

Szymon JANISZEWSKI<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Wydział Matematyki Stosowanej, Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie,  
al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków

## Definiowanie wyznacznika — dylematy dydaktyczne

**Streszczenie.** Wyznacznik macierzy to podstawowe pojęcie omawiane na każdym kursie matematyki wyższej zawierającym komponent algebry liniowej. W literaturze definiuje się wyznacznik na co najmniej cztery sposoby (a rozróżniając możliwe modyfikacje — nawet więcej). Mimo równoważności matematycznej definicji wyznacznika, jest dalece nieobojętne dydaktycznie, którą konstrukcję tego pojęcia przedstawi się słuchaczom. W artykule przeanalizowano podejścia dydaktyczne implikowane przez wybór każdej z popularnych definicji. Wobec wad i zalet tych podejść zaproponowano pewną modyfikację klasycznego kursu algebry liniowej, zachowującą pełen formalizm matematyczny, ale lepiej wspierającą intuicje związane z wyznacznikiem.

**Słowa kluczowe:** macierz, endomorfizm, wyznacznik.

### 1. Wstęp

Algebra liniowa jest stałym elementem każdego podstawowego kursu matematyki na kierunkach technicznych (i nie tylko). Zazwyczaj dział ten obejmuje algebrę macierzy, wyznaczniki, macierze odwrotne i układy równań liniowych. W wersji nieco rozszerzonej mówi się także o przestrzeniach wektorowych i odwzorowaniach liniowych.

Wyznacznik macierzy jest pojęciem, z którym w edukacji matematycznej spotykamy się dość wcześnie, bo zazwyczaj już w szkole ponadpodstawowej. To pierwsze zetknięcie najczęściej dotyczy wyznacznika macierzy stopnia 2 (czasem także 3) i jest czysto rachunkowe. Wyznacznik rozumiany jest jako liczba, która przypisana jest tablicy złożonej z czterech (lub dziewięciu elementów) w określony sposób. Takie, wydawałoby się, proste (a przez to — bardzo spłycone) podejście rodzi jednak pewne niekorzystne skutki na późniejszych etapach kształcenia, gdy formułujemy ogólną definicję wyznacznika macierzy dowolnego stopnia. Najczęstszym problemem, wynikającym z niezrozumienia sensu pojęcia, jest mechaniczne rozszerzenie schematu Sarrusa na macierze stopnia wyższego od 3. Z praktyki dydaktycznej wynika, że studenci, licząc wyznaczniki macierzy np. stopnia 4, często dopisują 2 lub 3 wiersze pod macierzą i liczą krzyżowe iloczyny. Błąd ten popełniany jest mimo poprawnego matematycznie określenia wyznacznika na wykładach z matematyki. Wygodnym (dla nauczyciela) wytłumaczeniem niepoprawności obliczeń jest

zwykły brak pilności studentów. Jednak odpowiedź na pytanie, dlaczego taki sam błąd popełnia tak wiele osób, wymaga pewnej refleksji.

Wyznacznik macierzy jest pojęciem bardzo głębokim, na co wskazuje mnogość jego zastosowań: od samej algebry liniowej (rozwiązywanie układów równań, odwracanie macierzy), poprzez geometrię analityczną (pola powierzchni, objętości, przekształcenia płaszczyzny) do analizy (całka wielokrotna) i wielu innych działów matematyki stosowanej, gdzie pojawia się w sposób, zdawałoby się, zupełnie nieoczekiwany. Także dlatego niezmiernie istotne jest, by już na poziomie definicyjnym została uchwycona jego istota i znaczenie.

W artykule najpierw zostanie przedstawiona historia wyznacznika, wydaje się bowiem, że tok myśli ludzkich prowadzących do ukształtowania się współczesnego rozumienia tego pojęcia może mieć ważne konotacje dydaktyczne. Następnie dokonamy krytycznego pod względem dydaktycznym przeglądu klasycznych sposobów definiowania wyznacznika, by dostrzec możliwość podejścia holistycznego. W końcowej części pracy przyjrzymy się jeszcze jednej definicji wyznacznika macierzy, która, mimo że nie nadaje się do zaprezentowania na podstawowym kursie dla studiów niematematycznych, warta jest uwagi.

## 2. Krótkie kalendarium

Historia wyznacznika jest długa i dosyć zaskakująca. Jest także trudna do przesledzenia, bo przez długi czas nie istniało ujednoczone nazewnictwo. Obiekty, które można by uznać za wyznaczniki w nowoczesnym rozumieniu, były nazywane inaczej, albo, co gorsza wcale, a wyrazu *wyznacznik* używano całkiem często w odniesieniu do czegoś innego. Kompletne wykłady na temat historii pojęcia wyznacznika dali Kleiner [7] i Knobloch [9]. Niniejszy rozdział powstał w oparciu o te dwie prace.

Genezy macierzy można dopatrywać się w chińskim podręczniku *Dziewięć rozdziałów o sztuce matematyki* (datowanym na 100 rok p.n.e), w którym rozwiązywano układy 3 równań liniowych z 3 niewiadomymi, wykonując operacje (chiń. *fangcheng*) na tablicach utworzonych kolumnami ze współczynników kolejnych równań. Operacje (które dziś nazwalibyśmy elementarnymi) wykonywano więc na kolumnach, a sama metoda (z dokładnością do transpozycji) odpowiada metodzie eliminacji Gaussa. Idea wyznacznika w dziele tym jednak się nie pojawia.

W 1545 roku w rozprawie *Ars magna* Gerolamo Cardano podał wzory na rozwiązanie układu 2 równań liniowych stosując metodę zbliżoną do wyznacznikowej. I chociaż on także nie pokazał konceptu nawet zbliżonego do wyznacznika, to uważa się, że otworzył doń furtkę.

Dopiero pod koniec XVII wieku, inspirowany dziełami uczonego chińskiego, japoński matematyk Seki Takakazu, analizując rugownik pary wielomianów, podał definicję wyznacznika stopnia od 2 do 5 i (błędny) wzór na wyznacznik stopnia 5. Wynik ten poprawił nieco później, publikując z kilkoma kolegami prawidłowe schematy (jap. *kōshiki* i *shajō*) liczenia wyznaczników stopnia nie większego od 5, przypominające współczesną regułę Sarrusa. Uzasadnieniem wzorów były jednak tylko przykłady.

W tym samym mniej więcej czasie układy równań liniowych badał Gottfried Leibniz, który dla wygody także ustawiał same ich współczynniki w tablice (czynił to w sposób nieco dziwaczny<sup>1</sup>, traktując indeksy jako fikcyjne współczynniki) i obliczał pewne sumy iloczynów tych współczynników, które nazywał *rezultantami* (łac. *reultans sc. aequatio*). Rachunki, które wykonywał, stały się podstawą permutacyjnej definicji wyznacznika. Rękopisy Leibniza powstałe w latach 1678–1713 pozostały przez długi czas nieznanne szerszej publiczności — zostały opublikowane dopiero pod koniec XX w.

---

<sup>1</sup>Wiele rozumowań i notacji Leibniza można uznać za dziwaczne, a samego Leibniza, który przede wszystkim był teologiem i filozofem — za ekscentryka.



Rysunek 1. Seki Takakazu. Źródło: domena publiczna

Pierwsze, elementarne informacje o wyznacznikach, ukazały się w 1748 roku, w wydanej (pośmiertnie) monografii *Treatise of algebra* Colina Maclaurina. Rozwiązując układy 2 i 3 równań liniowych z (odpowiednio) 2 i 3 niewiadomymi zdefiniował on (wprost) *wyznacznik licznika* (ang. *numerator determinant*) i *wyznacznik mianownika* (ang. *denominator determinant*), chociaż nie opisał związku pomiędzy nimi. Wynik ten pozostał niezauważony.

W 1750 roku Szwajcar Gabriel Cramer, analizując pewne zagadnienia dotyczące krzywych algebraicznych, rozwiązał (w uzupełnieniu głównego tekstu publikacji) układ równań liniowych metodą, którą dziś nazywamy wyznacznikową. Nie podał jednak żadnego dowodu swoich wzorów.

W drugiej połowie XVIII wieku Pierre–Simon de Laplace opisał za pomocą równań różniczkowych ruch planet. Równania te rozwiązywał metodą aproksymacyjną, co doprowadziło go do układu równań liniowych, którego rozwiązywalność przedyskutował używając języka wyznaczników. Nazwał je rezultatami (franc. *résultant*) nie znając przemyśleń Leibniza, bo w owym czasie nieopublikowane leżały w szufladzie. W toku badań wymyślił podwójne indeksy oraz sformułował i udowodnił twierdzenie o rozwijaniu wyznacznika. Praca Laplace’a ukazała się w 1772 roku. W tym samym roku Alexandre Vandermonde wydał pierwszy wykład teorii wyznaczników niezależniony od układów równań liniowych.

Po raz pierwszy na Zachodzie terminu *wyznacznik* (łac. *determinant*) użył Carl Gauss w 1801 roku, ale na określenie wyróżnika formy kwadratowej. On też formalnie zdefiniował macierz, mimo że rozwiązując układ równań liniowych metodą eliminacji, zapisu macierzowego nie stosował. Systematyczną teorię wyznaczników w ujęciu nowoczesnym przedstawił Augustin Cauchy w 1815 roku. To jego praca uważana jest za pierwszy podręcznik algebry liniowej, a wiele klasycznych rezultatów dotyczących wyznaczników nosi jego imię (np. twierdzenie o wyznaczniku iloczynu macierzy). Niestety, w ciągu kilkunastu kolejnych lat Cauchy wielokrotnie wracał do tej tematyki, zmieniając nawet nazewnictwo (m.in. wrócił do terminu *rezultant*), co spowodowało, że głębszy sens prac został na pewien czas zagubiony.

Aksjomatyczna definicja wyznacznika powstała prawdopodobnie w latach sześćdziesiątych XIX wieku. Opracowali ją Karl Weierstrass i Leopold Kronecker. Wynik ten został opublikowany dopiero w 1903 roku.

W XIX wieku nastąpił burzliwy rozwój teorii wyznaczników. Wydano wtedy ponad 2000 prac poświęconych tej tematyce. W wieku XX teoria została uznana w dużym stopniu za domkniętą, a wyznacznik

wszedł na stałe do metod wielu działów matematyki i stał się elementem nauczania na podstawowym akademickim kursie matematyki.

### 3. Wyznacznik w polskiej szkole

Aktualna podstawa programowa [13] nie wymienia wprost terminu wyznacznik. Wskazuje jednak, że *uczeń rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych*. Naturalną konsekwencją obecności klasyfikacji układów ze względu na rozwiązywalność jest, poza „ogładem” na rysunku, próba podejścia algebraicznego. I tak, na Zintegrowanej Platformie Edukacyjnej [12] dostępne jest twierdzenie (bez nazwy i dowodu) rozstrzygające, że układ równań

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

jest oznaczony wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ . Czyli pojawia się wyznacznik stopnia 2, lecz nie zostaje nazwany. „Śmielsze” podejście prezentuje Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro. W podręczniku do matematyki dla klasy 2 liceów i techników [10] definiuje się wyznacznik macierzy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

jako liczbę równą  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , by następnie pokazać wzory Cramera i zastosować je w rozwiązywaniu i w algebraicznym badaniu rozwiązalności układów 2 równań liniowych z parametrem, na potrzeby którego sformułowano i częściowo udowodniono (co zasługuje na pochwałę) następujące

**Twierdzenie 1.** *Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & a_1^2 + b_1^2 > 0 \\ a_2x + b_2y = c_2, & a_2^2 + b_2^2 > 0 \end{cases}$$

1. *ma tylko jedno rozwiązanie jeśli  $W \neq 0$*

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W}, \end{cases}$$

2. *ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli  $W = W_x = W_y = 0$ ,*

3. *nie ma rozwiązań, jeśli  $W = 0 \wedge (W_x \neq 0 \vee W_y \neq 0)$ , gdzie*

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

W podręczniku pojawia się zatem nie tylko termin *wyznacznik*, ale nawet *macierz*! Wyznacznik ukazany jest jako wynik pewnych operacji arytmetycznych wykonywanych na współczynnikach układu równań. Celem jego liczenia jest rozwiązanie układu, więc taka a nie inna postać wzoru nie budzi wątpliwości

uczniów. Zauważyć należy, że zaprezentowany tok rozumowania blisko odwzorowuje historię wyznacznika (Leibniz, Maclaurin), którego geneza wiąże się właśnie z układami równań.

Niejako przeciwnie podejście prezentują autorzy podręczników szkolnych wydawnictwa Nowa Era. W podręcznikach tych metoda wyznacznikowa rozwiązywania układów równań jest całkowicie pominięta.

Z długoletnich obserwacji autora wynika, że znaczący odsetek studentów pierwszego roku studiów technicznych z pojęciem wyznacznika zetknął się w szkole. Umieją oni liczyć wyznaczniki stopnia 2, sporo zna także regułę Sarrusa. To, z jednej strony, bardzo dobrze, ale z drugiej — może rodzić pewne problemy, które nieformalnie nazwać można „uproszczającymi analogiami”. Jednym z nich, jest (wspomniane we wstępie) mechaniczne przenoszenie reguły Sarrusa na wyznaczniki stopni wyższych od 3. Drugi problem jest nieco subtelniejszy — pojawia się podczas badania rozwiązalności układów równań liniowych stopnia większego od 2 i polega na automatycznym uogólnieniu Twierdzenia 1 na układy równań z większą liczbą niewiadomych, a wtedy twierdzenie to jest nieprawdziwe. Można tu odwołać się do klasycznego przykładu

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases},$$

w którym układ równań jest oczywiście sprzeczny, bo równania pierwsze i trzecie implikują równość  $1 = 0$ . Jednocześnie wszystkie wyznaczniki:  $W$ ,  $W_x$ ,  $W_y$  i  $W_z$  są równe 0.

## 4. Trzy podejścia na kursie akademickim

Praktycznie każdy podstawowy kurs matematyki na studiach niematematycznych zawiera komponent algebry liniowej — teorię macierzy i układów równań liniowych. Wyznacznik macierzy kwadratowej w pełnej ogólności definiuje się najczęściej w dziale dotyczącym właśnie macierzy, podczas gdy układy równań liniowych stanowią zazwyczaj wyodrębnioną część kursu. Typowo na studiach wprowadza się wyznacznik macierzy z wykorzystaniem jednej z trzech, równoważnych definicji.

Najczęściej chyba wprowadza się wyznacznik na studiach niematematycznych z użyciem definicji indukcyjnej<sup>2</sup> [6, 8, 11]. Przyjmijmy na potrzeby dalszej części tekstu, że  $A = [a_{ij}]$  jest macierzą kwadratową stopnia  $n$  i przypomnijmy:

**Definicja 1 (indukcyjna).** *Wyznacznikiem macierzy  $A$  nazywamy liczbę oznaczaną  $\det A$  lub  $|A|$  określoną następująco:*

1. jeśli  $n = 1$ , to  $\det A = a_{11}$ ;

2. jeśli  $n \geq 2$ , to

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n},$$

gdzie  $A_{ij}$  jest macierzą otrzymaną z  $A$  przez skreślenie  $i$ -tego wiersza i  $j$ -tej kolumny.

Niewątpliwą zaletą tej definicji jest dostarczenie bezpośredniej metody liczenia wyznacznika macierzy dowolnego stopnia. Pozwala ona także bardzo łatwo pokazać schemat liczenia wyznacznika stopnia

<sup>2</sup>Jako ciekawostkę można zanotować, że Klukowski i Nabiałek definiują wyznacznik z rozwinięcia względem ostatniego wiersza. W świetle twierdzenia Laplace’a oczywiście nie jest istotne, względem którego wiersza to rozwinięcie następuje

2 i regułę Sarrusa (w dalszej części pracy wyznaczniki stopnia 2 i 3 będziemy nazywali *małymi*), czyli zagadnienia już „oswojone” przez większość słuchaczy. Ponadto, wykorzystując definicję indukcyjną można „gładko” przejść do twierdzenia Laplace’a (z dowodem, lub na studiach niematematycznych, częściej — bez niego) — słuchaczy można przekonać o jego skuteczności odpowiednio dobranymi przykładami rachunkowymi. Jednak jej wielką, niejako genetyczną, wadą jest sztuczność. „Dlaczego tak dziwnie” to najczęstsza pierwsza reakcja studentów po sformułowaniu definicji indukcyjnej. Definicja ta w najmniejszym stopniu nie pozwala zobaczyć, czym wyznacznik jest, ani wyrobić intuicji. W miarę poznawania kolejnych zastosowań wyznacznika, można się jedynie do niej przyzwyczaić, bo po prostu działa i sprawdza się w rachunkach. Dlatego najprawdopodobniej daje ona asumpt do fałszywych analogii. Poprawny tok wykładu na temat wyznacznika zdefiniowanego indukcyjnie można podsumować następująco:

#### Podjęcie pierwsze — klasyczne

macierz → definicja indukcyjna wyznacznika → schematy liczenia małych wyznaczników → przykłady rachunków wyznaczników małych (interpretacja geometryczna) i większych → twierdzenie Laplace’a, rachunki → ogólne własności wyznacznika, rachunki → macierz odwrotna → układy Cramera

Zakończywszy algebrę macierzy definiujemy indukcyjnie wyznacznik. Po omówieniu konstrukcji definicji<sup>3</sup> pokazujemy schematy liczenia małych wyznaczników z naiwną interpretacją geometryczną — należy bezpośrednim rachunkiem sprawdzić wzór na pole równoległoboku rozpiętego przez 2 wektory<sup>4</sup> (por. [11]), odnieść się do objętości równoległościanu i zasugerować możliwość uogólnienia. Warto mieć jednak świadomość, że sam rachunek nie daje jasnej odpowiedzi, na pytanie: dlaczego? Następnie przechodzimy do wyznaczników wyższych stopni, zazwyczaj ilustrując ich liczenie przykładami z  $n = 4$  i zwracając uwagę, że reguła Sarrusa już nie działa<sup>5</sup>. W przykładach warto uwzględnić macierz, która w pierwszym wierszu ma wyłącznie niezerowe elementy, a wybrana kolumna (lub inny wiersz) ma 2 lub 3 elementy zerowe. Stosując rozwinięcie analogiczne do definicji, ale względem tej kolumny (lub wiersza) pokazujemy, że obliczona w ten sposób liczba jest równa wyznacznikowi z definicji. Tak przygotowanych słuchaczy zapoznajemy z twierdzeniem Laplace’a, które w dalszej części wykładu można wykorzystać do pokazania ogólnych własności wyznacznika. Kolejne zagadnienia — macierz odwrotna, układy Cramera — już nie ogniskują się na wyznaczniku, ale w istotny sposób go wykorzystują, czyli stanowią ważne przykłady jego zastosowań i pokazują, że sztuczna definicja prowadzi do użytecznego pojęcia. Praktycznie identyczną ścieżkę dydaktyczną szczegółowo opisała i wyczerpująco opatrzyła przykładami Adrianowicz [1].

Reasumując: definicja indukcyjna nie jest dydaktycznie dobra, ale na studiach, na których nie oczekuje się od studentów precyzyjnego rozumienia pojęć matematycznych, a wymaga się dużej biegłości rachunkowej, może być rozwiązaniem najefektywniejszym. I to chyba decyduje o jej popularności wśród wykładowców i autorów podręczników.

Druga, często wykorzystywana przez dydaktyków możliwość, to zdefiniowanie wyznacznika z zastosowaniem elementów kombinatoryki [2, 3].

**Definicja 2 (permutacyjna).** *Wyznacznikiem macierzy  $A$  nazywamy liczbę oznaczaną  $\det A$  lub  $|A|$  określoną następująco:*

$$\det A = \sum_{p \in P_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)},$$

<sup>3</sup>Uczeń polskiej szkoły z technikami indukcyjnymi najczęściej już się nie styka.

<sup>4</sup>Bez znajomości szerszego kontekstu fakt ten można by uznać za miłą zbieg okoliczności.

<sup>5</sup>Nawet najostrzejsze wyróżnienie tej informacji nie uchroni jej przed zapomnieniem.

gdzie  $P_n$  jest zbiorem permutacji zbioru  $n$ -elementowego.

Wykład oparty na definicji permutacyjnej można poprowadzić na przykład tak:

#### Podjęcie drugie — kombinatoryczne

Macierz  $\rightarrow$  wstawka kombinatoryczna  $\rightarrow$  definicja permutacyjna wyznacznika  $\rightarrow$  schematy małych wyznaczników, rachunki, interpretacja geometryczna  $\rightarrow$  twierdzenie Laplace'a z (przynajmniej) szkicowym dowodem, rachunki  $\rightarrow$  ogólne własności wyznacznika (na bazie twierdzenia Laplace'a), rachunki  $\rightarrow$  macierz odwrotna  $\rightarrow$  układy Cramera

Definicja ta jest „przyjaźniejsza” w zapisie i nie wywołuje kontrowersji wśród słuchaczy, którzy dają się przekonać, że tak określony wyznacznik jest swoistym liczbowym identyfikatorem macierzy — wystarczy pokazać na przykład, że obejmuje iloczyn elementów ze wszystkich wierszy i po jednym z każdej kolumny. Wadą definicji permutacyjnej jest to, że wymaga oderwania się od algebry liniowej i zajęcia się kombinatoryką: przed jej wprowadzeniem należy precyzyjnie zdefiniować permutację, pokazać sposoby jej zapisu, wprowadzić pojęcia transpozycji i znaku permutacji. W przypadku studiów informatycznych, obejmujących kurs matematyki dyskretnej, może to być nawet użyteczne, ale na innych kierunkach wywołuje u studentów (czasem spory) dyskomfort.

Odtworzenie schematów liczenia małych wyznaczników jest na podstawie definicji permutacyjnej bardzo proste. Liczenie wyznaczników wyższych stopni jest oczywiście możliwe, ale dosyć kłopotliwe. Aby uniknąć tych trudności można postąpić dwojako: sformułować twierdzenie Laplace'a (konieczny wydaje się przynajmniej szkic dowodu, bo nie sposób dokonać sprytnego dydaktycznie przejścia od definicji permutacyjnej do rozwinięcia) albo pokazać ogólne własności wyznacznika, wynikające wprost z definicji (wyznacznik macierzy trójkątnej) i zastosować je w rachunkach (tak czynią np. Birkhoff i Mac Lane w [2]). Dalszy ciąg jest już zwyczajny: macierz odwrotna, układy Cramera.

Trzecie podejście to definicja aksjomatyczna, która formułowana może być na różne sposoby [5, 6]. Niech  $c$  będzie skalar, a  $k_m$  oznacza  $m$ -tą kolumnę macierzy.

**Definicja 3.** Wyznacznikiem nazywamy funkcję określoną na zbiorze macierzy kwadratowych stopnia  $n$ , spełniającą warunki:

1.  $\det [k_1 \dots ck_j \dots k_n] = c \det [k_1 \dots k_j \dots k_n]$ ,
2.  $\det [k_1 \dots k_j + k'_j \dots k_n] = \det [k_1 \dots k_j \dots k_n] + \det [k_1 \dots k'_j \dots k_n]$ ,
3.  $\det [k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n] = -\det [k_1 \dots k_j \dots k_i \dots k_n]$ ,
4.  $\det I_n = 1$ .

Wykład można zaplanować następująco:

#### Podjęcie trzecie — teoretyczne

Macierz  $\rightarrow$  definicja aksjomatyczna wyznacznika  $\rightarrow$  wybrane własności wynikające z definicji  $\rightarrow$  istnienie i jednoznaczność  $\rightarrow$  twierdzenie Laplace'a  $\rightarrow$  schematy małych wyznaczników  $\rightarrow$  przykłady rachunków małych wyznaczników (interpretacja geometryczna) i większych  $\rightarrow$  ogólne własności wyznacznika, rachunki  $\rightarrow$  macierz odwrotna  $\rightarrow$  układy Cramera

Po omówieniu algebry macierzy formułujemy definicję aksjomatyczną wyznacznika, wskazując, że ma on być ich liczbową charakterystyką, od której oczekujemy wymienionych (prostych i niekontrowersyjnych) własności. Pokazujemy, że bezpośrednio z definicji wynikają kolejne czytelne własności wyznacznika. Następnie omawiamy konstrukcję definicji — należy podkreślić, że konieczne jest wykazanie, że tak charakteryzowany obiekt istnieje i jest opisany jednoznacznie. Wydaje się, że przejście do twierdzenia Laplace’a także powinno być opatrzone przynajmniej szkicowym dowodem. Dopiero teraz można przystąpić do schematów liczenia małych wyznaczników i do przykładów rachunkowych. Na zakończenie podsumowujemy własności wyznacznika, uzupełniając je o kolejne, jeszcze nie omówione i przechodzimy do kolejnych zagadnień: macierzy odwrotnej oraz układów Cramera.

Dla porządku zanotujmy

**Twierdzenie 2.** *Definicje 1, 2 i 3 są równoważne.*

Innymi słowy, z matematycznego punktu widzenia nie jest istotne, którą z definicji wybierzemy. Pod względem dydaktycznym jest to jednak wysoce nieobojętne.

Na zakończenie tego krótkiego porównania nasuwa się dygresja, związana z twierdzeniem Laplace’a. Pewne wątpliwości budzi bowiem ranga tradycyjnie przypisywana umiejętności rozwijania wyznaczników. Licząc wyznaczniki wyższych stopni, nieprzymuszeni studenci bardzo niechętnie sięgają po tę metodę — preferują metody kombinowane, oparte na sprowadzaniu macierzy do postaci trójkątnej. Taki sposób postępowania jest poprawny i słuszny — algorytmy numeryczne w zdecydowanej większości angażują przecież schemat eliminacji Gaussa. Czy można w takim razie uznać obliczenia wyznaczników oparte na rozwinięciu Laplace’a za przestarzałe i zbędne? Wydaje się, że tak. Już Birkhoff i Mac Lane w klasycznym podręczniku wydanym po raz pierwszy w latach sześćdziesiątych XX wieku [2] twierdzenie Laplace’a po prostu pominęli. O ile w przypadku definicji indukcyjnej metoda rozwijania jest naturalna, o tyle w dwóch pozostałych podejściach można ją, po niewielkich modyfikacjach toku wykładu, pominąć. Pozostawmy jednak to pytanie otwartym.

Każda z przedstawionych możliwości ma pewne zalety i, niestety, wady. Najbardziej użyteczna rachunkowo jest definicja indukcyjna. Definicja kombinatoryczna jest dosyć naturalna, aksjomatyczna z kolei — przyjazna. Żadna z nich jednak nie wychwytuje pojęciowej wielowymiarowości wyznacznika.

## 5. Podejście dojrzałe

W dotychczasowych rozważaniach skupiliśmy się na klasycznych sposobach definiowania wyznacznika, analizując je pod względem użyteczności dla podstawowego kursu matematyki na uczelni wyższej. Zanotowaliśmy, że żadna z przedstawionych definicji nie daje wyobrażenia o głębi pojęcia wyznacznika. Pokażemy teraz, na zasadzie uzupełnienia, jeszcze jedną możliwość, z góry jednak uprzedzając, że nie nadaje się ona do wykorzystania na studiach niematematycznych. Ten sposób definiowania wyznacznika zaproponował Gancarzewicz [4].

W konstrukcji tej najpierw definiuje się wyznacznik endomorfizmu, by następnie, w naturalny sposób, przenieść tę definicję do uniwersum macierzy. Rozpoczynamy od wprowadzenia potęgi zewnętrznej przestrzeni wektorowej.

**Definicja 4.** *Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową. Parę  $(X, s)$  złożoną z przestrzeni wektorowej  $X$  i odwzorowania  $k$ -liniowego antysymetrycznego  $s : V \times \dots \times V \rightarrow X$  nazywamy  $k$ -tą potęgą zewnętrzną  $V$ , jeżeli spełniona jest następująca własność jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji: dla dowolnej pary*

$(Y, u)$  i odwzorowania  $k$ -liniowego antysymetrycznego  $u : V \times \dots \times V \rightarrow Y$  istnieje jedno i tylko jedno odwzorowanie liniowe  $\rho : X \rightarrow Y$ , takie że diagram

$$\begin{array}{ccc} & V \times \dots \times V & \\ s \swarrow & & \searrow u \\ X & \xrightarrow{\rho} & Y \end{array}$$

jest przemienny.

Definicja ta jest niekonstruktywna, należy więc pokazać

**Twierdzenie 3.** Dla dowolnej przestrzeni wektorowej  $V$  i liczby naturalnej  $k$  istnieje  $k$ -ta potęga zewnętrzna. Jest ona określona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

Oznaczamy wtedy:  $X = \bigwedge^k V$  oraz  $s(v_1, \dots, v_k) = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  i  $\wedge$  nazywamy iloczynem zewnętrznym wektorów.

Wskazując naturalną bazę  $k$ -tej potęgi zewnętrznej można w prosty sposób obliczyć jej wymiar.

**Lemat 1.** Jeśli  $\dim V = n$ , to  $\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k}$ .

Z lematu natychmiast wynika

**Wniosek 1.** Jeśli  $\dim V = n$ , to  $\dim \bigwedge^n V = 1$ .

Następująca, elementarna obserwacja umożliwi w kolejnym kroku zdefiniowanie wyznacznika endomorfizmu:

**Lemat 2.** Jeśli  $f$  jest endomorfizmem określonym na jednowymiarowej przestrzeni wektorowej  $W$ , to istnieje skalar  $a$ , taki że  $f(x) = ax$ , dla dowolnego  $x \in W$ .

Kolejne twierdzenie pozwala zdefiniować odwzorowanie, które możemy nazwać  $k$ -tą potęgą zewnętrzną endomorfizmu.

**Twierdzenie 4.** Dla dowolnej liczby naturalnej  $k$  i dowolnego odwzorowania linowego  $f : V \rightarrow W$  istnieje dokładnie jedno odwzorowanie  $\bigwedge^k f$ , takie że następujący diagram

$$\begin{array}{ccc} V \times \dots \times V & \xrightarrow{f \times \dots \times f} & W \times \dots \times W \\ \downarrow s & & \downarrow s' \\ \bigwedge^k V & \xrightarrow{\bigwedge^k f} & \bigwedge^k W \end{array}$$

jest przemienny, gdzie  $s$  i  $s'$  są iloczynami zewnętrznymi określonymi na odpowiednich przestrzeniach.

Z wniosku 1 i lematu 2 wynika kolejny

**Wniosek 2.** Jeśli  $f$  jest endomorfizmem określonym na  $n$ -wymiarowej przestrzeni  $V$ , to  $\bigwedge^n f : \bigwedge^n V \rightarrow \bigwedge^n V$  jest endomorfizmem przestrzeni jednowymiarowych, czyli jest postaci  $\bigwedge^n f(x) = ax$  dla  $x \in \bigwedge^n V$ .

Odpowiedzią na naturalnie pojawiające się pytanie: czym jest skalar  $a$  jest następująca

**Definicja 5.** Skalar  $a$  z poprzedniego wniosku nazywamy wyznacznikiem endomorfizmu  $f$ .

Na koniec przechodzimy do wyznacznika macierzy.

**Definicja 6.** Jeśli  $A$  jest macierzą stopnia  $n$ , a  $V$  przestrzenią wektorową, w której wybrana jest baza  $e_1, \dots, e_n$ , to  $\det A = \det f$ , gdzie  $f : V \rightarrow V$  jest endomorfizmem, takim że  $f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j$ .

Dopiero powyższa konstrukcja odsłania głębię pojęcia wyznacznika i daje możliwości pokazania, dlaczego ujawnia się on na przykład tam, gdzie istotne jest geometryczne przekształcenie przestrzeni. Cała elementarna teoria wyznacznika może być z przedstawionej konstrukcji wyprowadzona w prosty już sposób. Oczywiście można próbować zaadaptować tę procedurę w rozszerzonym kursie algebry liniowej na studiach technicznych, o ile obejmuje on także teorię przestrzeni wektorowych i odwzorowań liniowych. Punktem wyjścia mógłby być iloczyn wektorowy. Jest to jednak zadanie niezwykle trudne dydaktycznie.

## 6. Konkluzja

Krytyka zaprezentowanych wcześniej podejść dydaktycznych do definicji wyznacznika nasuwa pomysł nieznacznego przeformatowania części kursu, mającego na celu (przynajmniej częściowe) usunięcie ich mankamentów. To holistyczne podejście nazwiemy umownie historyczno-intuicyjnym<sup>6</sup>.

### Podejście historyczno-intuicyjne

Działania na macierzach → układ  $n$  równań z  $n$  niewiadomymi → zapis macierzowy układu → rozwiązanie dla  $n = 2$ , wyznacznik stopnia 2 → rozwiązanie dla  $n = 3$ , wyznacznik stopnia 3 → definicja indukcyjna wyznacznika, odniesienie do  $n = 2$  i  $n = 3$ , interpretacja geometryczna → twierdzenie Laplace'a, rachunki → ogólne własności wyznacznika, rachunki → rozwiązanie układu w zapisie macierzowym, macierz odwrotna → układy Cramera

Jak widać, ścieżka ta bazuje na definicji indukcyjnej, ale wyznacznik wprowadzany jest jako historyczny rezultat, co powoduje konieczność wcześniejszego przyjrzenia się układom równań liniowych. Małe wyznaczniki wprowadzamy wprost w oparciu o rozwiązania odpowiednich układów, większe definiujemy indukcyjnie z informacją, że ich rola jest analogiczna. Podejście to nie wnosi nic nowego do interpretacji geometrycznej (pozostaje ona tylko zbiegiem okoliczności), ale wyznacznik osadzony jest w pewnym konkretnym — rozwiązaniu układu równań. Ogólne własności wyznacznika można opisać na przykład posługując się twierdzeniem Laplace'a. Następnie można rozwiązać układ równań metodą macierzową dochodząc w naturalny sposób do pojęcia macierzy odwrotnej. Partię materiału związaną z wyznacznikami i układami równań naturalnie wtedy jest zakończyć twierdzeniem o wzorach Cramera.

## Literatura

1. K. Adrianowicz, *Determinants — a short tutorial*, MINUT. 5 (2023), pp. 165–182.

<sup>6</sup>Może ono sprawić wrażenie chaotyczności. Niestety.

2. G. Birkhoff, S. Mac Lane, *Przegląd algebry współczesnej*, PWN, Warszawa 1966.
3. A. Białynicki–Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, PWN, Warszawa 1979.
4. J. Gancarzewicz, *Algebra liniowa z elementami geometrii*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1993.
5. B. Gleichgewicht, *Algebra*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.
6. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia i wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2025.
7. I. Kleiner, *A history of abstract algebra*, Birkhauser, 2007.
8. J. Klukowski, I. Nabiałek, *Algebra dla studentów*, WNT, Warszawa 2004.
9. E. Knobloch, *Determinants*, [w:] *Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences*, red. I. Grattan–Guinness, Routledge, 2016, s. 780–788.
10. M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, *Matematyka — podręcznik dla liceów i techników, klasa 2*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2013.
11. M. Zakrzewski, *Matematyka dawna i nowa*, t. 1, *Funkcje i przestrzenie*, GiS, Wrocław 2020.
12. *Oznaczony układ równań z dwiema niewiadomymi*, na stronie *Zintegrowana Platforma Edukacyjna*, <https://zpe.gov.pl/a/wprowadzenie/DkiI8xP1i>, dostęp: 22.08.2025.
13. *Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego i technikum*, Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia, Dz.U. 2024 poz. 1019.