

Marek MORAWIAK

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Jak szukać pierwiastków wielomianów?

Streszczenie. W artykule przedstawiono metodę dzielenia wielomianów oraz podstawowe twierdzenia umożliwiające wyznaczanie ich pierwiastków, ze szczególnym uwzględnieniem wielomianów o współczynnikach całkowitych. Zagadnienia te zilustrowano wieloma przykładami. Na końcu artykułu zamieszczono zadania do samodzielnego rozwiązania. Artykuł skierowany jest do studentów wydziałów niematematycznych uczelni technicznych, a także uczniów szkół średnich.

Słowa kluczowe: wielomian, pierwiastek wielomianu, rozkład wielomianu, dzielenie wielomianów, schemat Hornera.

1. Wstęp

Wielomiany pojawiają się nie tylko w matematyce. Za ich pomocą modeluje się na przykład pewne zjawiska fizyczne, które mają zastosowanie w mechanice czy elektrotechnice. W medycynie, biologii, chemii, ekonomii, naukach inżynierskich na podstawie zebranych danych statystycznych poszukuje się związków między obserwowanymi zmiennymi; służy do tego regresja nieliniowa, która pozwala znaleźć wielomiany o pewnych własnościach.

Często punktem wyjścia do dalszej analizy modelu matematycznego zawierającego wielomian jest znalezienie pierwiastków tego wielomianu. Są one istotne w zagadnieniach optymalizacyjnych i przy badaniu monotoniczności funkcji. Pierwiastki wielomianu przydają się także do rozwiązywania równań różniczkowych oraz w grafice komputerowej.

W tym artykule rozważamy tylko wielomiany rzeczywiste jednej zmiennej. Na początku podane są podstawowe informacje o wielomianach i ich pierwiastkach. Następnie zaprezentowano kilka metod wyznaczania pierwiastków, w tym metody wykorzystujące twierdzenia dotyczące wielomianów o współczynnikach całkowitych. Praca zawiera opis algorytmu dzielenia wielomianów oraz schematu Hornera. Wszystko to prowadzi oczywiście do zagadnienia rozkładu wielomianu na czynniki nierozkładalne, a w tym kontekście omówiona została rola twierdzenia Bezouta. Na końcu Czytelnik znajdzie zadania do samodzielnego rozwiązania (wraz z odpowiedziami).

Niektóre twierdzenia przytaczamy wraz z dowodami. Dowody pozostałych twierdzeń można znaleźć np. w [3] lub [4].

2. Podstawowe informacje o wielomianach i ich pierwiastkach

Definicja 1. *Wielomianem rzeczywistym zmiennej x nazywamy wyrażenie algebraiczne postaci*

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Liczby $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu $w(x)$. Liczbę a_0 nazywamy wyrazem wolnym wielomianu $w(x)$. Wielomiany zwykle oznaczamy za pomocą liter, podając w nawiasie zmienną, np. $w(x)$, $p(x)$, $q(x)$ (można też używać wielkich liter).

Jeżeli w wielomianie $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ współczynnik a_n jest różny od zera, to mówimy, że stopień tego wielomianu jest równy n . Piszemy wówczas $\deg(w(x)) = n$.

Na przykład:

- jeżeli $w(x) = -3x^5 - x + 7$, to $\deg(w(x)) = 5$,
- jeżeli $p(x) = x^4 - 2x^2 + 7x - 3$, to $\deg(p(x)) = 4$,
- jeżeli $q(x) = x + 5$, to $\deg(q(x)) = 1$,
- jeżeli $s(x) = 2$, to $\deg(s(x)) = 0$.

Wyjątkiem jest wielomian zerowy, tzn. wielomian $u(x) = 0$. Przyjmujemy¹, że $\deg(0) = -\infty$.

Definicja 2. *Liczbę a nazywamy pierwiastkiem wielomianu $w(x)$, jeżeli $w(a) = 0$.*

Pomimo tego, że obliczanie wartości wielomianów dla danych argumentów nie jest trudne, to jednak wyznaczanie ich pierwiastków jest często sprawą nietrywialną. Pierwiastki wielomianów stopnia 1 oraz 2 można wyznaczyć w sposób niezbyt skomplikowany. Każdy wielomian stopnia 1 ma dokładnie jeden pierwiastek i łatwo go odgadnąć, np.:

- pierwiastkiem wielomianu $p(x) = x + 5$ jest liczba -5 , ponieważ $p(-5) = -5 + 5 = 0$,
- pierwiastkiem wielomianu $q(x) = 2x - 3$ jest liczba $\frac{3}{2}$, ponieważ $q(\frac{3}{2}) = 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = 3 - 3 = 0$,
- pierwiastkiem wielomianu $s(x) = 7x$ jest liczba 0 , ponieważ $s(0) = 7 \cdot 0 = 0$.

Dla wielomianu stopnia drugiego $w(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, najpierw obliczamy jego wyróżnik, tzn. $\Delta = b^2 - 4ac$. Liczba pierwiastków wielomianu stopnia 2 zależy od znaku jego wyróżnika:

- jeżeli $\Delta < 0$, to wielomian $w(x) = ax^2 + bx + c$ nie ma pierwiastków rzeczywistych,
- jeżeli $\Delta > 0$, to wielomian $w(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa różne pierwiastki, które można obliczyć, stosując następujące wzory:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad (*)$$

¹ W niektórych pracach nie określa się stopnia wielomianu zerowego.

- jeżeli $\Delta = 0$, to wielomian $w(x) = ax^2 + bx + c$ ma jeden pierwiastek $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

W przypadku wielomianów stopni 3 i 4 wzory na ich pierwiastki są już dosyć skomplikowane. Natomiast dla wielomianów wyższych stopni nie istnieją ogólne wzory na pierwiastki.

Niektóre wielomiany można zapisać jako iloczyn wielomianów stopnia 1. Wówczas wyznaczenie ich pierwiastków jest bardzo łatwe. Zobaczmy to na przykładzie.

Przykład 1. Pierwiastkami wielomianu $w(x) = (x-1)(5x-4)(x+\sqrt{2})$ są liczby: $1, \frac{4}{5}, -\sqrt{2}$. Jeżeli podstawimy za x którąś z tych liczb, to otrzymamy iloczyn trzech liczb, z których jedna zawsze będzie równa 0. Możemy stwierdzić (bez liczenia), że $w(1) = w(\frac{4}{5}) = w(-\sqrt{2}) = 0$.

Wielomian $w(x)$ nie ma innych pierwiastków — jeśli podstawimy za x jakąś liczbę $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{4}{5}, -\sqrt{2}\}$, to liczby $a-1, 5a-4$ i $a+\sqrt{2}$ będą różne od 0, czyli $w(a) \neq 0$.

Zapis wielomianu w postaci iloczynu ułatwia znalezienie jego pierwiastków. Niezwykle pomocne informacje dotyczące poszukiwania pierwiastków wielomianów rzeczywistych można wyrazić w postaci następujących faktów.

Dwa ważne fakty

1. Każdy wielomian rzeczywisty stopnia co najmniej 3 można zapisać jako iloczyn wielomianów nierozkładalnych (czyli wielomianów stopnia 1 lub wielomianów stopnia 2 o ujemnym wyróżniku).
2. Wielomian rzeczywisty stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych.

Pomimo że matematyka gwarantuje, iż rozkład wielomianu na czynniki nierozkładalne jest zawsze możliwy², to w praktyce może to być zadanie trudne i czasochłonne, wymagające dużej dokładności.

Czasem jednak wystarczy jeden rzut oka, aby stwierdzić, że wielomian nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Przykład 2. Wielomian $w(x) = 2x^6 + x^2 + 3$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Zauważmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy: $2x^6 \geq 0$ i $x^2 \geq 0$. Zatem $w(x) \geq 3$ dla każdego x . Oznacza to, że $w(x)$ nigdy nie przyjmuje wartości 0, czyli nie ma pierwiastków rzeczywistych.

3. Metoda 1: rozkład wielomianu na czynniki przez grupowanie wyrazów

W pewnych sytuacjach udaje się rozłożyć wielomian na czynniki (czyli zapisać go w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych), stosując umiejętne grupowanie wyrazów. W tego typu działaniach bywa przydatna także znajomość wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 3. Wyznaczmy pierwiastki wielomianu $w(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Grupujemy wyrazy w sposób następujący:

$$w(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x+2) - (x+2) = (x+2)(x^2-1) = (x+2)(x+1)(x-1).$$

² Wynika to z zasadniczego twierdzenia algebry oraz twierdzeń dotyczących pierwiastków zespolonych wielomianów rzeczywistych.

Widzimy, że wielomian przyjmie wartość zero, gdy za x podstawimy -2 , -1 lub 1 . Pierwiastkami wielomianu $w(x)$ są zatem liczby: -2 , -1 , 1 .

Przykład 4. Wyznaczmy pierwiastki wielomianu $w(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 4$.

Zapiszmy wyraz $3x^2$ jako $4x^2 - x^2$. Mamy:

$$\begin{aligned} w(x) &= x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 4 = x^4 + 5x^3 + 4x^2 - x^2 - 5x^2 - 4 = x^2(x^2 + 5x + 4) - (x^2 + 5x + 4) = \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 - 1) = (x^2 + 5x + 4)(x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

Wielomian $x^2 + 5x + 4$ można rozłożyć na czynniki³ w podobny sposób:

$$x^2 + 5x + 4 = x^2 + x + 4x + 4 = x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x + 4).$$

Zatem:

$$w(x) = (x + 1)(x + 4)(x - 1)(x + 1) = (x + 1)^2(x - 1)(x + 4).$$

Wielomian $w(x)$ ma trzy pierwiastki: -4 , -1 , 1 , przy czym liczba -1 jest pierwiastkiem dwukrotnym⁴.

Przykład 5. Wyznaczmy pierwiastki wielomianu $w(x) = 4x^5 - 4x^4 - 15x^3 + 16x^2 - 4x$.

Wylączmy najpierw x przed nawias, następnie zapiszmy $-15x^2$ w postaci $x^2 - 16x^2$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} w(x) &= 4x^5 - 4x^4 - 15x^3 + 16x^2 - 4x = x(4x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 16x - 4) = \\ &= x(4x^4 - 4x^3 + x^2 - 16x^2 + 16x - 4) = x[x^2(4x^2 - 4x + 1) - 4(4x^2 - 4x + 1)] = \\ &= x(4x^2 - 4x + 1)(x^2 - 4). \end{aligned}$$

Teraz skorzystamy ze wzorów skróconego mnożenia. Czynniki $4x^2 - 4x + 1$ możemy zapisać jako $(2x - 1)^2$, ponieważ stosujemy wzór $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, w którym $a = 2x$ i $b = 1$. Z kolei czynnik $x^2 - 4$ możemy zapisać jako $(x - 2)(x + 2)$, ponieważ stosujemy wzór $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, w którym $a = x$ i $b = 2$. Zatem

$$w(x) = x(2x - 1)^2(x - 2)(x + 2).$$

Stwierdzamy, że wielomian $w(x)$ posiada cztery pierwiastki: -2 , 0 , $\frac{1}{2}$, 2 , przy czym $\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem dwukrotnym.

Metoda rozkładu wielomianu poprzez grupowanie wyrazów jest zawsze wykonalna w teorii, jednak w praktyce wymaga dużego doświadczenia — trzeba umiejętnie pogrupować wyrazy, wiedzieć, które wyrazy zapisać inaczej, zauważyć wzory skróconego mnożenia (jeśli są). Może się okazać, że dzięki grupowaniu wyrazów unikniemy żmudnych rachunków.

³ Tu można też skorzystać ze znanego wzoru $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Dla wielomianu $x^2 + 5x + 4$ mamy: $\Delta = 25 - 16 = 9$, $x_1 = \frac{-5-3}{2} = -4$, $x_2 = \frac{-5+3}{2} = -1$. Zatem $x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$.

⁴ Liczbę a nazywamy k -krotnym pierwiastkiem wielomianu $w(x)$, gdy w jego rozkładzie na czynniki nierozkładalne występuje czynnik $(x - a)^k$.

4. Metoda 2: pierwiastki wymierne wielomianów o współczynnikach całkowitych

Jeśli mamy wielomian o współczynnikach całkowitych, to możemy skorzystać z popularnych twierdzeń, które pozwalają znaleźć pierwiastki wymierne tego wielomianu. Pierwsze z tych twierdzeń mówi o pierwiastkach całkowitych (liczby całkowite to szczególny przypadek liczb wymiernych).

Twierdzenie 1. *Niech $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Jeżeli liczba całkowita $k \neq 0$ jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .*

Przykład 6. Wyznamy pierwiastki wielomianu $w(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

Możemy spróbować zastosować twierdzenie 1. Wyraz wolny to liczba 9. Jej dzielnikami są liczby: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Zauważmy, że $w(a) = w(-a)$ dla każdego a , ponieważ w wielomianie $w(x)$ występują tylko parzyste potęgi zmiennej x . Obliczamy:

$$\begin{aligned} w(1) &= w(-1) = 1 - 10 + 9 = 0, \\ w(3) &= w(-3) = 9 \cdot 9 - 10 \cdot 9 + 9 = 9(9 - 10 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Stwierdzamy, że pierwiastkami wielomianu $w(x)$ są liczby: 1, -1, 3, -3. Nie musimy już obliczać $w(9)$ i $w(-9)$, ponieważ wielomian stopnia 4 ma co najwyżej cztery pierwiastki rzeczywiste (a tyle pierwiastków właśnie znaleźliśmy).

Wielomian $w(x)$ można też szybko rozłożyć na czynniki:

$$\begin{aligned} w(x) &= x^4 - 10x^2 + 9 = x^4 - 9x^2 - x^2 + 9 = x^2(x^2 - 9) - (x^2 - 9) = \\ &= (x^2 - 9)(x^2 - 1) = (x + 3)(x - 3)(x + 1)(x - 1). \end{aligned}$$

Z postaci iloczynowej odczytujemy pierwiastki wielomianu $w(x)$ — te same co poprzednio. W tym przykładzie obie metody są równie szybkie.

Jeżeli rozważamy wielomian o współczynnikach całkowitych, którego wyraz wolny ma dużo dzielników, to mamy dużo liczb do sprawdzenia oraz dużo rachunków. Możemy wówczas zastosować poniższe twierdzenie, które pozwala wyeliminować pewne dzielniki wyrazu wolnego ze zbioru potencjalnych pierwiastków wielomianu.

Twierdzenie 2. *Niech b będzie dzielnikiem wyrazu wolnego wielomianu $w(x)$ o współczynnikach całkowitych. Jeżeli istnieje różna od zera liczba całkowita m taka, że $w(m) \neq 0$ i $b - m \nmid w(m)$, to b nie jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$.*

Przykład 7. Wyznamy pierwiastki całkowite wielomianu $w(x) = x^4 + 3x^3 - 39x^2 - 47x + 210$.

Dzielnikami wyrazu wolnego wielomianu $w(x)$ są liczby: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 10, \pm 14, \pm 15, \pm 21, \pm 30, \pm 35, \pm 42, \pm 70, \pm 105, \pm 210$. Wyznaczenie wartości $w(x)$ dla wszystkich tych liczb będzie bardzo czasochłonne. Zastosujmy więc twierdzenie 2. Niech $m = 1$, wówczas $w(1) = 128 \neq 0$. Potrzebne obliczenia znajdują się w poniższej tabeli.

b	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	-6	7	-7	10	-10	14
$b-1$	0	-2	1	-3	2	-4	3	-5	4	-6	5	-7	6	-8	9	-11	13
b	-14	15	-15	21	-21	30	-30	35	-35	42	-42	70	-70	105	-105	210	-210
$b-1$	-15	14	-16	20	-22	29	-31	34	-36	41	-43	69	-71	104	-106	209	-211

Liczby w wierszach drugim i czwartym zaznaczamy albo na czerwono (jeśli **nie są** dzielnikami liczby $w(m)$), albo na zielono (jeśli **są** dzielnikami liczby $w(m)$). Liczba 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby, więc jej nie kolorujemy. W tym przykładzie zadanie jest o tyle łatwe, że dzielnikami liczby $w(m) = 128 = 2^7$ są tylko potęgi dwójki, z dokładnością do znaku. Liczby b stojące nad liczbami zaznaczonymi na czerwono nie są pierwiastkami wielomianu $w(x)$. Liczby b stojące nad liczbami zaznaczonymi na zielono mogą być pierwiastkami wielomianu $w(x)$. Do sprawdzenia pozostają zatem liczby: $-1, 2, 3, -3, 5, -7, -15$. Obliczamy:

$$\begin{aligned}
w(2) &= 16 + 3 \cdot 8 - 39 \cdot 4 - 47 \cdot 2 + 210 = 2(8 + 12 - 78 - 47 + 105) = 2(125 - 125) = 0, \\
w(5) &= 25 \cdot 25 + 3 \cdot 5 \cdot 25 - 39 \cdot 25 - 47 \cdot 5 + 210 = 25(25 + 15 - 39) - 5(47 - 42) = 25 - 5 \cdot 5 = 0, \\
w(-3) &= 3 \cdot 27 - 3 \cdot 27 - 39 \cdot 9 + 47 \cdot 3 + 210 = 3(-117 + 47 + 70) = 0, \\
w(-7) &= 49 \cdot 49 - 3 \cdot 7 \cdot 49 - 39 \cdot 49 + 47 \cdot 7 + 210 = 49(49 - 21 - 39) + 7(47 + 30) = \\
&= 49 \cdot (10 - 21) + 7 \cdot 77 = 49 \cdot (-11) + 7 \cdot 7 \cdot 11 = 49(-11 + 11) = 0.
\end{aligned}$$

Wiemy, że wielomian $w(x)$ ma co najwyżej cztery pierwiastki. Pierwiastkami wielomianu $w(x)$ są zatem liczby: $2, 5, -3$ i -7 .

Sposób doboru liczby m nie jest sprecyzowany w żaden szczególny sposób, w tym przypadku liczba została dobrana tak, by łatwo wyznaczyć $w(m)$ oraz odrzucić 1 jako pierwiastek.

Kolejne twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia 1. Pozwala ono znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne (w tym także całkowite) wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie 3. Niech $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem stopnia n o współczynnikach całkowitych. Jeżeli liczba wymierna $q = \frac{l}{m}$ (gdzie l i m są względnie pierwsze) jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$, to jej licznik l jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , a mianownik m jest dzielnikiem współczynnika a_n .

Przykład 8. Sprawdźmy, czy wielomian $w(x) = 24x^3 - 10x^2 - 7x + 2$ ma pierwiastki wymierne.

Dzielnikami wyrazu wolnego $w(x)$ są liczby: $\pm 1, \pm 2$, a współczynnika stojącego przy najwyższej potędze zmiennej x liczby: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$. Pierwiastki wymierne $w(x)$, o ile istnieją, są więc elementami zbioru $\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{1}{12}, \pm \frac{1}{24}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}\}$. Obliczamy:

$$\begin{aligned}
w\left(\frac{2}{3}\right) &= 24 \cdot \frac{8}{27} - 10 \cdot \frac{4}{9} - 7 \cdot \frac{2}{3} + 2 = \frac{64}{9} - \frac{40}{9} - \frac{14}{3} + 2 = \frac{2}{9}(32 - 20 - 21 + 9) = \frac{2}{9}(41 - 41) = 0, \\
w\left(-\frac{1}{2}\right) &= -24 \cdot \frac{1}{8} - 10 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{2} + 2 = -3 - \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + 2 = -1 + \frac{2}{2} = 0, \\
w\left(\frac{1}{4}\right) &= 24 \cdot \frac{1}{64} - 10 \cdot \frac{1}{16} - 7 \cdot \frac{1}{4} + 2 = \frac{3}{8} - \frac{5}{8} - \frac{7}{4} + 2 = -\frac{1}{4} - \frac{7}{4} + 2 = 0.
\end{aligned}$$

Stwierdzamy, że liczby $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ są poszukiwanymi pierwiastkami wielomianu $w(x)$. Ponieważ $w(x)$ jest wielomianem stopnia trzeciego (może zatem mieć co najwyżej trzy pierwiastki), więc nie musimy obliczać jego wartości dla pozostałych liczb z podanego wyżej zbioru.

Wielomian $w(x)$ ma następującą postać iloczynową (by to sprawdzić wystarczy wykonać wszystkie mnożenia i zredukować wyrazy podobne):

$$w(x) = 24 \left(x - \frac{2}{3}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{4}\right).$$

Przykład 9. Wyznamy pierwiastki wymierne wielomianu $w(x) = 3x^3 - \frac{26}{5}x^2 + \frac{13}{5}x - \frac{2}{5}$.

Wielomian $w(x)$ nie ma współczynników całkowitych, więc nie możemy zastosować twierdzenia 3. Zauważmy, że wielomian $s(x) = 5w(x)$ ma współczynniki całkowite oraz takie same pierwiastki jak wielomian $w(x)$. Pierwiastkami wymiernymi wielomianu $s(x) = 15x^3 - 26x^2 + 13x - 2$ mogą być liczby: $\pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{15}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{5}, \pm \frac{2}{15}$. Obliczając:

$$\begin{aligned} s\left(\frac{1}{3}\right) &= 15 \cdot \frac{1}{27} - 26 \cdot \frac{1}{9} + 13 \cdot \frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{27}(15 - 78 + 117 - 54) = \frac{1}{27}(132 - 132) = 0, \\ s\left(\frac{2}{5}\right) &= 15 \cdot \frac{8}{125} - 26 \cdot \frac{4}{25} + 13 \cdot \frac{2}{5} - 2 = \frac{2}{125}(60 - 260 + 325 - 125) = \frac{2}{125}(385 - 385) = 0, \\ s(1) &= 15 \cdot 1 - 26 \cdot 1 + 13 \cdot 1 - 2 = 28 - 28 = 0, \end{aligned}$$

stwierdzamy, że liczby: $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, 1$ są pierwiastkami wielomianu $w(x)$.

Przykład 10. Sprawdźmy, czy wielomian $w(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 18x - 36$ ma pierwiastki wymierne.

Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x jest równy 1. Jego dzielnikami są tylko liczby 1 i -1 . Z twierdzenia 3 wynika, że pierwiastkami wymiernymi tego wielomianu mogą być tylko liczby całkowite: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$. Po żmudnych rachunkach, przekonujemy się, że jedynymi pierwiastkami wymiernymi są liczby -3 oraz 3 . Faktycznie:

$$\begin{aligned} w(-3) &= (-3)^4 - 2 \cdot (-3)^3 - 5 \cdot (-3)^2 + 18 \cdot (-3) - 36 = 81 + 54 - 45 - 54 - 36 = 0, \\ w(3) &= 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 36 = 81 - 54 - 45 + 54 - 36 = 0. \end{aligned}$$

Wielomian stopnia czwartego może posiadać cztery pierwiastki rzeczywiste. Powstaje zatem pytanie, czy rozważany wielomian ma jeszcze jakieś inne pierwiastki rzeczywiste. Nie wiemy, czy wyznaczone pierwiastki są jednokrotne (wówczas mogą istnieć co najwyżej dwa pierwiastki będące liczbami niewymiernymi), czy też któryś z nich jest pierwiastkiem o krotności większej niż jeden. Na to pytanie odpowiemy w dalszej części artykułu, ponieważ potrzebujemy do tego mocniejszych narzędzi.

Twierdzenie 3 ma też zastosowanie w dowodzeniu niewymierności pewnych liczb rzeczywistych.

Przykład 11. Pokażemy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Rozważmy wielomian $w(x) = x^2 - 2$. Z twierdzenia 3 wiemy, że pierwiastkami wymiernymi wielomianu $w(x)$ mogą być tylko liczby $1, -1, 2, -2$ (każda inna liczba, która jest pierwiastkiem tego wielomianu, jest niewymierna). Obliczmy:

$$w(1) = w(-1) = 1 - 2 = -1 \neq 0, \quad w(2) = w(-2) = 4 - 2 = 2 \neq 0.$$

Wnioskujemy, że $w(x)$ nie ma pierwiastków wymiernych. Wielomian $w(x)$ można jednak zapisać jako $w(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, więc ma on dwa pierwiastki rzeczywiste: $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$. Zatem obie te liczby są liczbami niewymiernymi.

Jeżeli mając wielomian stopnia n wyznaczymy n różnych pierwiastków rzeczywistych, to możemy uznać, że poza żmudnymi obliczeniami wyznaczanie pierwiastków wielomianu nie jest takie trudne. Co jednak, gdy (jak w przykładzie 10) wyznaczymy mniejszą liczbę pierwiastków i nie wiemy, czy to wszystkie pierwiastki wielomianu (uwzględniając ich krotności), a co gorsza nie mamy pojęcia co robić dalej. Co prawda zawsze można skorzystać z pomocy programów komputerowych, jednak mimo to warto mieć jeszcze jakiegoś asa w rękawie. Z pomocą przychodzą twierdzenie Bezouta oraz algorytm dzielenia wielomianów, które zostaną przedstawione poniżej.

5. Metoda 3: zastosowanie twierdzenia Bezouta

W trzeciej metodzie szukania pierwiastków wielomianu, wykorzystującej twierdzenie Bezouta, ważną rolę odgrywa dzielenie wielomianów⁵. Uniwersalny algorytm dzielenia wielomianów to dzielenie pisemne. Jest on podobny do dzielenia liczb naturalnych. W zadaniach dotyczących znajdowania pierwiastków najczęściej wystarcza znajomość schematu Hornera, który pozwala szybko podzielić wielomian stopnia $n \geq 1$ przez dwumian $x - a$. Najpierw przypomnimy te dwie metody dzielenia wielomianów. Następnie pokażemy, jak twierdzenie Bezouta i dzielenie wielomianów pomagają w szukaniu pierwiastków wielomianu.

5.1. Podzielność wielomianów i dzielenie z resztą

Iloraz dwóch wielomianów $w(x)$ i $p(x)$, gdzie $p(x)$ jest wielomianem różnym od wielomianu zerowego, można zapisać za pomocą kreski ułamkowej, czyli w postaci $\frac{w(x)}{p(x)}$. Otrzymujemy wyrażenie wymierne. Jeżeli wielomian $w(x)$ jest podzielny przez $p(x)$, to wyrażenie wymierne jest też wielomianem.

Definicja 3. Niech $p(x)$ będzie wielomianem różnym od wielomianu zerowego. Mówimy, że wielomian $w(x)$ jest podzielny przez wielomian $p(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $q(x)$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość:

$$w(x) = p(x)q(x).$$

Wielomian $q(x)$ nazywamy wówczas ilorzem wielomianów $w(x)$ i $p(x)$, a wielomian $p(x)$ nazywamy dzielnikiem wielomianu $w(x)$.

Zauważmy, że wielomian zerowy jest podzielny przez każdy wielomian z wyjątkiem wielomianu zerowego, bo $0 = p(x) \cdot 0$.

Twierdzenie 4. Dla każdego wielomianu $w(x)$ i każdego wielomianu $p(x)$, który nie jest wielomianem zerowym, istnieje dokładnie jedna para takich wielomianów $q(x)$ i $r(x)$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość:

$$w(x) = p(x)q(x) + r(x), \quad \text{przy czym} \quad \deg(r(x)) < \deg(p(x)).$$

⁵ Opanowanie umiejętności dzielenia wielomianów okazuje się niezwykle ważne, gdy studenci zaczynają przerabiać m.in. całki funkcyjne wymiernych.

Wielomian $r(x)$ w twierdzeniu 4 nazywamy resztą z dzielenia $w(x)$ przez $p(x)$. Jeżeli reszta jest wielomianem zerowym, to $w(x)$ jest podzielny przez $p(x)$. Jeżeli reszta nie jest wielomianem zerowym, to $w(x)$ nie jest podzielny przez $p(x)$.

5.2. Dzielenie pisemne wielomianów

Algorytm dzielenia pisemnego przedstawimy na przykładach.

Przykład 12. Sprawdźmy, czy wielomian $w(x) = 6x^4 + 9x^3 - 19x^2 + 14x - 8$ jest podzielny przez wielomian $p(x) = 2x^2 - x + 1$.

Podzielimy pisemnie wielomian $w(x)$ przez wielomian $p(x)$. Mamy:

w0	$3x^2$	$+6x$	-8				
w1	$(6x^4$	$+9x^3$	$-19x^2$	$+14x$	$-8)$		$: (2x^2 - x + 1)$
w2	$-6x^4$	$+3x^3$	$-3x^2$				
w3		$12x^3$	$-22x^2$	$+14x$	-8		
w4		$-12x^3$	$+6x^2$	$-6x$			
w5			$-16x^2$	$+8x$	-8		
w6			$16x^2$	$-8x$	$+8$		
w7						0	

1. W wierszu w1 wpisujemy interesujące nas dzielenie. Trzeba pamiętać o wstawieniu nawiasów (ze względu na kolejność działań). Wynik tego dzielenia pojawi się w wierszu w0.
2. Rozpoczynamy od dzielenia $6x^4$ (z początku wiersza w1) przez $2x^2$. Otrzymujemy $3x^2$. Wpisujemy ten wynik w wierszu w0.
3. Mnożymy w pamięci $3x^2$ przez dzielnik $2x^2 - x + 1$. W otrzymanym wielomianie zmieniamy wszystkie znaki na przeciwne i wpisujemy ten nowy wielomian w wierszu w2.
4. W wierszu w3 wpisujemy sumę wielomianów z wierszy w1 i w2.
5. Teraz dzielimy $12x^3$ (z początku wiersza w3) przez $2x^2$. Otrzymujemy $6x$. Wpisujemy ten wynik w wierszu w0.
6. Mnożymy w pamięci $6x$ przez dzielnik $2x^2 - x + 1$. W otrzymanym wielomianie zmieniamy wszystkie znaki na przeciwne i wpisujemy ten nowy wielomian w wierszu w4.
7. W wierszu w5 wpisujemy sumę wielomianów z wierszy w3 i w4.
8. Dzielimy $-16x^2$ (z początku wiersza w5) przez $2x^2$. Otrzymujemy -8 . Wpisujemy ten wynik w wierszu w0.
9. Mnożymy w pamięci -8 przez dzielnik $2x^2 - x + 1$. W otrzymanym wielomianie zmieniamy wszystkie znaki na przeciwne i wpisujemy ten nowy wielomian w wierszu w6.
10. W wierszu w7 wpisujemy sumę wielomianów z wierszy w5 i w6. Otrzymujemy 0, czyli skończyliśmy dzielenie.

11. Iloraz wielomianów $w(x)$ i $p(x)$ odczytujemy z wiersza w0. Jest nim wielomian $q(x) = 3x^2 + 6x - 8$.

Możemy jeszcze sprawdzić poprawność dzielenia (tzn. warunek z definicji 3):

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (2x^2 - x + 1)(3x^2 + 6x - 8) = \\ &= 6x^4 + 12x^3 - 16x^2 - 3x^3 - 6x^2 + 8x + 3x^2 + 6x - 8 = \\ &= 6x^4 + 9x^3 - 19x^2 + 14x - 8 = w(x). \end{aligned}$$

Nie ma błędu, więc stwierdzamy, że $w(x)$ jest podzielny przez $p(x)$.

Przykład 13. Sprawdźmy, czy wielomian $w(x) = 6x^4 + 9x^3 - 19x^2 + 10x - 5$ jest podzielny przez wielomian $p(x) = 2x^2 - x + 1$.

Dzieląc pisemnie wielomian $w(x)$ przez wielomian $p(x)$ otrzymujemy:

w0	$3x^2$	$+6x$	-8		
w1	$(6x^4$	$+9x^3$	$-19x^2$	$+10x$	$-5)$
w2	$-6x^4$	$+3x^3$	$-3x^2$		
w3	$12x^3$	$-22x^2$	$+10x$	-5	
w4	$-12x^3$	$+6x^2$	$-6x$		
w5		$-16x^2$	$+4x$	-5	
w6		$16x^2$	$-8x$	$+8$	
w7			$-4x$	$+3$	

Tutaj w wierszu w7 dostaliśmy wielomian stopnia pierwszego. Gdybyśmy chcieli dzielić dalej, to musielibyśmy podzielić $-4x$ przez $2x^2$. Oczywiście umiemy to zrobić, ale $-4x : 2x^2 = -\frac{2}{x}$ jest wyrażeniem wymiernym. Tego wyrażenia nie możemy wpisać do wiersza w0, ponieważ wyrażenie w wierszu w0 nie byłoby wielomianem. Zatem kończymy dzielenie pisemne. Wielomian $r(x) = -4x + 3$ jest resztą z dzielenia $w(x)$ przez $p(x)$. Można sprawdzić, że zachodzi warunek z twierdzenia 4. Wielomian $q(x)$ odczytujemy z wiersza w0. Mamy:

$$6x^4 + 9x^3 - 19x^2 + 10x - 5 = (2x^2 - x + 1)(3x^2 + 6x - 8) + (-4x + 3).$$

Stwierdzamy, że $w(x)$ nie jest podzielny przez $p(x)$.

Dzielenie pisemne kończymy w chwili, gdy wielomian pod kreską jest wielomianem zerowym albo jest wielomianem stopnia mniejszego niż stopień dzielnika.

Przykład 14. Sprawdźmy, czy wielomian $w(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x + 2$ jest podzielny przez wielomian $p(x) = x - 1$. Dzieląc pisemnie $w(x)$ przez $p(x)$, otrzymujemy:

w0	x^4	$-2x^3$	$-x^2$	$+4x$	-2	
w1	$(x^5$	$-3x^4$	$+x^3$	$+5x^2$	$-6x)$	$+2$
w2	$-x^5$	$+x^4$				
w3		$-2x^4$	$+x^3$	$+5x^2$	$-6x$	$+2$
w4		$+2x^4$	$-2x^3$			
w5			$-x^3$	$+5x^2$	$-6x$	$+2$
w6			$+x^3$	$-x^2$		
w7				$4x^2$	$-6x$	$+2$
w8				$-4x^2$	$+4x$	
w9					$-2x$	$+2$
w10					$+2x$	-2
w11						0

W wierszu w11 otrzymaliśmy wielomian zerowy, co oznacza, że wielomian $w(x)$ jest podzielny przez wielomian $p(x)$. Zauważmy jeszcze, że suma współczynników wielomianu $w(x)$ jest równa zero, co oznacza, że liczba 1 jest jego pierwiastkiem. Faktycznie:

$$w(1) = 1^5 - 3 \cdot 1^4 + 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 1 + 5 - 6 + 2 = 0.$$

Powyższe przykłady pokazują, że algorytm dzielenia wielomianów za każdym razem sprowadza się do skończonego ciągu analogicznych czynności. Zakończenie schematu wynika z twierdzenia 4 (stopień reszty mniejszy od stopnia dzielnika). Ogromną zaletą algorytmu jest uniwersalność, dzięki czemu można wykonać dzielenie dowolnych dwóch wielomianów (oczywiście nie możemy nigdy dzielić przez wielomian zerowy).

5.3. Schemat Hornera

Jeśli chcemy podzielić wielomian $w(x)$ przez dwumian postaci $p(x) = x - a$, to możemy zastosować schemat Hornera. Schemat Hornera pozwala znaleźć wielomiany $q(x)$ i $r(x)$ występujące w twierdzeniu 4 (o wiele szybciej niż przez dzielenie pisemne).

Działanie schematu Hornera omówimy na przykładzie. Przypuśćmy, że chcemy podzielić wielomian $w(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (gdzie $a_4 \neq 0$) przez dwumian $p(x) = x - a$. Otrzymamy wielomian $q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ oraz resztę r , które spełniają warunek z twierdzenia 4, czyli:

$$w(x) = (x - a)q(x) + r. \quad (**)$$

Jeżeli $w(x)$ jest podzielny przez $x - a$, to $r = 0$. Jeżeli $w(x)$ nie jest podzielny przez $x - a$, to $r \neq 0$. Musimy znaleźć współczynniki b_3, b_2, b_1, b_0 oraz r . Mamy:

$$\begin{aligned} a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= (x - a)(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + r \\ a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= b_3x^4 + b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x - ab_3x^3 - ab_2x^2 - ab_1x - ab_0 + r \\ a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= b_3x^4 + (b_2 - ab_3)x^3 + (b_1 - ab_2)x^2 + (b_0 - ab_1)x + (r - ab_0). \end{aligned}$$

Wielomiany po obu stronach mają te same współczynniki przy jednakowych potęgach zmiennej x , czyli:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_4 = b_3 \\ a_3 = b_2 - ab_3 \\ a_2 = b_1 - ab_2 \\ a_1 = b_0 - ab_1 \\ a_0 = r - ab_0, \end{array} \right. \quad \text{skąd} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_3 = a_4 \\ b_2 = a_3 + ab_3 \\ b_1 = a_2 + ab_2 \\ b_0 = a_1 + ab_1 \\ r = a_0 + ab_0. \end{array} \right.$$

Wyniki powyższych obliczeń zapisujemy w następującej tabelce:

w0	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
w1	$\downarrow$	ab_3	ab_2	ab_1	ab_0
w2	b_3	b_2	b_1	b_0	r

W wierszu w0 wpisujemy po kolei współczynniki wielomianu $w(x)$. W wierszu w2 dodajemy liczby z wierszy w0 i w1. Wyjątkiem jest pierwszy element wiersza w2 — przepisujemy pierwszy element wiersza w0 (ponieważ $b_3 = a_4$). Wiersz w1 jest wierszem pomocniczym, w którym wpisujemy iloczyny elementów wiersza w2 przez a , przesuwając je o jedno miejsce w prawo. Współczynniki wielomianu $q(x)$ i resztę r odczytujemy z ostatniego wiersza.

W powyższych obliczeniach przyjęliśmy, że wielomian $w(x)$ ma stopień 4. Można to postępowanie i obliczenia uogólnić. Otrzymamy podobną tabelkę, która będzie miała więcej lub mniej kolumn (jeśli stopień wielomianu $w(x)$ będzie większy lub mniejszy niż 4).

Przykład 15. Sprawdźmy, czy wielomian $w(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 18x - 36$ jest podzielny przez dwumian $p(x) = x + 3$.

Mamy tu $a = -3$. Zastosujmy schemat Hornera:

w0		1	-2	-5	18	-36
w1	$a = -3$	$\downarrow$	-3	15	-30	36
w2		1	-5	10	-12	0

Wyjaśnijmy kolejne kroki.

1. W wierszu w0 wypisujemy współczynniki wielomianu $w(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 18x - 36$ (zaczynamy od współczynnika przy x^4 , kończymy na wyrazie wolnym).
2. Przepisujemy wyraz stojący przy x w najwyższej potędze (tutaj przy x^4) do wiersza w2.
3. Mnożymy przepisaną jedynkę z wiersza w2 przez -3 . Wynik (czyli -3) zapisujemy w wierszu w1 pod współczynnikiem -2 .
4. Dodajemy -2 i -3 . Wynik (czyli -5) zapisujemy pod tymi liczbami w wierszu w2.
5. Mnożymy -5 z wiersza w2 przez -3 . Wynik (czyli 15) zapisujemy w wierszu w1 pod współczynnikiem -5 .
6. Dodajemy -5 i 15 . Wynik (czyli 10) zapisujemy pod tymi liczbami w wierszu w2.
7. Mnożymy 10 z wiersza w2 przez -3 . Wynik (czyli -30) zapisujemy w wierszu w1 pod współczynnikiem 18 .

8. Dodajemy 18 i -30 . Wynik (czyli -12) zapisujemy pod tymi liczbami w wierszu w2.
9. Mnożymy -12 z wiersza w2 przez -3 . Wynik (czyli 36) zapisujemy w wierszu w1 pod współczynnikiem -36 .
10. Dodajemy -36 i 36. Wynik (czyli 0) zapisujemy pod tymi liczbami w wierszu w2.
11. Z wiersza w2 mamy: $q(x) = x^3 - 5x^2 + 10x - 12$ i $r = 0$.

Pomiędzy wielomianami $w(x)$, $p(x)$, $q(x)$ i liczbą r zachodzi związek (**). Otrzymujemy:

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 18x - 36 = (x + 3)(x^3 - 5x^2 + 10x - 12).$$

Wnioskujemy, że wielomian $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 18x - 36$ jest podzielny przez dwumian $x + 3$. Ilorazem tych wielomianów jest wielomian $x^3 - 5x^2 + 10x - 12$.

Przykład 16. Zastosujmy schemat Hornera do podzielenia wielomianu $w(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2$ przez dwumian $p(x) = x - 1$.

Zwróćmy uwagę, że wielomian $w(x)$ ma stopień 4 oraz wszystkie współczynniki różne od zera. W tym wypadku nasze a jest równe 1.

	1	-2	-1	4	-2
$a = 1$	↓	1	-1	-2	2
	1	-1	-2	2	0

W ten sposób, całkiem szybko przekonaliśmy się, że wielomian $p(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $w(x)$:

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^3 - x^2 - 2x + 2).$$

Przykład 17. Korzystając ze schematu Hornera sprawdźmy, czy wielomian $w(x) = x^5 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ dzieli się przez wielomian $p(x) = x - 2$.

Zauważmy, że w tym wypadku nie wszystkie współczynniki wielomianu są różne od zera (współczynnik przy x^4 jest równy zeru). Mamy zatem:

	1	0	2	-3	2	-3
$a = 2$	↓	2	4	12	18	40
	1	2	6	9	20	37

Widzimy, że wielomian $p(x)$ nie jest dzielnikiem wielomianu $w(x)$. Wielomian $w(x)$ możemy zapisać w postaci:

$$x^5 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = (x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 9x + 20)(x - 2) + 37.$$

Zauważmy, że:

$$w(2) = 2^5 + 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 32 + 16 - 12 + 4 - 3 = 37,$$

co oznacza, że reszta z dzielenia jest równa $w(2)$. Nie jest przypadkowe, co omówimy poniżej.

Omówmy teraz, jak schemat Hornera pomaga w wyznaczaniu wartości wielomianu $w(x)$ dla $x = a$. Na mocy twierdzenia 4 dla wielomianów $w(x)$ oraz $p(x) = x - a$, możemy zapisać:

$$w(x) = (x - a) \cdot p(x) + r,$$

gdzie r jest stałą. Kładąc $x = a$, otrzymujemy:

$$w(a) = (a - a) \cdot p(a) + r$$

$$w(a) = r.$$

Oznacza to, że reszta z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $p(x) = x - a$ wynosi $w(a)$. Jest to ostatnia liczba w ostatnim wierszu schematu Hornera. Zauważmy, że dla dużych a obliczenie $w(a)$ za pomocą schematu Hornera jest dużo szybsze i łatwiejsze rachunkowo — nie musimy obliczać kolejnych potęg liczby a .

Podczas zajęć, na których omawiane są zagadnienia związane z dzieleniem wielomianów, studenci (znający schemat Hornera) najczęściej podkreślają, że największymi jego zaletami są szybkość i prostota.

Najczęstsze zastosowania schematu Hornera

1. Dzielenie wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x - a$.
2. Obliczanie wartości wielomianu $w(x)$ dla $x = a$, dające także odpowiedź na pytanie o podzielności $w(x)$ przez $p(x) = x - a$.

5.4. Twierdzenie Bezouta i jego związek z rozkładem wielomianu na czynniki

Twierdzenie 5 (Bezouta). *Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $w(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.*

Dowód.

($\Rightarrow$) Przypomnijmy, że dla wielomianów $w(x)$ i $x - a$ istnieje wielomian $q(x)$ i liczba rzeczywista r , które spełniają warunek:

$$w(x) = (x - a)q(x) + r.$$

Warunek ten jest spełniony dla każdego x . Jeśli podstawimy a w miejsce x , to otrzymamy:

$$w(a) = (a - a)q(a) + r$$

$$w(a) = r.$$

Jeśli a jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$, to $w(a) = 0$. Z drugiej strony $w(a) = r$. Zatem $r = 0$, czyli $w(x)$ dzieli się bez reszty przez $x - a$.

($\Leftarrow$) Jeżeli $w(x)$ jest podzielny przez $x - a$, to (z definicji 3) istnieje taki wielomian $q(x)$, że:

$$w(x) = (x - a)q(x).$$

Jeśli podstawimy a w miejsce x , to otrzymamy $w(a) = (a-a)q(a) = 0$, co oznacza, że a jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$. $\square$

Twierdzenie Bezouta pozwala rozłożyć wielomian na czynniki. W połączeniu z twierdzeniem 4 może ono być stosowane iteracyjnie, co pozwala na rozłożenie danego wielomianu na iloczyn czynników nierozkładalnych. Zastosowanie tych twierdzeń prowadzi do następującego schematu postępowania: najpierw musimy znaleźć jakiś pierwiastek wielomianu (wystarczy jeden!), następnie dzielimy wielomian przez odpowiadający mu czynnik liniowy (bez reszty), a otrzymany iloraz ponownie analizujemy z wykorzystaniem twierdzenia Bezouta. Jako punkt zaczepienia (znalezienie pierwiastka) może nam służyć np. twierdzenie o pierwiastkach wymiernych.

Przykład 18. Wyznamy pierwiastki wielomianu $w(x) = 6x^3 - 11x^2 - 3x + 2$.

Pierwszy pierwiastek to np. 2. Rzeczywiście:

$$w(2) = 6 \cdot 2^3 - 11 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 48 - 44 - 6 + 2 = 50 - 50 = 0.$$

Stosując schemat Hornera do dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x - 2$, otrzymujemy:

	6	-11	-3	2
$a = 2$	↓	12	2	-2
	6	1	-1	0

Na mocy twierdzenia 4 możemy zapisać:

$$6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(6x^2 + x - 1).$$

Do wyznaczenia pierwiastków wielomianu $q(x) = 6x^2 + x - 1$ zastosujemy wzory (*) przedstawione w rozdziale *Podstawowe informacje o wielomianach i pierwiastkach*:

$$\frac{-1 - \sqrt{1 + 24}}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{-1 + \sqrt{1 + 24}}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Szukany pierwiastkami są liczby: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2$. Wielomian $w(x)$ można zapisać w postaci iloczynowej:

$$w(x) = 6 \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) (x - 2).$$

Przykład 19. Wyznamy pierwiastki wielomianu $w(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 18x - 36$.

I sposób

Nasz wielomian ma współczynniki całkowite, więc może mieć pierwiastki całkowite (mówi o tym twierdzenie 1). Obliczmy np.:

$$w(-3) = 9 \cdot 9 + 2 \cdot 27 - 5 \cdot 9 - 18 \cdot 3 - 36 = 9(9 + 6 - 5 - 6 - 4) = 9(9 - 9) = 0.$$

Liczba -3 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$, więc możemy podzielić go przez dwumian $x + 3$. Takie dzielenie wykonaliśmy już w przykładzie 15, gdzie otrzymaliśmy:

$$w(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 18x - 36 = (x + 3)(x^3 - 5x^2 + 10x - 12).$$

Oznaczając przez $q(x) = x^3 - 5x^2 + 10x - 12$, mamy wielomian o współczynnikach całkowitych. Obliczmy:

$$q(3) = 3 \cdot 9 - 5 \cdot 9 + 10 \cdot 3 - 12 = 3(9 - 15 + 10 - 4) = 3(19 - 19) = 0.$$

Wielomian $q(x)$ dzielimy przez dwumian $x - 3$ stosując schemat Hornera:

	1	-5	10	-12
$a = 3$	↓	3	-6	12
	1	-2	4	0

Otrzymujemy:

$$q(x) = (x - 3)(x^2 - 2x + 4).$$

Zatem:

$$w(x) = (x + 3)(x - 3)(x^2 - 2x + 4).$$

Wielomian $s(x) = x^2 - 2x + 4$ jest nierozkładalny (tzn. nie ma pierwiastków rzeczywistych, ponieważ $\Delta = 4 - 4 \cdot 4 < 0$). Stwierdzamy, że $w(x)$ ma tylko dwa pierwiastki rzeczywiste (oba jednokrotne). Są nimi liczby -3 i 3 .

II sposób

Wielomian $w(x)$ był już rozważany w przykładzie 10. Wiemy, że $w(x)$ ma dwa pierwiastki wymierne (3 i -3). Z twierdzenia Bezouta wynika, że $w(x)$ dzieli się zarówno przez dwumian $x - 3$, jak i przez dwumian $x + 3$. Zatem $w(x)$ jest podzielny przez iloczyn tych dwóch dwumianów, czyli przez wielomian $u(x) = (x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$. Podzielmy pisemnie⁶ $w(x)$ przez $u(x)$. Mamy:

$$\begin{array}{r}
 x^2 \quad -2x \quad +4 \\
 \hline
 (x^4 \quad -2x^3 \quad -5x^2 \quad +18x \quad -36) : (x^2 - 9) \\
 -x^4 \quad \quad \quad +9x^2 \\
 \hline
 -2x^3 \quad +4x^2 \quad +18x \quad -36 \\
 +2x^3 \quad \quad \quad -18x \\
 \hline
 \quad \quad 4x^2 \quad \quad -36 \\
 \quad \quad -4x^2 \quad \quad +36 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Otrzymaliśmy iloraz $s(x) = x^2 - 2x + 4$. Możemy zapisać $w(x)$ w postaci:

$$w(x) = u(x)s(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 2x + 4) = (x + 3)(x - 3)(x^2 - 2x + 4)$$

(ten sam rozkład wielomianu $w(x)$ otrzymaliśmy z obliczeń wykonanych I sposobem). Wnioskujemy, że $w(x)$ ma tylko dwa pierwiastki rzeczywiste: -3 i 3 .

Przykład 20. Zapiszmy wielomian $w(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x + 2$ w postaci iloczynu czynników nierozkładalnych. Z tej postaci odczytamy wszystkie rzeczywiste pierwiastki wielomianu $w(x)$.

Łatwo zauważyć, że $w(1) = 1 - 3 + 1 + 5 - 6 + 2 = 9 - 9 = 0$. Oznacza to, że 1 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$. Zastosujmy schemat Hornera do podzielenia $w(x)$ przez $x - 1$:

⁶ Nie możemy tu zastosować schematu Hornera, bo $u(x)$ nie jest postaci $x - a$.

	1	-3	1	5	-6	2
$a = 1$	↓	1	-2	-1	4	-2
	1	-2	-1	4	-2	0

Otrzymaliśmy, że

$$w(x) = (x-1)(x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2).$$

Skorzystajmy z wyniku uzyskanego w przykładzie 16. Mamy:

$$w(x) = (x-1)(x-1)(x^3 - x^2 - 2x + 2) = (x-1)^2(x^3 - x^2 - 2x + 2).$$

Oznaczmy $q(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$. Wielomian $q(x)$ można rozłożyć na czynniki przez grupowanie odpowiednich wyrazów i zastosowanie wzoru skróconego mnożenia:

$$q(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2 = x^2(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x^2 - 2) = (x-1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

Ostatecznie $w(x)$ ma następującą postać iloczynową:

$$w(x) = (x-1)^3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

Co oznacza, że pierwiastkami wielomianu $w(x)$ są liczby: $-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}$, przy czym 1 jest pierwiastkiem trzykrotnym.

6. Uwagi końcowe

Przedstawione w artykule metody wyznaczania pierwiastków wielomianów o współczynnikach rzeczywistych oraz ich rozkładu na czynniki należą do najczęściej stosowanych narzędzi. Czasami bywają one pracochłonne, zwłaszcza w przypadku wielomianów wyższych stopni. Z tego względu w praktyce stosuje się je łącznie, co pozwala uprościć obliczenia i znacząco skrócić czas potrzebny na znalezienie rozwiązania.

Rozkład wielomianu na czynniki jest kluczowy przy rozwiązywaniu równań i nierówności wymiernych (zob. [1]), które pojawiają się w wielu zagadnieniach praktycznych. Z tego względu umiejętność sprawnego posługiwania się różnymi technikami rozkładu wielomianu na czynniki jest niezbędna w praktyce inżynierskiej.

Warto podkreślić, że zarówno metoda grupowania, jak i twierdzenie Bezouta mają charakter uniwersalny: można je stosować nie tylko do wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, lecz także zespolonych. W tym drugim przypadku zasadnicze twierdzenie algebry gwarantuje, że każdy wielomian stopnia n (w tym także wielomian o współczynnikach rzeczywistych) ma dokładnie n pierwiastków zespolonych, licząc wraz z krotnościami.

Należy zauważyć, że nie zawsze w praktyce spotykamy wielomiany, których pierwiastki można znaleźć, stosując metody opisane w tym artykule. Często zdarza się, że wiemy, że jakiś wielomian ma pierwiastek, ale proste metody nie wystarczają do znalezienia tego pierwiastka. Wówczas musimy zadowolić się jakimś przybliżeniem tego pierwiastka. Służą do tego metody numeryczne. Przystępny opis takich metod można znaleźć np. w [2].

Sprawne posługiwanie się przedstawionymi metodami rozwija również intuicję algebraiczną. Im więcej przykładów przeanalizujemy i samodzielnie rozwiążemy, tym łatwiej rozpoznamy charakterystyczne struktury wielomianów, dobierzemy właściwe techniki i szybciej dostrzeżemy potencjalne uproszczenia.

7. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Znajdź takie wielomiany $q(x)$ oraz $r(x)$, że $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, jeśli:

- a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 10x + 11$, $g(x) = x^2 + 2x + 3$,
- b) $f(x) = x^3 + x^2 - 12x + 17$, $g(x) = x - 2$,
- c) $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x - 1$,
- d) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 15$, $g(x) = x^3 + x^2 + 3$,
- e) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 18x - 13$, $g(x) = x^2 + 5x + 3$.

Zadanie 2. Podane wielomiany przedstaw w postaci iloczynowej oraz wyznacz ich pierwiastki:

- a) $w(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$,
- b) $w(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$,
- c) $w(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$,
- d) $w(x) = x^4 - 9x^3 + 16x^2 + 36x - 80$,
- e) $w(x) = 6x^3 - 11x^2 - 3x + 2$,
- f) $w(x) = 60x^4 - 59x^3 - 21x^2 + 24x - 4$,
- g) $w(x) = 12x^4 - 32x^3 + 13x^2 + 8x - 4$,
- h) $w(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x$,
- i) $w(x) = x^6 - 2x^5 - 8x^4 + 14x^3 + 11x^2 - 28x + 12$.

Zadanie 3. Dany jest wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych. Wykaż, że jeśli $w(0)$ oraz $w(1)$ są liczbami nieparzystymi, to wielomian $w(x)$ nie posiada pierwiastków całkowitych.

Odpowiedź 1. .

- a) $q(x) = x + 2$, $r(x) = 3x + 5$,
- b) $q(x) = x^2 + 3x - 6$, $r(x) = 5$,
- c) $q(x) = x^2 + 5$, $r(x) = 2$,
- d) $q(x) = x + 4$, $r(x) = 3$,
- e) $q(x) = x^3 + 2x - 5$, $r(x) = x + 2$.

Odpowiedź 2. .

- a) pierwiastki: $-1, 2, 4$, iloczyn: $w(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$,
- b) pierwiastki: $-2, 1, 2, 3$, iloczyn: $w(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)(x - 2)$,
- c) pierwiastki: $-4, 1, 2, 3$, iloczyn: $w(x) = (x + 4)(x - 3)(x - 1)(x - 2)$,
- d) pierwiastki: $-2, 2, 4, 5$, iloczyn: $w(x) = (x - 4)(x + 2)(x - 5)(x - 2)$,

- e) pierwiastki: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2$, iloczyn: $w(x) = 6(x - \frac{1}{3})(x + \frac{1}{2})(x - 2)$,
f) pierwiastki: $-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, 1$, iloczyn: $w(x) = 60(x - \frac{1}{4})(x + \frac{2}{3})(x - \frac{2}{5})(x - 1)$,
g) pierwiastki: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2$, iloczyn: $w(x) = 12(x + \frac{1}{2})(x - \frac{2}{3})(x - 2)(x - \frac{1}{2})$,
h) pierwiastki: $-1, 0, 2$, iloczyn: $w(x) = x(x - 2)^2(x + 1)^2$,
i) pierwiastki: $-2, 1, 3$, iloczyn: $w(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2(x - 3)$.

Odpowiedź 3. Zauważ, że 0 oraz 1 nie są miejscami zerowymi $w(x)$ oraz skorzystaj z twierdzenia 2. Pamiętaj, że liczba nieparzysta nie ma parzystych dzielników.

Literatura

1. K. Adrianowicz, *Rozwiązywanie nierówności wymiernych*, MINUT 2019 (1), s. 76-90.
2. Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, Wydawnictwo WNT, Warszawa 2015.
3. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, GiS, Wrocław 2001.
4. J. Klukowski, I. Nabiałek, *Algebra dla studentów*, PWN, Warszawa 2016.
5. K.T. Leung, *Polynomials and equations*, Hong Kong University Press, Hong Kong 1992.