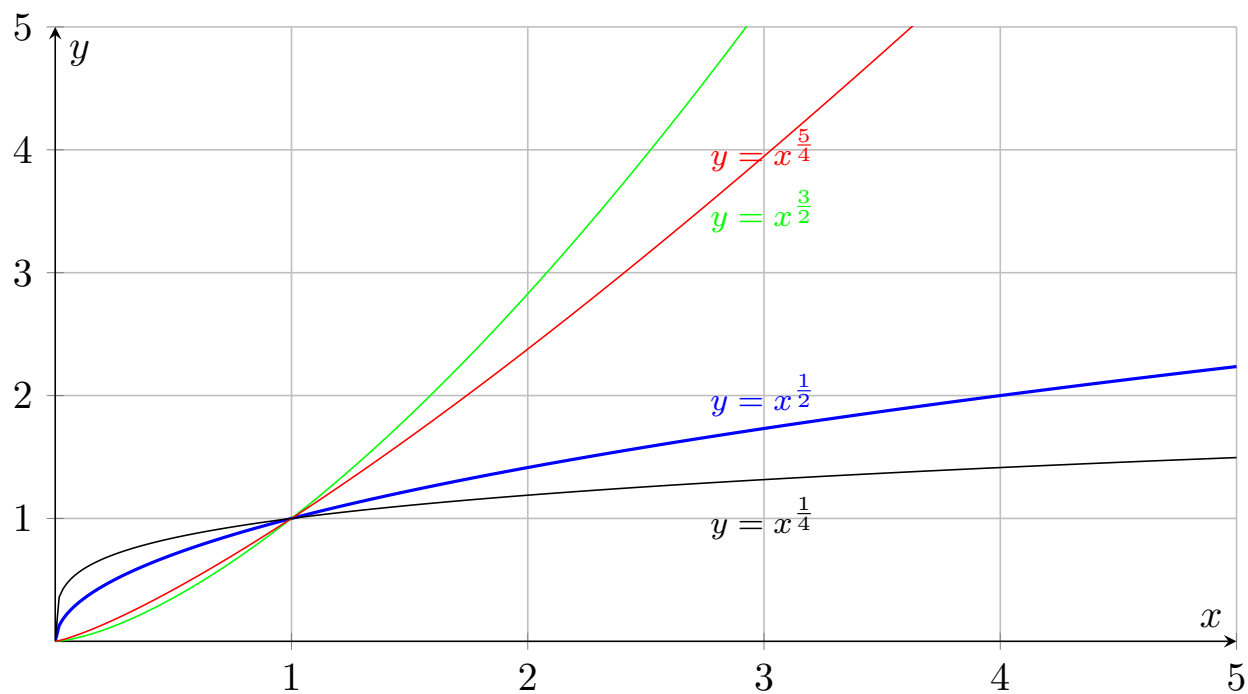


Rys. 2. Funkcje potęgowe o wykładnikach całkowitych ujemnych

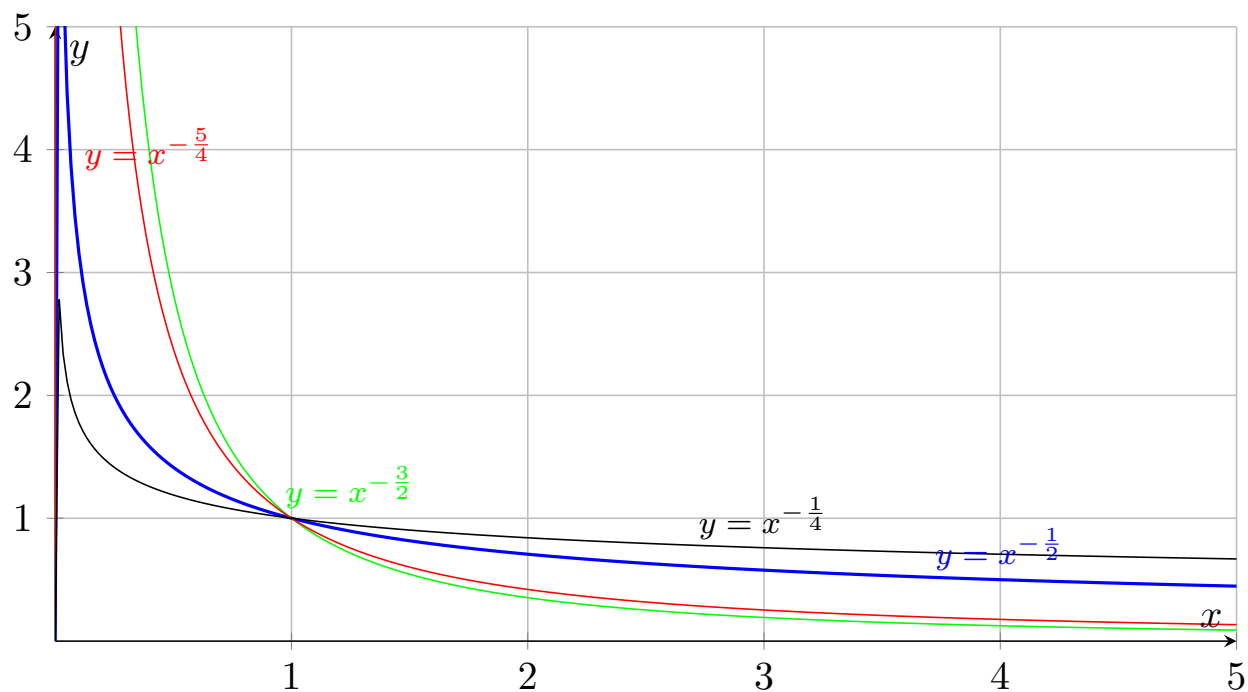
Do najważniejszych własności funkcji potęgowych o wykładniku całkowitym ujemnym możemy zaliczyć:

- funkcje są parzyste dla n parzystych,
- funkcje są nieparzyste dla n nieparzystych,
- dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- zbiór wartości funkcji zależy od n , dla n parzystego jest to przedział $(0, +\infty)$, natomiast dla n nieparzystego — zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- funkcje są monotoniczne przedziałami, dla n nieparzystego funkcja maleje w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$, natomiast dla n parzystego funkcja rośnie w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz maleje w przedziale $(0, +\infty)$,
- dla n nieparzystych punktami wspólnymi wykresów takich funkcji są punkty $(-1,-1)$, $(1,1)$,
- dla n parzystych punktami wspólnymi wykresów takich funkcji są punkty $(-1,1)$, $(1,1)$,
- proste $y = 0$ oraz $x = 0$ są asymptotami odpowiednio poziomą oraz pionową ich wykresów,
- funkcje te mogą służyć do opisu procesów odwrotnych do wzrostu potęgowego np. tłumienie, rozpraszanie energii, spadek intensywności sygnału.

Na rys. 3 – 6 przedstawiono wykresy kilku funkcji potęgowych o wykładnikach wymiernych niecałkowitych.



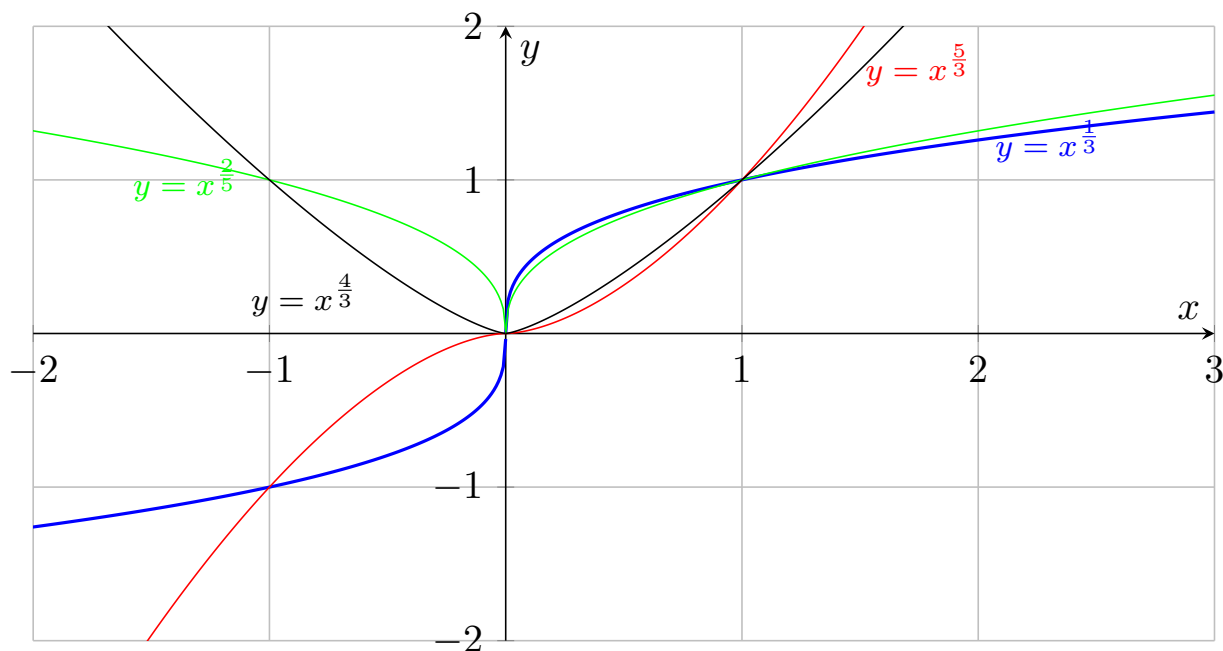
Rys. 3. Funkcje potęgowe o wykładnikach wymiernych niecałkowitych dodatnich $\frac{m}{n}$, gdzie n jest parzyste



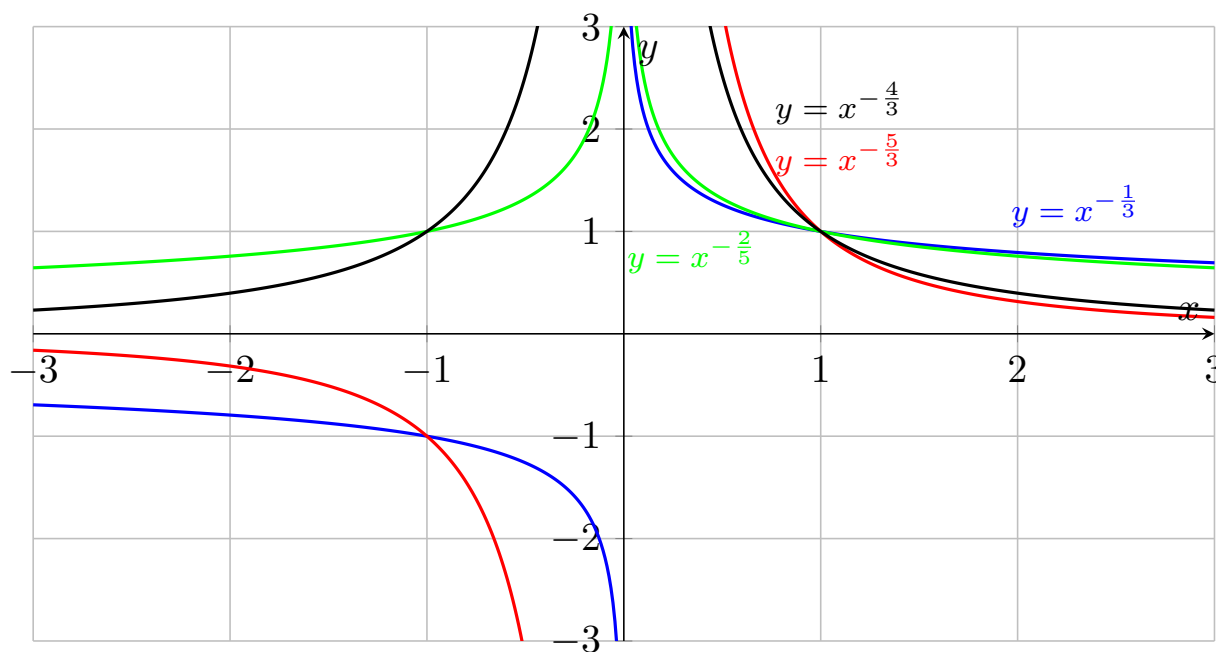
Rys. 4. Funkcje potęgowe o wykładnikach wymiernych niecałkowitych ujemnych $\frac{m}{n}$, gdzie n jest parzyste

Dla wykładnika wymiernego niecałkowitego $\frac{m}{n}$, gdzie n jest parzyste, możemy wymienić następujące własności:

- dziedzina funkcji dla $\frac{m}{n} > 0$ to zbiór $[0, +\infty)$,
- dziedzina funkcji dla $\frac{m}{n} < 0$ to zbiór $(0, +\infty)$,
- zbiór wartości funkcji dla $\frac{m}{n} > 0$ to zbiór $[0, +\infty)$,
- zbiór wartości funkcji dla $\frac{m}{n} < 0$ to zbiór $(0, +\infty)$,
- dla wykładnika wymiernego niecałkowitego $\frac{m}{n} < 0$ proste $y = 0$ oraz $x = 0$ są asymptotami odpowiednio poziomą prawostronną oraz pionową prawostronną,
- jeżeli $\frac{m}{n} > 0$, to funkcja jest rosnąca,
- jeżeli $\frac{m}{n} < 0$, to funkcja jest malejąca.



Rys. 5. Funkcje potęgowe o wykładnikach wymiernych niecałkowitych dodatnich $\frac{m}{n}$, gdzie n jest nieparzyste



Rys. 6. Funkcje potęgowe o wykładnikach wymiernych niecałkowitych ujemnych $\frac{m}{n}$, gdzie n jest nieparzyste

W przypadku wykładnika wymiernego niecałkowitego $\frac{m}{n}$, gdzie n jest nieparzyste, możemy wymienić następujące własności:

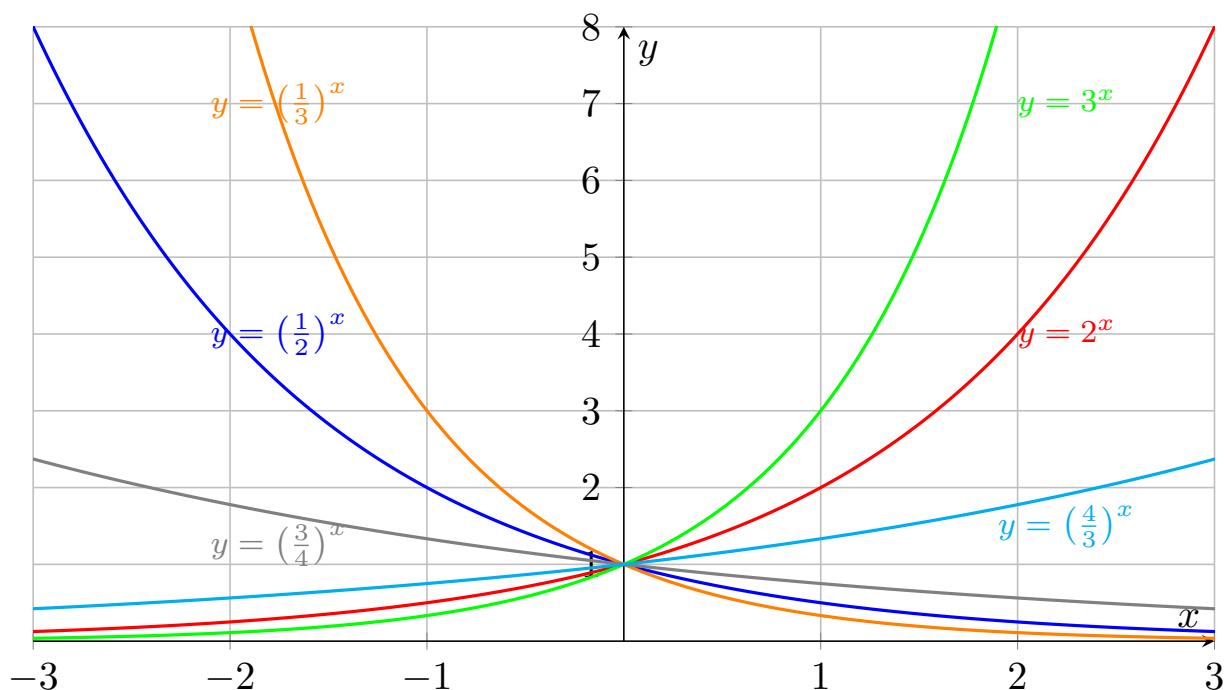
- dziedzina funkcji dla $\frac{m}{n} > 0$ to zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,
- dziedzina funkcji dla $\frac{m}{n} < 0$ to zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- zbiór wartości funkcji dla $\frac{m}{n} > 0$ to zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,
- zbiór wartości funkcji dla $\frac{m}{n} < 0$ to zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- dla wykładnika wymiernego niecałkowitego $\frac{m}{n} < 0$ proste $y = 0$ oraz $x = 0$ są asymptotami odpowiednio poziomą oraz pionową ich wykresów,
- funkcja jest monotoniczna przedziałami,
- jeżeli m jest liczbą parzystą, to funkcja jest parzysta,
- jeżeli m jest liczbą nieparzystą, to funkcja jest nieparzysta.

4.2. Funkcja wykładnicza

Funkcję wykładniczą zmiennej niezależnej x określamy wzorem:

$$y = a^x,$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą dodatnią różną od 1, a dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych. Wykresy funkcji wykładniczych mają różne własności w zależności od tego, czy $a > 1$, czy $0 < a < 1$.



Rys. 7. Funkcje wykładnicze

Funkcje wykładnicze opisują procesy multiplikatywne w czasie: wzrost populacji, rozpad promieniotwórczy, tłumienie sygnału. Przedstawmy zatem kilka ich własności:

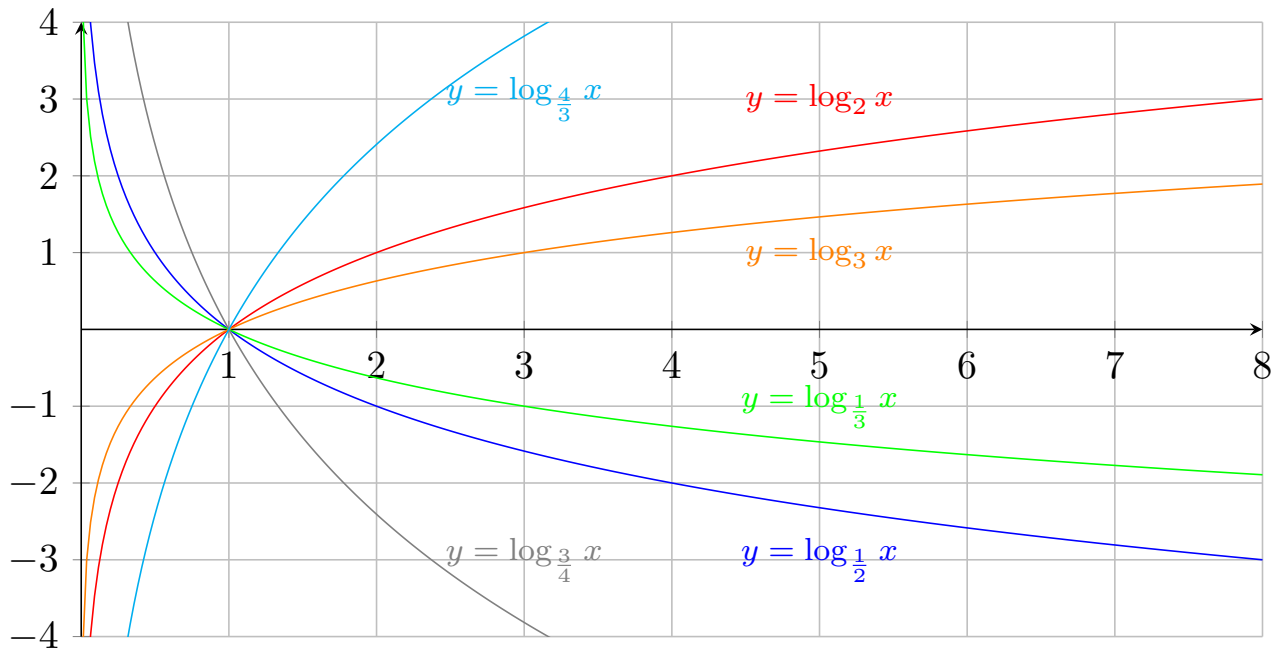
- funkcja wykładnicza jest różnowartościowa,
- dla $a > 1$ funkcja wykładnicza jest rosnąca,
- dla $0 < a < 1$ funkcja wykładnicza jest malejąca,
- wykres każdej funkcji wykładniczej przechodzi przez punkt $(0, 1)$,
- dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,
- zbiorem wartości funkcji wykładniczej jest przedział $(0, +\infty)$,
- prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą prawostronną dla $0 < a < 1$,
- prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą lewostronną dla $a > 1$,
- funkcja wykładnicza jest ograniczona z dołu.

4.3. Funkcja logarytmiczna

Funkcję logarytmiczną zmiennej niezależnej x określamy wzorem:

$$y = \log_a x,$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą dodatnią różną od 1, a dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich. Funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej, a własności jej wykresu zależą od tego, czy $a > 1$, czy też $0 < a < 1$.



Rys. 8. Funkcje logarytmiczne

Na zakończenie przedstawmy kilka własności funkcji logarytmicznych:

- funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa,
- dla $a > 1$ funkcja logarytmiczna jest rosnąca,
- dla $0 < a < 1$ funkcja logarytmiczna jest malejąca,
- wykres każdej funkcji logarytmicznej przechodzi przez punkt $(1, 0)$,
- dziedziną funkcji logarytmicznej jest przedział $(0, +\infty)$,
- zbiorem wartości funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,
- prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną wykresów funkcji logarytmicznych.

5. Podsumowanie

Podsumowując, prawa potęgowania i logarytmowania są nie tylko zbiorem matematycznych wzorów, lecz przede wszystkim narzędziem ułatwiającym analizę i rozwiązywanie wielu problemów obliczeniowych. Ich znajomość pozwala upraszczać działania, poprawnie przekształcać wyrażenia algebraiczne oraz

sprawniej rozwiązywać równania i zadania praktyczne. Zrozumienie tych praw stanowi istotny element dalszego kształcenia matematycznego oraz rozwijania umiejętności logicznego myślenia.

Przedstawione treści pokazują, że skuteczne opanowanie praw potęgowania i logarytmowania wymaga nie tylko zapamiętania wzorów, ale przede wszystkim ich świadomego stosowania w różnych sytuacjach matematycznych. Regularne ćwiczenia oraz analiza przykładów pomagają utrwalić zdobyte wiadomości i zwiększają pewność w rozwiązywaniu zadań. Zdobyta wiedza może stanowić solidną podstawę do nauki bardziej zaawansowanych zagadnień matematycznych i ich zastosowań w innych dziedzinach nauki.

6. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Korzystając z praw potęgowania, oblicz:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{5^7}{5^5}, & \text{b)} 2^3 \cdot 2^2, & \text{c)} \frac{1}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{8}, & \text{d)} \frac{(3^2)^3 \cdot \frac{1}{3}}{3^5}, \\ \text{e)} \frac{2^{10} \cdot 3^{10}}{9^5}, & \text{f)} \frac{6^8 \cdot 15^8}{9^8 \cdot 5^8}, & \text{g)} \frac{\sqrt{8} - 5\sqrt{2}}{3}, & \text{h)} \frac{\sqrt[3]{64} + 5^0}{27}, \\ \text{i)} \frac{9^{50} + 81^{26}}{27^{34}}, & \text{j)} \frac{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}}{\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}}. \end{array}$$

Zadanie 2. Korzystając z praw logarytmowania, oblicz:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \log_2 \frac{1}{4}, & \text{b)} \log \sqrt[4]{1000}, & \text{c)} \log_3 81 + \log 3 \frac{1}{3}, \\ \text{d)} \log_2 7 + \log_2 \frac{4}{7}, & \text{e)} \frac{\log_3 7}{\log_3 49}, & \text{f)} \log_{\sqrt{2}} (2 \cdot \sqrt[3]{4}), \\ \text{g)} \log_5 925 - \log_5 37, & \text{h)} \frac{7^{\log_7 8}}{\log_2 128}, & \text{i)} \log_{\sqrt[4]{27}} (9 \cdot \sqrt[4]{3}), \\ \text{j)} \frac{\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6}{\log_2 12 + \log_2 3}. \end{array}$$

Zadanie 3. Podane wyrażenie zapisz w postaci jednej potęgi:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{8}, & \text{b)} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{2} \cdot 8}}{\sqrt[4]{128}}, & \text{c)} 2^{\log_2 27} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{3} \cdot 9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{81}}, \\ \text{d)} \sqrt{b^3} \cdot b, & \text{e)} \sqrt{\sqrt{\sqrt{a} \cdot a} \cdot a}, & \text{f)} \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[5]{x^4}}, \\ \text{g)} \frac{a^4 \cdot (\sqrt[3]{b})^{12}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3} \cdot b^2}, & \text{h)} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^3} + \sqrt{x^5}}{1 + x + x^2}, & \text{i)} (\log_3(3a^3) - 3 \log_3 a) \cdot \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{\sqrt{a}}}. \end{array}$$

Zadanie 4. Niech $\log_3 4 = a$ oraz $\log_3 7 = b$. Każdy z poniższych logarytmów zapisz za pomocą a oraz b .

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \log_3 28, & \text{b)} \log_3 49, & \text{c)} \log_4 3, & \text{d)} \log_4 7, \\ \text{e)} \log_{\sqrt[3]{3}} (\sqrt[3]{7} \cdot 16), & \text{f)} \frac{\log_2 21}{\log_{49} 12}, \end{array}$$

Zadanie 5. Podane wyrażenia zapisz w postaci jednego logarytmu.

a) $\log_2 4 + \log_2 7,$

b) $\log_6 7 - \log_6 10,$

c) $\log_5 4 - 3,$

d) $\frac{\log_3 5 + 2}{\log_3 7},$

e) $2 \log x + 3 \log 2x,$

f) $\frac{1}{2} \log y^2 + \frac{1}{3} \log y^3 + \frac{1}{4} \log y^4,$

g) $\log_{\sqrt{a}} 4 - \log_a 8,$

h) $\log_a b + \log_{\sqrt{a}} b + \log_{\sqrt[3]{a}} b,$

Zadanie 6. Oblicz:

a) $\frac{2\sqrt{2} \cdot 4}{16 \cdot \sqrt{8}},$

b) $\frac{\sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}}{\sqrt[4]{8}},$

c) $\log_5 125 + \log_3 \frac{1}{9} + \log_5 5\sqrt{5},$

d) $\log_5 \frac{1}{25} + \log_2 4\sqrt{2} + 10^{\log 4},$

e) $\sqrt{\sqrt{16}} + \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[8]{64}},$

f) $\frac{4^{100} + 4^{98}}{4^{99} + 4^{101}},$

g) $\log_{\sqrt{\sqrt{8}}} \sqrt{\sqrt{\sqrt{32}}} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128 \cdot 256 \cdot 512 \cdot 1024}{32^{11}},$

h) $\frac{\log_3 11 \cdot \log_3 27 - \log_3 11}{\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 16} \cdot \sqrt{\frac{1}{1024}}},$

i) $\frac{3^{33} + 9^{16} + 27^{11}}{81^8 + 243^6} + \log_{\sqrt[10]{512}} \sqrt[5]{8}.$

Zadanie 7. Dla jakich wartości x poniższe wyrażenia mają sens liczbowy?

a) $(x+2)^2,$

b) $(x-1)^{-3},$

c) $(4x-5)^{\frac{2}{5}},$

d) $(x+3)^{\frac{5}{2}},$

e) $(2x+1)^{-\frac{2}{3}},$

f) $(3x-1)^{-\frac{3}{2}},$

g) $\log_2 (x+1),$

h) $\log (5-4x),$

i) $\log_{(2x+1)} 7,$

j) $\log_{(3x+2)} (5-2x).$

Odpowiedź 1.

a) 25,

b) 32,

c) $\frac{1}{2},$

d) 1,

e) $1024 = 2^{10},$

f) $256 = 2^8,$

g) $-\sqrt{2},$

h) $\frac{1}{3},$

i) $\frac{82}{9},$

j) $\frac{3}{2}.$

Odpowiedź 2.

- a) -2 , b) $\frac{3}{4}$, c) 3 , d) 2 ,
e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{10}{3}$, g) 2 , h) $\frac{8}{7}$,
i) 2 , j) $\frac{1}{2} = \frac{\log_2 6}{\log_2 36} = \log_{36} 6$.

Odpowiedź 3.

- a) $2^{\frac{23}{12}}$, b) $2^{-\frac{1}{12}}$, c) $3^{\frac{55}{24}}$, d) $b^{\frac{5}{2}}$,
e) $a^{\frac{7}{8}}$, f) $x^{\frac{37}{60}}$, g) $(ab)^2$, h) $x^{\frac{1}{2}}$,
i) a^1 .

Odpowiedź 4.

- a) $a + b$, b) $2b$, c) $\frac{1}{a}$, d) $\frac{b}{a}$,
e) $\frac{2}{9}b + \frac{4}{3}a$, f) $\frac{a+2b}{a} \cdot \frac{2b}{a+1}$.

Odpowiedź 5.

- a) $\log_2 28$, b) $\log_6 \frac{7}{10}$, c) $\log_5 \frac{4}{125}$, d) $\log_7 45$,
e) $\log(8x^5)$, f) $\log(y^3)$, g) $\log_a 2$, h) $\log_a(b^6)$.

Odpowiedź 6.

- a) $\frac{1}{4}$, b) 1 , c) $\frac{5}{2}$, d) $\frac{9}{2}$,
e) 3 , f) $\frac{17}{68}$, g) $\frac{11}{6}$, h) 16 ,
i) $\frac{209}{30}$.

Odpowiedź 7.

- a) $x \in \mathbb{R}$, b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, c) $x \in \mathbb{R}$, d) $x \in [-3, +\infty)$,
e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, f) $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$, g) $x \in (-1 + \infty)$, h) $x \in (-\infty, \frac{5}{4})$,
i) $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty) \setminus \{0\}$, j) $x \in (-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}) \setminus \{-\frac{1}{3}\}$.

Literatura

1. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1967.
2. W. Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna*, PWN, Warszawa 1966.
3. W. Sierpiński, *Działania nieskończone*, Spółdzielnia Wydawnicza „Czytelnik”, Warszawa, 1948.