

Katarzyna ADRIANOWCZ

Katedra Zastosowań Matematyki i Metod Sztucznej Inteligencji, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23,
44-100 Gliwice

Macierze odwrotne. Część 4 – elegancka, choć niepraktyczna metoda Olguna-Tamera

Streszczenie. Artykuł zamyka serię prac poświęconych metodom wyznaczania macierzy odwrotnych. W poprzednich częściach omówiono definicję macierzy odwrotnej, jej własności oraz klasyczne metody wyznaczania: metodę opartą na definicji, metodę wykorzystującą macierz dopełnień algebraicznych oraz metodę Gaussa-Jordana. W niniejszej części przedstawiona zostaje nowa metoda wyznaczania macierzy odwrotnych, oparta na wykorzystaniu iloczynu wektorowego wierszy macierzy. Metoda ta, zaproponowana przez Olguna i Tamera, jest przede wszystkim interesującą ciekawostką teoretyczną, która łączy algebrę liniową z geometrią przestrzeni trójwymiarowej. Choć nie oferuje znaczącej przewagi obliczeniowej nad metodami klasycznymi, ma wartość edukacyjną jako przykład alternatywnego podejścia do problemu macierzy odwrotnych oraz ilustrację związków między różnymi działami matematyki. W zakończeniu przedstawiono dydaktyczne podsumowanie wszystkich metod omówionych w serii.

Słowa kluczowe: macierz odwrotna, iloczyn wektorowy, metoda Olguna-Tamera, algebra liniowa.

1. Wprowadzenie

W poprzednich częściach tej serii artykułów [1–3] szczegółowo omówiono definicję macierzy odwrotnej oraz trzy klasyczne metody jej wyznaczania: metodę opartą na definicji, metodę wykorzystującą macierz dopełnień algebraicznych oraz metodę Gaussa-Jordana. Każda z tych metod ma swoje zalety i ograniczenia – metoda definicyjna jest intuicyjna, ale czasochłonna, metoda dopełnień algebraicznych wymaga obliczenia wielu wyznaczników, a metoda Gaussa-Jordana może być podatna na błędy numeryczne.

W 2020 roku Olgun i Tamer [6] zaproponowali alternatywną metodę wyznaczania macierzy odwrotnych, która wykorzystuje geometryczne własności iloczynu wektorowego. Ta metoda oferuje odmienne podejście do klasycznych algorytmów, szczególnie interesujące ze względu na swoją elegancję i bezpośredni związek z geometrią przestrzeni trójwymiarowej.

Metoda ta, choć nie przewyższa efektywnością metod klasycznych, ma istotną wartość dydaktyczną jako przykład niestandardowego podejścia do problemu odwracania macierzy. Zanim przejdziemy do jej szczegółowego omówienia, przypomnijmy najważniejszą definicję z pierwszego artykułu [1] w serii.

Definicja 1. Macierz odwrotna do danej macierzy kwadratowej i nieosobliwej $\mathbf{A}$ stopnia n , oznaczana jako $\mathbf{A}^{-1}$, to macierz spełniająca warunek:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n,$$

gdzie $\mathbf{I}_n$ jest macierzą jednostkową stopnia n .

Aby zrozumieć nową metodę, niezbędne jest przypomnienie podstawowych własności iloczynu wektorowego¹, który jest fundamentem tej metody.

Definicja 2. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest wektorem $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ zdefiniowanym jako:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2, & a_3 b_1 - a_1 b_3, & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}.$$

Praktycznym sposobem obliczania iloczynu wektorowego jest obliczenie wyznacznika:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \dots$$

gdzie $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ to jednostkowe wektory bazy standardowej. Wyznacznik ten można obliczyć na przykład stosując rozwinięcie według pierwszego wiersza (metodą Laplace'a²)

W dowodzie twierdzenia będącego podstawą omawianej metody wykorzystamy również iloczyn mieszany wektorów i jego własności.³

Definicja 3. Iloczyn mieszany (iloczyn skalarno-wektorowy) trzech wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest liczbą określoną wzorem:

$$\mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

gdzie $\circ$ oznacza iloczyn skalarny, $\mathbf{a} \times$ iloczyn wektorowy.

Iloczyn mieszany ma następujące własności, które będą kluczowe w dowodzie twierdzenia 1:

1. **Interpretacja jako wyznacznik:** Jeżeli $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$, $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]$, to

$$\mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

¹ Iloczyn wektorowy można definiować geometrycznie określając jego długość, kierunek i zwrot, ale dla celów obliczeniowych w tym artykule używamy równoważnego podejścia algebraicznego.

² Wyznacznik można obliczyć dowolną metodą – wynik będzie identyczny.

³ Szczegółowe informacje o iloczynach wektorowym i mieszanym można znaleźć w podręcznikach geometrii analitycznej, np. [5, 7].

2. **Niezmienniczość przy cyklicznej permutacji:** Cykliczna zmiana kolejności wektorów nie zmienia wartości iloczynu mieszanego:

$$\mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \circ (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \circ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

3. **Prostopadłość:** Iloczyn wektorowy $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ jest prostopadły do wektora $\mathbf{b}$ oraz do wektora $\mathbf{c}$. Zatem jeżeli jeden z wektorów $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ jest równy wektorowi $\mathbf{a}$, to

$$\mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0.$$

Równoważnie można powiedzieć, że powyższa równość jest prawdziwa, ponieważ gdy dwa wektory w iloczynie mieszanym są identyczne, to wyznacznik macierzy z nich zbudowanej wynosi zero (dwa wiersze są takie same).

2. Metoda Olguna-Tamera dla macierzy 3×3

Kluczowym elementem metody Olguna-Tamera jest następujące twierdzenie, które wiąże kolumny macierzy odwrotnej z iloczynami wektorowymi wierszy macierzy oryginalnej. Przed zastosowaniem metody musimy mieć pewność, że rozważana macierz jest odwracalna, czyli jej wyznacznik jest różny od zera. Warunki odwracalności macierzy omówiono szczegółowo w pierwszej części tej serii [1] oraz w standardowych podręcznikach algebry liniowej [4, 5, 7].

Twierdzenie 1. Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą odwracalną stopnia 3.

Jeżeli $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ oznaczają wiersze danej macierzy $\mathbf{A}$ (traktowane jako wektory wierszowe w przestrzeni $\mathbb{R}^3$), a $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ oznaczają kolumny macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$ (wektory kolumnowe), to:

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)^T$$

$$\mathbf{C}_2 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1)^T$$

$$\mathbf{C}_3 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)^T$$

Zatem:

$$\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3] = \frac{1}{\det \mathbf{A}} [(\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)^T, (\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1)^T, (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)^T].$$

Dowód. Aby udowodnić poprawność wzoru, wystarczy pokazać, że $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

Obliczmy iloczyn:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det \mathbf{A}} [(\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)^T, (\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1)^T, (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)^T] = \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} \cdot [(\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)^T, (\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1)^T, (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)^T]. \end{aligned}$$

Dalsze obliczenia wymagają wymnożenia dwóch macierzy. Każda kolumna prawej macierzy ma postać $(\mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j)^T$, czyli jest transponowanym iloczynem wektorowym.

Należy zauważyć, że dla wektorów wierszowych $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ i $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ w $\mathbb{R}^3$ iloczyn macierzowy wiersza i transponowanego wektora:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T = [u_1, u_2, u_3] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \mathbf{u} \circ \mathbf{v}$$

jest równy iloczynowi skalarnemu tych wektorów.

Ponieważ iloczyn ten pojawia się w każdym elemencie wynikowej macierzy, możemy zastąpić mnożenie macierzowe iloczynami skalarnymi.

Otrzymujemy zatem :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} \cdot [(\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)^T, (\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1)^T, (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)^T] = \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \circ (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3) & \mathbf{R}_1 \circ (\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1) & \mathbf{R}_1 \circ (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2) \\ \mathbf{R}_2 \circ (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3) & \mathbf{R}_2 \circ (\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1) & \mathbf{R}_2 \circ (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2) \\ \mathbf{R}_3 \circ (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3) & \mathbf{R}_3 \circ (\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1) & \mathbf{R}_3 \circ (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Na podstawie własności iloczynu mieszanego przedstawionych po Definicji 3 mamy:

- $\mathbf{R}_1 \circ (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3) = \det \mathbf{A}$ (własność 1: iloczyn mieszany jako wyznacznik macierzy zbudowanej z trzech wektorów),
- $\mathbf{R}_2 \circ (\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1) = \det \mathbf{A}$ (własność 2: cykliczna permutacja),
- $\mathbf{R}_3 \circ (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2) = \det \mathbf{A}$ (własność 2: cykliczna permutacja),
- $\mathbf{R}_i \circ (\mathbf{R}_j \times \mathbf{R}_k) = 0$ gdy $i \in \{j, k\}$ (własność 3: wektor jest prostopadły do iloczynu wektorowego, który go zawiera).

Podstawiając te wartości otrzymujemy:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & \det \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Analogicznie można pokazać, że $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$. □

2.1. Algorytm obliczeniowy

Sformułujmy algorytm wyznaczania macierzy odwrotnej metodą Olguna-Tamera dla macierzy 3×3 :

1. Sprawdzamy czy $\det \mathbf{A} \neq 0$ (warunek istnienia macierzy odwrotnej). Wartość wyznacznika potrzebna jest do dalszych obliczeń.
2. Wypisujemy wiersze macierzy $\mathbf{A}$: $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$.

3. Obliczamy iloczyny wektorowe

- $\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3$
- $\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1$
- $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$.

4. Budujemy z nich macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \left[(\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)^T, (\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1)^T, (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)^T \right]$.

3. Przykłady

Przykład 1. Znaleźć macierz odwrotną do $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ metodą Olguna-Tamera.

Krok 1. Obliczamy wyznacznik stosując rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza:

$$\det \mathbf{A} = 2(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3) - (-1)((-3) \cdot (-1) - 2 \cdot 1) + 0 = -13.$$

Krok 2. Identyfikujemy wiersze:

$$\mathbf{R}_1 = [2, -1, 0], \quad \mathbf{R}_2 = [-3, 1, 2], \quad \mathbf{R}_3 = [1, 3, -1].$$

Krok 3. Obliczamy iloczyny wektorowe:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3)\mathbf{i} - ((-3) \cdot (-1) - 2 \cdot 1)\mathbf{j} + ((-3) \cdot 3 - 1 \cdot 1)\mathbf{k} = \\ &= -7\mathbf{i} - 1\mathbf{j} - 10\mathbf{k} = [-7, -1, -10], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (3 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1))\mathbf{i} - (1 \cdot 0 - (-1) \cdot 2)\mathbf{j} + (1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2)\mathbf{k} = \\ &= -1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = [-1, -2, -7], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ((-1) \cdot 2 - 0 \cdot 1)\mathbf{i} - (2 \cdot 2 - 0 \cdot (-3))\mathbf{j} + (2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3))\mathbf{k} = \\ &= -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 1\mathbf{k} = [-2, -4, -1]. \end{aligned}$$

Krok 4. Budujemy macierz odwrotną:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \left[(\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)^T, (\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1)^T, (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)^T \right] = -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -7 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \\ -10 & -7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{7}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}.$$

Sprawdzenie:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{7}{13} & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{7}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład 2. Znaleźć macierz odwrotną do $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Krok 1. $\det \mathbf{B} = 2(2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) - 1(1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) + 0 = 6 - 2 = 4$.

Krok 2. Wiersze: $\mathbf{R}_1 = [2, 1, 0]$, $\mathbf{R}_2 = [1, 2, 1]$, $\mathbf{R}_3 = [0, 1, 2]$.

Krok 3. Iloczynny wektorowe:

$$\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3 = [2 \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2, 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0] = [3, -2, 1],$$

$$\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1 = [1 \cdot 0 - 2 \cdot 1, 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0, 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2] = [-2, 4, -2],$$

$$\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 = [1 \cdot 1 - 0 \cdot 2, 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1, 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1] = [1, -2, 3].$$

Krok 4. Macierz odwrotna: $\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Weryfikacja:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Uogólnienie na wyższe wymiary

Dla macierzy o wymiarach większych niż 3×3 , autorzy metody wprowadzają uogólnienie operacji iloczynu wektorowego przez zdefiniowanie operacji Λ .

Definicja 4. Dla wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ definiujemy operację Λ jako

$$\mathbf{v}_1 \Lambda \mathbf{v}_2 \Lambda \dots \Lambda \tilde{\mathbf{v}}_i \Lambda \dots \Lambda \mathbf{v}_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} M_{ki} \mathbf{k}_k,$$

gdzie $\widetilde{\mathbf{v}}_i$ oznacza pominięcie wektora $\mathbf{v}_i$, M_{ki} to wyznacznik macierzy powstałej przez skreślenie k -tego wiersza i i -tej kolumny z macierzy, w której wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ są wierszami, a $\mathbf{k}_k$ to k -ty wektor bazowy.

Twierdzenie 2. Dla macierzy $\mathbf{A}$ stopnia $n \geq 4$, jeżeli $\mathbf{R}_i$ oznacza i -ty wiersz macierzy $\mathbf{A}$, to j -ta kolumna macierzy odwrotnej wynosi:

$$\mathbf{C}_j = \frac{(-1)^{j+1}}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{R}_1 \Lambda \mathbf{R}_2 \Lambda \cdots \Lambda \widetilde{\mathbf{R}}_j \Lambda \cdots \Lambda \mathbf{R}_n)^T.$$

Uwaga. Dowód pomijamy, ponieważ przebiega on analogicznie do dowodu Twierdzenia 1 – różni się jedynie rozmiarem macierzy i liczbą wektorów w operacji Λ .

Przykład 3. Zilustrujmy działanie uogólnionej metody Olguna-Tamera na macierz 4×4 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Krok 1. Sprawdzamy, czy macierz jest odwracalna, obliczając jej wyznacznik. Można zastosować dowolną metodę obliczania wyznacznika, na przykład rozwinięcie względem trzeciej kolumny (która zawiera tylko jeden element niezerowy):

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Ponieważ $\det \mathbf{A} \neq 0$, macierz jest odwracalna.

Krok 2. Zgodnie z uogólnieniem, pierwsza kolumna macierzy odwrotnej wynosi:

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{R}_2 \Lambda \mathbf{R}_3 \Lambda \mathbf{R}_4)^T.$$

Operacja Λ dla trzech wektorów w $\mathbb{R}^4$ polega na obliczeniu wyznacznika:

$$\mathbf{R}_2 \Lambda \mathbf{R}_3 \Lambda \mathbf{R}_4 = \begin{vmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_3 & \mathbf{k}_4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Rozwijając względem trzeciej kolumny:

$$\mathbf{R}_2 \Lambda \mathbf{R}_3 \Lambda \mathbf{R}_4 = \mathbf{k}_3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}_3 \cdot 2 = [0, 0, 2, 0].$$

Zatem:

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{2}[0, 0, 2, 0]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Analogicznie należy obliczyć pozostałe kolumny (szczegółowe obliczenia pomijamy):

$$\text{Druga kolumna: } \mathbf{C}_2 = \frac{(-1)^{2+1}}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{R}_3 \wedge \mathbf{R}_4)^T = -\frac{1}{2} (\mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{R}_3 \wedge \mathbf{R}_4)^T.$$

$$\text{Trzecia kolumna: } \mathbf{C}_3 = \frac{(-1)^{3+1}}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{R}_2 \wedge \mathbf{R}_4)^T = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{R}_2 \wedge \mathbf{R}_4)^T.$$

$$\text{Czwarta kolumna: } \mathbf{C}_4 = \frac{(-1)^{4+1}}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{R}_2 \wedge \mathbf{R}_3)^T = -\frac{1}{2} (\mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{R}_2 \wedge \mathbf{R}_3)^T.$$

Po wykonaniu obliczeń dostajemy:

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Krok 4. Budujemy macierz odwrotną z obliczonych kolumn:

$$\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2 \ \mathbf{C}_3 \ \mathbf{C}_4] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Weryfikacja: Sprawdzamy czy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zastosowanie metody Olguna-Tamera wymaga obliczenia wszystkich czterech kolumn macierzy odwrotnej, co oznacza czterokrotne wykonanie operacji $\wedge$ na trzech wektorach w $\mathbb{R}^4$. Każda operacja wyznaczania kolumny macierzy odwrotnej wymaga obliczenia wyznacznika 4×4 . W tym konkretnym przykładzie, dzięki dużej liczbie zer w macierzy, obliczenia są bardzo proste. Jednak dla ogólnej macierzy 4×4 bez szczególnej struktury, nawet przy zastosowaniu najbardziej efektywnych metod (jak eliminacja Gaussa) jest to bardziej pracochłonne niż bezpośrednie zastosowanie metody Gaussa-Jordana do całej macierzy jednocześnie.

To doskonale ilustruje, dlaczego metoda Olguna-Tamera traci praktyczną wartość dla macierzy wyższych stopni. Nawet przy sprzyjającej strukturze macierzy (jak w tym przykładzie), złożoność obliczeniowa przewyższa korzyści z geometrycznej elegancji metody.

5. Podsumowanie

Niniejszy artykuł zamyka cykl prac poświęconych różnym dokładnym metodom wyznaczania macierzy odwrotnych. W całej serii omówiono cztery podejścia: metodę definicyjną, metodę dopełnień algebraicznych, metodę Gaussa-Jordana oraz metodę Olguna-Tamera. Każda z tych metod ma swoje miejsce w procesie edukacyjnym i wnosi coś cennego do rozumienia problemu odwracania macierzy.

Metoda definicyjna jest najbardziej intuicyjna i bezpośrednio nawiązuje do podstawowej definicji macierzy odwrotnej. Pozwala studentom zrozumieć istotę problemu, choć jest czasochłonna.

Metoda dopełnień algebraicznych łączy wyznaczanie macierzy odwrotnej z teorią wyznaczników, pokazując głębokie związki między różnymi pojęciami algebry liniowej.

Metoda Gaussa-Jordana uczy systematycznego podejścia do przekształceń macierzowych i stanowi podstawę dla zrozumienia algorytmów numerycznych stosowanych w praktyce.

Metoda Olguna-Tamera oferuje perspektywę geometryczną, łącząc algebrę liniową z geometrią analityczną. Stanowi interesujące uzupełnienie klasycznych (omówionych w trzech poprzednich częściach cyklu) metod, choć należy ją traktować przede wszystkim jako ciekawostkę teoretyczną.

Analiza tej ostatniej metody pokazuje, że dla macierzy 3×3 wymaga ona podobnej liczby operacji arytmetycznych co metody klasyczne, nie oferując znaczącej przewagi wydajnościowej. Jej główne zalety to:

- Oferuje nowe spojrzenie na problem macierzy odwrotnej przez pryzmat geometrii przestrzeni trójwymiarowej
- Łączy algebrę liniową z geometrią analityczną w elegancki sposób
- Ma wartość edukacyjną jako przykład alternatywnego podejścia matematycznego
- Może być atrakcyjna dydaktycznie dla studentów znających już iloczyn wektorowy

Ograniczenia tej metody obejmują brak przewagi obliczeniowej nad metodami klasycznymi, ograniczoną praktyczną użyteczność dla macierzy wyższych stopni oraz wymaganie dobrej znajomości iloczynu wektorowego.

Metoda Olguna-Tamera jest przede wszystkim interesującym przykładem tego, jak różne dziedziny matematyki mogą się przenikać i inspirować do nowych podejść w rozwiązywaniu klasycznych problemów. Choć nie rewolucjonizuje praktycznych obliczeń, wzbogaca nasze rozumienie związków między algebrą liniową a geometrią, co zamyka w sposób naturalny przedstawioną serię prac o metodach wyznaczania macierzy odwrotnych.

Literatura

1. K. Adrianowicz, *Macierze odwrotne. Część 1 – definicje, własności, wyznaczanie macierzy odwrotnych z definicji*, MINUT 2023 (5), s. 183-194.
2. K. Adrianowicz, *Macierze odwrotne. Część 2 – wyznaczanie macierzy odwrotnych z wykorzystaniem dopełnień algebraicznych*, MINUT 2025 (6).
3. K. Adrianowicz, *Macierze odwrotne. Część 3 – metoda Gaussa-Jordana*, MINUT 2025 (6).
4. H. Anton, *Elementary Linear Algebra (Applications Version)* (9th ed.), Wiley International 2005.
5. M. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1976.
6. N. Olgun, H. Tamer, *A New Method for the Inverse of the Square Matrices*, Algebra Letters 2020:1 (2020), <https://doi.org/10.28919/al/4334>.
7. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2022.