

Ewa ŁOBOS

Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska w Gliwicach

Pochodna funkcji jednej zmiennej i jej własności — zadania testowe

Streszczenie. Artykuł zawiera zestaw zadań testowych sprawdzających wiedzę o pochodnej funkcji rzeczywistej jednej zmiennej rzeczywistej, różniczce i ich zastosowaniach. Przeznaczony jest dla nauczycieli akademickich, którzy szukają inspiracji dydaktycznych. Może się przydać także studentom do sprawdzenia swojej wiedzy czy powtórek przed egzaminami. Prezentowane zadania wybrano z archiwalnych testów i egzaminów z analizy matematycznej.

Słowa kluczowe: pochodna funkcji rzeczywistej jednej zmiennej rzeczywistej, różniczka, monotoniczność i wypukłość, ekstrema lokalne, twierdzenia o wartości średniej.

Wstęp

Zamieszczone w tym artykule zadania wykorzystywałam w mojej pracy dydaktycznej. Od ponad dwudziestu lat egzaminy z analizy matematycznej przeprowadzam w formie testów — najpierw były one w wersji papierowej, a od czasów zdalnej edukacji jako testy na platformie Moodle (oczywiście pytania są losowane z różnych kategorii). Moje kursy na Moodle’u zawierają też testy, które można traktować jako egzaminy próbne (studenci w dogodnym dla siebie czasie mogą sprawdzić swoją wiedzę).

Pominęłam tu standardowe pytania typu *zdefiniować ...*, *wyprowadzić wzór na pochodną funkcji ...*, *sformułować twierdzenie ...*, *udowodnić, że ...*, *podać warunek konieczny dla ...*. Takie pytania spełniają swoją rolę na egzaminie ustnym, podczas którego można dopytać studenta o szczegóły, np. dlaczego ważne jest założenie, w którym miejscu korzystamy z konkretnych warunków, dlaczego coś jest konieczne/wystarczające. Na egzaminie pisemnym można jedynie sprawdzić, czy zdający zna konkretną definicję lub twierdzenie (co też jest zakładanym efektem uczenia się). W testach realizuje się to najczęściej przez pytania wielokrotnego wyboru czy zdania do uzupełnienia; przykłady takich pytań w różnych wariantach znajdują się w tym artykule. Pozostałe zadania sprawdzają zrozumienie materiału i kojarzenie faktów.

Zadania testowe zostały podzielone na sześć grup. W pierwszej sekcji zamieszczono zadania dotyczące definicji, własności i interpretacji geometrycznej pochodnej, w drugiej — różniczek rzędu pierwszego i drugiego, w trzeciej — twierzeń o wartości średniej i reguły de l’Hospitála, w czwartej — monotoniczności i ekstremów lokalnych, w piątej — pochodnej rzędu drugiego. Ostatnia grupa zadań to zadania „rysunkowe”, które sprawdzają niejako przekrojowo wiedzę o pochodnych (i nie tylko). Oczywiście powyższy podział nie jest ścisły, służy raczej jakiemuś w miarę logicznemu uporządkowaniu treści.

Prezentowane zadania mają różny stopień trudności. Są to zdania do uzupełnienia oraz pytania wielokrotnego wyboru (czasami tylko jedna odpowiedź jest poprawna). Niektóre odpowiedzi są bezsensowne, ale jest to zabieg celowy. Zamieściłam także kilka pytań opisowych, które nie nadają się do testu na platformie Moodle, ale pojawiają się na moich kartkówkach z teorii.

1. Pochodna — definicja, interpretacja, własności

1. Niech $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $h \neq 0$. Wyrażenie $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ nazywamy

- a) pochodną funkcji f w punkcie x_0
- b) pochodną funkcji f w punkcie h
- c) ilorazem różnicowym
- d) ilorazem różniczkowym
- e) różniczką funkcji f

2. Niech $y = f(x)$. Która z poniższych granic (zakładając, że jest skończona) jest równa $f'(x)$?

- a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
- b) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x}$
- c) $\lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
- d) $\lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

3. Pochodną funkcji $y = f(x)$ w punkcie $a \in D_f$ nazywamy skończoną granicę

- a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(x)}{h}$
- b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$
- c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - h) + f(a)}{h}$
- d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

4. $D_f \neq D_{f'}$ dla funkcji określonej wzorem

- a) $f(x) = \arcsin x$
- b) $f(x) = \arctan x$
- c) $f(x) = \sin x$

d) $f(x) = \tan x$

5. $D_f \neq D_{f'}$ dla funkcji określonej wzorem

a) $f(x) = \ln x$

b) $f(x) = |\ln x|$

c) $f(x) = \ln |x|$

d) $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})$

e) $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$

6. Funkcje f i f' mają jednakowe dziedziny, jeśli

a) $f(x) = \ln x$

b) $f(x) = |\ln x|$

c) $f(x) = \sqrt{x^2}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

7. Naszkicować krzywą $y = f'(x)$, gdzie $f(x) = |x|$.

8. Naszkicować krzywą $y = f'(x)$, gdzie $f(x) = \ln x$.

9. Naszkicować krzywą $y = f'(x)$, gdzie $f(x) = \arccos x$.

10. Zaznaczyć zdania prawdziwe dotyczące funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej

a) Jeżeli f jest różniczkowalna w a , to f jest ciągła w a .

b) Jeżeli f jest ciągła w a , to f jest różniczkowalna w a .

c) Ciągłość jest konieczna dla różniczkowalności.

d) Ciągłość jest wystarczająca dla różniczkowalności.

11. Zaznaczyć zdania prawdziwe dotyczące funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej

a) Każda funkcja ciągła w a jest też różniczkowalna w a .

b) Każda funkcja różniczkowalna w a jest też ciągła w a .

c) Istnieje funkcja ciągła i nieróżniczkowalna w a .

d) Istnieje funkcja nieciągła i różniczkowalna w a .

12. Wiadomo, że $f(a) = 10$ i $f'(a) = 3$. Zatem $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots\dots\dots$

13. Styczna do krzywej

a) to prosta, która ma z tą krzywą dokładnie jeden punkt wspólny

b) to graniczne położenie siecznej

c) może mieć z tą krzywą nawet nieskończenie wiele punktów wspólnych

14. Niech $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to $f'(x_0)$ jest współczynnikiem kierunkowym
- stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie x_0
 - siecznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie x_0
 - stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$
 - siecznej do krzywej $y = f(x)$ przechodzącej przez punkt $(x_0, f(x_0))$
15. Jeżeli $f(x) = x\sqrt[3]{x} - \frac{3}{2}x$, to współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(8, 4)$ jest równy
16. Jeżeli $f(x) = 2 \cos x - 3 \sin 2x$, to współczynnik kierunkowy normalnej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(0, 2)$ jest równy
17. Prosta $2x - 4y + 1 = 0$ jest styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(a, b)$. Wnioskujemy, że $f'(a) = \dots$
18. Normalna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(a, b)$ ma równanie $2x + 3y = 5$. Wnioskujemy, że $f'(a) = \dots$
19. Normalna do krzywej $y = f(x)$ w pewnym punkcie ma równanie $x = 2$. Na podstawie tej informacji możemy stwierdzić, że
- $f'(2) = 0$
 - $f'(0) = 2$
 - f nie jest różniczkowalna w punkcie 2
 - styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(2, f(2))$ nie istnieje
 - styczna do krzywej $y = f(x)$ w pewnym punkcie ma równanie $y = 0$
 - styczna do krzywej $y = f(x)$ w pewnym punkcie ma równanie $y = f(2)$
20. Funkcje f i g są różniczkowalne w przedziale $\langle 0, 5 \rangle$. Wiadomo, że:
- $$f(2) = 5, f'(2) = 3, g(2) = 1, g'(2) = -12.$$
- Zatem styczna do krzywej $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in \langle 0, 5 \rangle \end{cases}$ w punkcie odpowiadającym parametrowi $t_0 = 2$ ma równanie
21. Styczna do krzywej $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in \langle 0, 5 \rangle \end{cases}$ w punkcie odpowiadającym parametrowi $t_0 = 3$ ma równanie $y = 2x + 5$. Wiadomo, że $f'(3) = \frac{1}{4}$. Zatem $g'(3) = \dots$
22. Krzywa $y = |x - 1|$ w punkcie $(1, 0)$
- nie ma stycznej
 - ma jedną styczną, którą jest prosta o równaniu $y = 0$
 - ma jedną styczną, którą jest prosta o równaniu $x = 0$
 - ma dwie styczne o równaniach $y = x - 1$ i $y = -x + 1$

- e) ma dwie styczne o równaniach $y = x + 1$ i $y = -x - 1$
 f) ma nieskończenie wiele stycznych

23. Funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny oraz

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1,$$

$$f'(1) = -0,2, f'(2) = 5, f'(3) = 100.$$

Wiadomo, że $f = g^{-1}$. Zatem $g'(2) = \dots$

24. Wiadomo, że funkcje f i g są różniczkowalne we wszystkich punktach swoich dziedzin oraz $h = g \circ f$.
 Jeżeli:

$$f(0) = 3, f(1) = 0, f(3) = 4, \quad f'(0) = -10, f'(1) = 20, f'(3) = 14,$$

$$g(0) = 5, g(3) = 2, g(4) = 1, \quad g'(0) = 4, g'(3) = -22, g'(4) = -20,$$

to $h'(1) = \dots$

25. Wiadomo, że funkcje f i g są różniczkowalne we wszystkich punktach swoich dziedzin oraz $h = f \circ g$.
 Jeżeli:

$$f(1) = 0, f(2) = 5, f(5) = 4, \quad f'(1) = -10, f'(2) = 20, f'(5) = 14,$$

$$g(0) = 5, g(3) = 2, g(4) = 1, \quad g'(0) = -4, g'(3) = 22, g'(4) = -20,$$

to $h'(4) = \dots$

2. Różniczka

1. Jeżeli $f(x) = \frac{x^5 - 3x}{x^2}$, $a = 2$, $dx = -0,02$, to $df|_a = \dots$

2. Jeżeli $df|_a = 0,006$ przy $\Delta x = 0,004$, to $f'(a) = \dots$

3. Jeżeli $f(x) = \ln x$, $a = 3$, $dx = 0,6$, to $d^2 f|_a = \dots$

4. Niech $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Jeżeli istnieje różniczka funkcji f w punkcie x_0 , to jest ona równa

a) $f'(x_0)$

b) $f'(x_0)dx$

c) $f'(x_0)dy$

d) $f'(x_0)\Delta x$

e) $f'(x_0)\Delta y$

f) $f(x_0)\Delta y$

5. Niech $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Jeżeli istnieje druga różniczka funkcji f w punkcie x_0 , to jest ona równa

a) $(f'(x_0)dx)' dx$

b) $f''(x_0)$

- c) $f''(x_0)dx^2$
- d) $(f'(x_0)dx)'$
- e) $f''(x_0)(\Delta x)^2$
- f) $f''(x_0)d^2x$

6. Niech $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Jeżeli istnieje druga różniczka funkcji f , to jest ona równa

- a) $f''(x_0)$
- b) $f''(x)d^2x$
- c) $f''(x)dx^2$
- d) $(f'(x_0)dx)'$
- e) $(f'(x_0)dx)' dy$
- f) $(f'(x)dx)' dx$

7. Jeżeli funkcje u i v są różniczkowalne, to

- a) $d(2u - v) = 2du - dv$
- b) $d(uv) = du \cdot dv$
- c) $d(u^2) = 2udu$
- d) $d(u^2) = (du)^2$
- e) $d(u^2) = d^2u$
- f) $d\left(\frac{u^2}{v^2}\right) = \frac{2u}{v^3}(vdu + u dv)$ (przy założeniu, że $v \neq 0$)
- g) $d\left(\frac{u^2}{v^2}\right) = \frac{2u}{v^3}(vdu - u dv)$ (przy założeniu, że $v \neq 0$)

8. Niech $y = f(x)$ będzie różniczkowalną funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej. Czy pochodna tej funkcji jest ilorazem różniczek dy i dx ?

- a) tak, zawsze
- b) czasami, np. gdy $dy \neq 0$
- c) czasami, np. gdy $f'(x) \neq 0$
- d) nigdy

3. Twierdzenia o wartości średniej i reguła de l'Hospitala

1. Do funkcji $f(x) = |x| + 2$ w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ nie można zastosować twierdzenia Rolle'a, ponieważ

- a) funkcja f nie jest ciągła w podanym przedziale
- b) funkcja f nie jest różniczkowalna w 0
- c) nie jest spełniony warunek $f(-1) = f(1)$
- d) funkcja f ma zbyt dużo ekstremów

2. Twierdzenie Rolle'a może być zastosowane do funkcji
- a) $f(x) = |x|$ w przedziale $\langle -3, 3 \rangle$
 - b) $f(x) = (x - 1)^3$ w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$
 - c) $f(x) = \sin x$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$
 - d) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$
3. Funkcja f jest ciągła w $\langle 1, 5 \rangle$, różniczkowalna w $(1, 5)$, $f(1) = 3$ i $f(5) = -2$. Twierdzenie Lagrange'a mówi, że w pewnym punkcie $c \in (1, 5)$ pochodna funkcji f jest równa
4. W dowodzie twierdzenie Lagrange'a potrzebne jest twierdzenie
- a) Rolle'a
 - b) Fermata
 - c) Weierstrassa
 - d) Cauchy'ego
 - e) Taylora
5. Jeżeli w twierdzeniu Lagrange'a założymy dodatkowo, że $f(a) = f(b)$, to otrzymamy twierdzenie
- a) Rolle'a
 - b) Fermata
 - c) Weierstrassa
 - d) Cauchy'ego
 - e) Taylora
6. Jeżeli w twierdzeniu Cauchy'ego założymy dodatkowo, że $f(x) = x$, to otrzymamy twierdzenie
- a) Rolle'a
 - b) Fermata
 - c) Weierstrassa
 - d) Lagrange'a
 - e) Taylora
7. Aby udowodnić twierdzenie, zastosowaliśmy na wykładzie twierdzenie
do funkcji $\varphi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)) - f(x) + f(a)$.
8. Wielomian Taylora dla pewnej funkcji f ma postać $T_4(x) = 3 - 2(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^4$. Wnioskujemy, że:
- $$f(\dots) = 3, \quad f'(1) = \dots, \quad f''(1) = \dots, \quad f^{(4)}(1) = \dots$$

9. Jeżeli $f \in C^4(\mathbb{R})$ oraz $f(5) = 2$, $f'(5) = 0$, $f''(5) = -6$, $f'''(5) = 1$, to z twierdzenia Taylora mamy:

$$\forall x \in \dots \quad f(x) = \dots,$$

gdzie jest pewną liczbą

10. Do obliczeń przybliżonych można zastosować różniczkę lub wzór Taylora. Kiedy warto skorzystać z różniczki? Dlaczego?

11. Do obliczeń przybliżonych można zastosować różniczkę lub wzór Taylora. Kiedy warto skorzystać ze wzoru Taylora? Dlaczego?

12. Regułę de l'Hospitala można zastosować do obliczenia

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{2x - \cos x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x \cos x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arccot} x}{x^2 - 3x + 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi - 4\operatorname{arccot} x}{x^2 - x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - x}{\ln(1 + x^2)}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arccos x}{1 - \ln x}$

13. Do której granicy **nie można** zastosować reguły de l'Hospitala?

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{1-x}}{x^2 - x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{1+x}}{x^2 - x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1+x}}{x^2 - x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{\arctan x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{\arccos x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi - 2\arcsin x}{x^2 - 3x + 2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi - 2\arccos x}{x^2 - 3x + 2}$

14. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$, to może się zdarzyć, że

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$ i $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -3$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$ i $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$ i $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nie istnieje

- d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$ i $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$
- e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ nie istnieje i $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nie istnieje
- f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ nie istnieje i $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$
- g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ nie istnieje i $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\ln 2$

4. Monotoniczność i ekstrema

1. Zaznaczyć zdania prawdziwe (zakładamy, że f jest funkcją różniczkowalną)

- a) $\forall x \in (a,b) f'(x) > 0 \Rightarrow f$ jest rosnąca w (a,b)
- b) $\forall x \in (a,b) f'(x) < 0 \Rightarrow f$ jest rosnąca w (a,b)
- c) $\forall x \in (a,b) f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ jest rosnąca w (a,b)
- d) $\forall x \in (a,b) f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ jest rosnąca w (a,b)
- e) f jest rosnąca w $(a,b) \Rightarrow \forall x \in (a,b) f'(x) > 0$
- f) f jest rosnąca w $(a,b) \Rightarrow \forall x \in (a,b) f'(x) < 0$
- g) f jest rosnąca w $(a,b) \Rightarrow \forall x \in (a,b) f'(x) \geq 0$
- h) f jest rosnąca w $(a,b) \Rightarrow \forall x \in (a,b) f'(x) \leq 0$

2. Jeżeli pochodna funkcji f w pewnym przedziale I jest nieujemna, to

- a) f jest rosnąca w I
- b) f jest malejąca w I
- c) f jest nierosnąca w I
- d) f jest niemalejąca w I

3. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale (a,b) . Uzupełnić:

- f jest malejąca w $(a,b) \Rightarrow \forall x \in (a,b) f'(x) \dots\dots$
- $\forall x \in (a,b) f'(x) \dots\dots \Rightarrow f$ jest malejąca w (a,b)

4. Wiadomo, że $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$. Czy funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 0,1 \rangle$? Dlaczego?

5. Wiadomo, że $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1) \cup (3,+\infty)$. Zatem

- a) funkcja f jest ciągła w zbiorze $(0,1) \cup (3,+\infty)$
- b) funkcja f jest ciągła w zbiorze $\langle 0,1 \rangle \cup \langle 3,+\infty \rangle$
- c) funkcja f jest rosnąca w zbiorze $(0,1) \cup (3,+\infty)$
- d) funkcja f jest rosnąca w zbiorze $\langle 0,1 \rangle \cup \langle 3,+\infty \rangle$

- e) funkcja f jest rosnąca w przedziałach $(0, 1)$ oraz $(3, +\infty)$
- f) funkcja f jest rosnąca w przedziałach $\langle 0, 1 \rangle$ oraz $\langle 3, +\infty \rangle$
- g) funkcja f jest rosnąca dla $x \in (0, 1)$ i dla $x \in (3, +\infty)$
- h) funkcja f jest rosnąca w punkcie $(0, 1)$
6. Kiedy prawdziwe jest zdanie:
 „ $[f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (3, +\infty)] \Rightarrow f$ jest rosnąca w zbiorze $(0, 1) \cup (3, +\infty)$ ”?
- a) zawsze
- b) czasami
- c) nigdy
7. Zdanie: „ $[f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (3, +\infty)] \Rightarrow f$ jest rosnąca w zbiorze $(0, 1) \cup (3, +\infty)$ ” jest prawdziwe, jeśli
8. Funkcja f jest rosnąca w przedziale I , funkcja g jest malejąca w przedziale I oraz $\forall x \in I |f'(x)| > |g'(x)|$. Funkcja $h = f + g$ w przedziale I jest
- a) rosnąca
- b) malejąca
- c) trudno powiedzieć (za mało informacji)
9. Jeden z wniosków z twierdzenia Lagrange’a mówi, że jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego x z przedziału I , to funkcja f jest rosnąca w przedziale I . Podać dwa powody, dla których twierdzenie odwrotne jest nieprawdziwe.
10. Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i f' zmienia znak przy przejściu przez x_0 , to ekstremum lokalnym funkcji f jest
- a) x_0
- b) $f(x_0)$
- c) $(x_0, f(x_0))$
11. Jeżeli $f'(a) = 0$, to
- a) f ma ekstremum lokalne w a
- b) f może mieć ekstremum lokalne w a
- c) f jest ciągła w a
- d) f może być nieciągła w a
- e) $y = f(x)$ ma poziomą styczną
- f) $y = f(x)$ ma pionową styczną
- g) a jest punktem wewnętrznym D_f
- h) a może być punktem izolowanym D_f

12. Jeżeli funkcja f ma w punkcie 2 maksimum lokalne równe 5, to
- a) $f'(2) = 0$
 - b) $f'(2)$ nie istnieje
 - c) $f'(2) = 0$ lub $f'(2)$ nie istnieje
 - d) $f'(5) = 0$
 - e) $f'(5)$ nie istnieje
 - f) $f'(5) = 0$ lub $f'(5)$ nie istnieje
13. Jeżeli funkcja różniczkowalna f ma w punkcie 2 maksimum lokalne równe 5, to
- a) $f'(2) = 0$
 - b) $f'(2)$ może nie istnieć
 - c) f' zmienia znak z + na - przy przejściu przez 2
 - d) f' zmienia znak z - na + przy przejściu przez 2
14. Wiadomo, że $f(a) = 5$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2$, $f'(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Wynika stąd, że
- a) f jest ciągła w a
 - b) f jest nieciągła w a
 - c) f ma minimum lokalne w a
 - d) f ma maksimum lokalne w a
 - e) f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie a
 - f) f ma ekstremum lokalne w punkcie $(a, 5)$
 - g) minimum lokalne funkcji f to 5
 - h) minimum lokalne funkcji f to $(a, 5)$
 - i) maksimum lokalne funkcji f to 5
 - j) maksimum lokalne funkcji f to $(a, 5)$
15. Wiadomo, że $f(a) = 2$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$, $f'(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Wynika stąd, że
- a) f jest ciągła w a
 - b) f jest nieciągła w a
 - c) f ma minimum lokalne w a
 - d) f ma maksimum lokalne w a
 - e) f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie a
 - f) f ma ekstremum lokalne w punkcie $(a, 2)$
 - g) minimum lokalne funkcji f to 2
 - h) minimum lokalne funkcji f to $(a, 2)$

- i) maksimum lokalne funkcji f to 2
- j) maksimum lokalne funkcji f to $(a, 2)$

16. Przypuśćmy, że

$$f(10) = 8, f'(10) = f''(10) = 0, f'''(10) = -7,$$

$$g(20) = 5, g'(20) = g''(20) = g'''(20) = 0, g^{(4)}(20) = 3.$$

Wnioskujemy, że lokalne funkcji to,
funkcja nie ma ekstremum lokalnego w

5. Druga pochodna i jej interpretacja

1. Jeżeli $f''(x) < 0$ dla każdego x z pewnego przedziału I , to wykres funkcji f w tym przedziale leży

- a) nad odpowiednią styczną
- b) pod odpowiednią styczną
- c) nad odpowiednią sieczną
- d) pod odpowiednią sieczną

2. Zaznaczyć zdania prawdziwe (zakładamy, że f jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną)

- a) $\forall_{x \in (a,b)} f''(x) > 0 \Rightarrow f$ jest wypukła w (a, b)
- b) $\forall_{x \in (a,b)} f''(x) < 0 \Rightarrow f$ jest wypukła w (a, b)
- c) $\forall_{x \in (a,b)} f''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ jest wypukła w (a, b)
- d) $\forall_{x \in (a,b)} f''(x) \leq 0 \Rightarrow f$ jest wypukła w (a, b)
- e) f jest wypukła w $(a, b) \Rightarrow \forall_{x \in (a,b)} f''(x) > 0$
- f) f jest wypukła w $(a, b) \Rightarrow \forall_{x \in (a,b)} f''(x) < 0$
- g) f jest wypukła w $(a, b) \Rightarrow \forall_{x \in (a,b)} f''(x) \geq 0$
- h) f jest wypukła w $(a, b) \Rightarrow \forall_{x \in (a,b)} f''(x) \leq 0$

3. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale (a, b) . Uzupełnić:

- f jest wklęsła w $(a, b) \Rightarrow \forall_{x \in (a,b)} f'(x) \dots\dots\dots$
- $\forall_{x \in (a,b)} f'(x) \dots\dots\dots \Rightarrow f$ jest wklęsła w (a, b)

4. Funkcja f jest wypukła w przedziale I , funkcja g jest wklęsła w przedziale I oraz $\forall_{x \in I} |f''(x)| < |g''(x)|$.
Funkcja $h = f + g$ w przedziale I jest

- a) wypukła
- b) wklęsła
- c) trudno powiedzieć (za mało informacji)

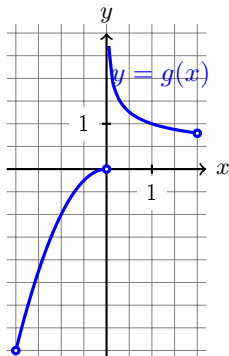
5. Przypuśćmy, że $\forall x \in (a,b) f''(x) > 0 \wedge g''(x) < 0$. Funkcja $h = f - g$ w przedziale (a, b) jest
- wypukła
 - wklęsła
 - trudno powiedzieć (za mało informacji)
6. Prosta $x = 5$ jest asymptotą krzywej $y = f(x)$, $x \in (-\infty, 5)$. Może się zdarzyć, że
- $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in (5-\varepsilon, 5) f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$
 - $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in (5-\varepsilon, 5) f'(x) < 0 \wedge f''(x) > 0$
 - $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in (5-\varepsilon, 5) f'(x) > 0 \wedge f''(x) < 0$
 - $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in (5-\varepsilon, 5) f'(x) < 0 \wedge f''(x) < 0$
 - żaden z powyższych warunków nie jest spełniony
7. Prosta $y = 5$ jest asymptotą krzywej $y = f(x)$, $x \in (0, +\infty)$. Może się zdarzyć, że
- $\exists a > 0 \forall x \in (a, +\infty) f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$
 - $\exists a > 0 \forall x \in (a, +\infty) f'(x) < 0 \wedge f''(x) > 0$
 - $\exists a > 0 \forall x \in (a, +\infty) f'(x) > 0 \wedge f''(x) < 0$
 - $\exists a > 0 \forall x \in (a, +\infty) f'(x) < 0 \wedge f''(x) < 0$
 - żaden z powyższych warunków nie jest spełniony
8. Funkcja $f(x) = x - \ln x$ w przedziale $(0, 1)$ jest
- rosnąca i wypukła
 - rosnąca i wklęsła
 - malejąca i wypukła
 - malejąca i wklęsła
9. Krzywa $y = x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 2x + 5$
- nie ma punktów przegięcia
 - ma dokładnie jeden punkt przegięcia
 - ma dokładnie dwa punkty przegięcia
 - ma dokładnie trzy punkty przegięcia
10. Krzywa $y = x^5 - \frac{5}{3}x^4 - 15$
- nie ma punktów przegięcia
 - ma dokładnie jeden punkt przegięcia
 - ma dokładnie dwa punkty przegięcia
 - ma dokładnie trzy punkty przegięcia

11. Krzywa $y = x^3 + bx^2 + cx + d$
- a) może nie posiadać punktów przegięcia
 - b) zawsze ma dokładnie jeden punkt przegięcia
 - c) może mieć dwa lub trzy punkty przegięcia
12. Krzywa $y = x^4 + bx^2 + cx$, gdzie $b < 0$,
- a) nie ma punktów przegięcia
 - b) ma dokładnie dwa punkty przegięcia
 - c) ma dokładnie jeden punkt przegięcia

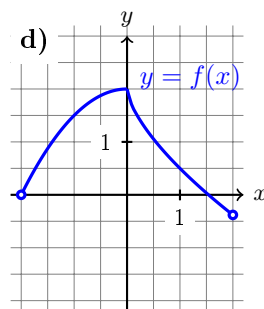
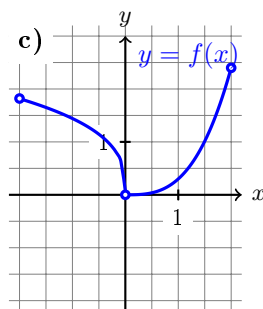
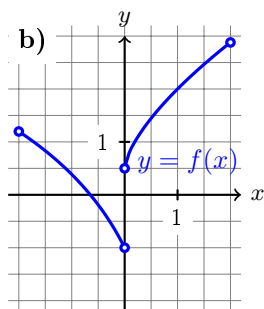
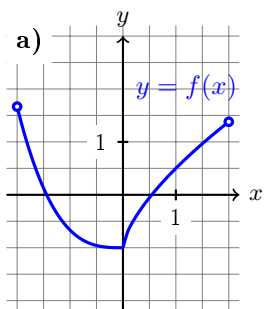
6. Własności funkcji i jej pochodnej na rysunku

1. Naszkicować wykres dowolnej funkcji f , która spełnia następujące warunki (wszystkie):
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - f jest ograniczona z dołu
 - $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
 - $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
 - f **nie jest** malejąca w $(-\infty, 1)$
 - f **nie jest** malejąca w $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
2. Naszkicować wykres dowolnej funkcji f , która spełnia następujące warunki (wszystkie):
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - f jest ograniczona
 - f ma dokładnie dwa ekstrema lokalne
 - maksimum lokalne funkcji f jest mniejsze niż jej minimum lokalne.
3. Naszkicować wykres dowolnej funkcji f , która spełnia następujące warunki (wszystkie):
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 - f jest ograniczona z góry
 - f ma maksimum lokalne w punkcie 1.

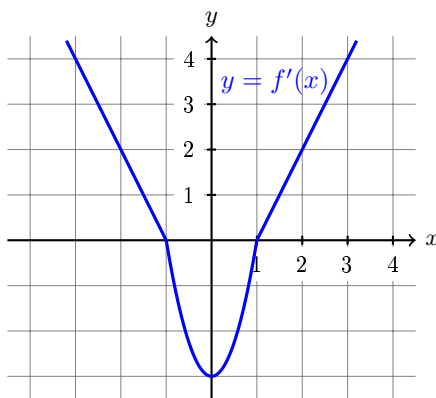
5. Rozważmy funkcję g , której wykres przedstawiono na rysunku.



Na którym z poniższych rysunków mamy funkcję f spełniającą warunek $f' = g$?



6. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres pochodnej pewnej funkcji f .



A. Na podstawie wykresu funkcji f' stwierdzamy, że funkcja f jest

- a) ciągła
- b) różniczkowalna
- c) parzysta
- d) nieparzysta
- e) ograniczona z góry
- f) ograniczona z dołu

- B.** Na podstawie wykresu funkcji f' stwierdzamy, że funkcja f jest rosnąca w przedziale
- a) $(-\infty, 0)$
 - b) $(-\infty, 0]$
 - c) $(0, +\infty)$
 - d) $\langle 0, +\infty$
 - e) $(-1, 1)$
 - f) $\langle -1, 1$
 - g) $(-\infty, -1)$
 - h) $(-\infty, -1]$
 - i) $(1, +\infty)$
 - j) $\langle 1, +\infty$
- C.** Na podstawie wykresu funkcji f' stwierdzamy, że liczba $f(1)$
- a) jest minimum lokalnym funkcji f
 - b) jest maksimum lokalnym funkcji f
 - c) może (ale nie musi) być ekstremum lokalnym funkcji f
- D.** Na podstawie wykresu funkcji f' stwierdzamy, że funkcja f
- a) ma jedno minimum lokalne
 - b) ma jedno maksimum lokalne
 - c) ma dwa ekstrema lokalne
 - d) ma trzy ekstrema lokalne
 - e) nie ma ekstremów lokalnych
- E.** Na podstawie wykresu funkcji f' stwierdzamy, że funkcja f jest wypukła w przedziale
- a) $(-\infty, 0)$
 - b) $(0, +\infty)$
 - c) $(-1, 1)$
 - d) $(-\infty, -1)$
 - e) $(1, +\infty)$
- F.** Na podstawie wykresu funkcji f' stwierdzamy, że krzywa $y = f(x)$
- a) ma dokładnie jeden punkt przegięcia
 - b) nie ma punktów przegięcia
 - c) ma dwa punkty przegięcia
 - d) ma trzy punkty przegięcia
- G.** Na podstawie wykresu funkcji f' stwierdzamy, że nie istnieje druga pochodna funkcji f w punkcie
- a) -1
 - b) 0
 - c) 1
 - d) 2

7. Uwagi

1. Baza moich pytań jest dużo większa, tu zamieściłam typowe pytania, które można modyfikować. Z pytań wielokrotnego wyboru można zrobić pytania jednokrotnego wyboru i odwrotnie. Można tak sformułować treść, aby były tylko dwie odpowiedzi: prawda/fałsz (to najłatwiejsze zadania, ale sprawdzają bardziej szczęście studenta niż jego wiedzę). Można łączyć zadania lub dzielić je na części. W tym artykule jest kilka zadań, które mają dużo wariantów do wyboru — na egzaminach liczba tych wariantów powinna być jednak ograniczona. Czasami można też tak przeredagować treść, aby powstało pytanie typu „przeciągnij i upuść na tekst”, które służy urozmaiceniu testu.
2. Na podstawie zadań przedstawionych w tym artykule można sformułować wiele innych zadań (np. zmieniając współczynniki, podając inne funkcje, krzywe, wzory, granice czy punkty).
3. Bardzo lubię zadania z rysunkami, które sprawdzają nie tylko, czy student zna jakieś definicje i twierdzenia, ale czy je również rozumie. W tym artykule te zadania dotyczą tylko pochodnych, ale na egzaminach dodaję pytania o ciągłość, asymptoty i inne własności funkcji. Przykład rozbudowanego zadania tego typu można znaleźć w [1], w którym są też inne propozycje ciekawych pytań egzaminacyjnych (nie tylko o pochodnej), opatrzone komentarzem dydaktycznym.
4. Inspiracji można też szukać w internecie. Interesujące pytania/zadania z różnych działów matematyki zamieszczono np. na stronach [2] i [3]. Nie wszystkie pytania nadają się na egzamin, ale wiele pomysłów tam zawartych warto wykorzystać na wykładach lub ćwiczeniach. Szczególną uwagę w kontekście pochodnej należy zwrócić na zadania związane z jej interpretacją i zastosowaniem w sytuacjach praktycznych.
5. Stopień trudności zadania jest kwestią subiektywną. Trudne mogą wydawać się zdającemu zadania, z którymi się dotąd nie spotkał (tak jest np. z niektórymi zadaniami z rysunkami). Z tego powodu takie pytania daję na egzaminie tylko wtedy, jeśli podobne zadania omawiałam na zajęciach lub dałam wcześniej jako zadanie domowe.
6. Świadomie nie podaję tu prawidłowych odpowiedzi. Powodów jest kilka i większość z nich jest na tyle oczywista, że nie wymaga komentarza. Tylko te pytania są ciekawe, na które nie znamy (na razie) odpowiedzi. Gorąco zachęcam studentów do samodzielnego poszukiwania poprawnych odpowiedzi (warto się także zastanowić, dlaczego inne są błędne).

Literatura

1. K. Adrianowicz, I. Nowak, *Egzamin z teorii matematyki na kierunkach inżynierskich — czy i jak warto go przeprowadzać?*, MINUT 2025 (7), s. 99–134.
2. M. Terrell, R. Connelly, D. Henderson, R. Strichartz, *GoodQuestions Project*, <https://pi.math.cornell.edu/~GoodQuestions/materials.html> [dostęp: 16.04.2026 r.].
3. *MathQUEST/MathVote. Resources for Clickers and Classroom Voting in Collegiate Mathematics*, <http://mathquest.carroll.edu/> [dostęp: 16.04.2026 r.].