

Katarzyna ADRIANOWCZ

Katedra Zastosowań Matematyki i Metod Sztucznej Inteligencji, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23,
44-100 Gliwice

Macierze odwrotne. Część 3 – metoda Gaussa-Jordana

Streszczenie. Artykuł stanowi kontynuację serii prac dotyczących metod wyznaczania macierzy odwrotnych. W poprzednich częściach omówiono definicję macierzy odwrotnej, jej własności oraz metody wyznaczania – na podstawie definicji i wykorzystując macierz dopełnień algebraicznych. W niniejszej części zaprezentowana została metoda Gaussa-Jordana, będąca algorytmicznym podejściem opartym na przekształceniach elementarnych. Metoda ta jest analogiczna do eliminacji Gaussa stosowanej w rozwiązywaniu układów równań liniowych. W artykule szczegółowo omówiono trzy rodzaje operacji elementarnych na wierszach (ERO1, ERO2, ERO3) oraz ich zastosowanie w procesie wyznaczania macierzy odwrotnych. Wszystkie zagadnienia zilustrowano szczegółowo omówionymi przykładami. Na końcu artykułu znajdują się zadania do samodzielnego rozwiązania wraz z odpowiedziami.

Słowa kluczowe: macierz, macierz odwrotna, przekształcenia elementarne, metoda Gaussa-Jordana.

1. Wiadomości wstępne

Wyznaczanie macierzy odwrotnej to ważne zagadnienie algebry liniowej o szerokich zastosowaniach w matematyce stosowanej i technice obliczeniowej. W poprzednich częściach [2,3] przedstawiono definicję macierzy odwrotnej oraz dwie metody jej obliczania: metodę opartą na definicji oraz metodę wykorzystującą macierz dopełnień algebraicznych.

Ponieważ znajomość definicji macierzy odwrotnej jest kluczowa dla dalszych rozważań, przypomniemy ją poniżej.

Definicja 1. *Macierz odwrotna do danej macierzy kwadratowej i nieosobliwej $\mathbf{A}$ stopnia n , oznaczana jako $\mathbf{A}^{-1}$, to macierz spełniająca warunek:*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n,$$

gdzie $\mathbf{I}_n$ jest macierzą jednostkową stopnia n .

W niniejszym artykule zaprezentowana zostanie kolejna metoda, znana jako **metoda Gaussa-Jordana**, która bazuje na **przekształceniach elementarnych** i jest ściśle powiązana z metodą eliminacji Gaussa stosowaną do rozwiązywania układów równań liniowych. W całym artykule korzystamy ze standardowych oznaczeń, które zostały wprowadzone w 1 części [2].

Idea metody Gaussa-Jordana jest następująca: jeśli seria operacji elementarnych przekształca macierz $\mathbf{A}$ w macierz jednostkową $\mathbf{I}$, to ta sama seria operacji przekształci macierz jednostkową $\mathbf{I}$ w macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$. Dzięki temu możemy równolegle przekształcać obie macierze, aż osiągniemy pożądany rezultat. Teoretyczne uzasadnienie tej własności operacji elementarnych przedstawiono w pracy [1].

W metodzie Gaussa-Jordana wygodnym narzędziem jest **macierz rozszerzona**, która ułatwia przejrzysty zapis kolejnych kroków. Dla danej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ stopnia n , macierz rozszerzona jest konstruowana przez dołączenie do $\mathbf{A}$ macierzy jednostkowej $\mathbf{I}$ tego samego stopnia:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right].$$

Celem jest przekształcenie tej macierzy w postać $[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]$ za pomocą operacji elementarnych na wierszach.

W kolejnych rozdziałach zostaną przypomniane trzy rodzaje operacji elementarnych (ERO1, ERO2, ERO3), które są niezbędne do przeprowadzenia metody Gaussa-Jordana. Następnie omówiona zostanie metoda Gaussa-Jordana wraz z przykładami jej zastosowania.

2. Wyznaczanie macierzy odwrotnej za pomocą przekształceń elementarnych

Opisywana w tym rozdziale metoda, nazywana metodą Gaussa-Jordana, jest analogiczna do metody eliminacji Gaussa służącej do rozwiązywania układów równań liniowych. Obie metody wykorzystują te same operacje elementarne na wierszach macierzy. Różnica polega na tym, że metoda Gaussa-Jordana ma na celu przekształcenie macierzy kwadratowej w macierz jednostkową, a nie tylko w postać trójkątną (schodkową), która wystarcza w procedurze rozwiązywania układów równań.

Operacje elementarne

Przypomnijmy trzy rodzaje operacji wykonywanych na macierzach, zwane **operacjami elementarnymi** (Elementary Row Operations, ERO):

ERO1 – zamiana miejscami dwóch różnych wierszy macierzy.

Będziemy stosować oznaczenie: $w_i \leftrightarrow w_j$ (zamiana i -tego wiersza z wierszem j -tym).

ERO2 – pomnożenie każdego elementu danego wiersza przez liczbę różną od zera.

Będziemy stosować oznaczenie: $w_i \cdot c$ (pomnożenie i -tego wiersza przez liczbę $c \neq 0$).

ERO3 – dodanie do elementów danego wiersza odpowiadających im elementów innego wiersza pomnożonych przez ustaloną liczbę.

Będziemy stosować oznaczenie: $w_i + w_j \cdot c$ (dodanie do wiersza i -tego wiersza j -tego pomnożonego przez c).

Analogiczne operacje elementarne można również wykonywać na kolumnach. Jednak w metodzie Gaussa-Jordana do odwracania macierzy stosuje się wyłącznie operacje na wierszach ze względu na prostotę algorytmu. Teoretycznie można również używać operacji na kolumnach lub mieszać obie rodzaje operacji, ale wymagałoby to jednak modyfikacji algorytmu i utraciłoby prostotę przedstawionej metody. Szczegółowe przykłady zastosowania operacji elementarnych oraz teoretyczne uzasadnienie poprawności metody można znaleźć w artykule [1].

Macierze elementarne

Formalnie, zastosowanie operacji elementarnej na macierzy oznacza pomnożenie jej przez odpowiednią macierz elementarną:

- **ERO1** – Zamiana dwóch wierszy macierzy: odpowiada pomnożeniu przez macierz elementarną E_{ij} , która jest macierzą jednostkową z zamienionymi wierszami i oraz j .
- **ERO2** – Pomnożenie wiersza przez liczbę c różną od zera: odpowiada pomnożeniu przez macierz elementarną $E_i(c)$, która powstaje z macierzy jednostkowej przez zastąpienie elementu na pozycji (i, i) liczbą c .
- **ERO3** – Dodanie do danego wiersza wielokrotności innego wiersza: odpowiada pomnożeniu przez macierz elementarną $E_{ij}(c)$, która jest macierzą jednostkową z dodatkowym, niezerowym elementem c na pozycji (i, j) .

Metoda Gaussa-Jordana

Wyznaczanie macierzy odwrotnej do macierzy nieosobliwej $\mathbf{A}$ metodą Gaussa-Jordana polega na wielokrotnym stosowaniu przekształceń elementarnych jednocześnie na danej macierzy $\mathbf{A}$ i na macierzy jednostkowej $\mathbf{I}$ tego samego stopnia, tak długo, aż macierz $\mathbf{A}$ przekształci się w macierz jednostkową.

Formalnie, proces ten można zapisać jako:

$$E_k \cdots E_2 E_1 \mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad (1)$$

gdzie macierze $E_1, E_2, \dots, E_k$ to macierze elementarne reprezentujące kolejne operacje elementarne wykonywane na macierzy $\mathbf{A}$.

Mnożąc obustronnie równość (1) przez macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$ z prawej strony, otrzymujemy:

$$E_k \cdots E_2 E_1 \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Oznacza to, że stosując te same przekształcenia elementarne na macierzy jednostkowej $\mathbf{I}$, otrzymujemy macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$.

Dzięki tej metodzie macierz odwrotna jest wyznaczana w sposób efektywny, a cały proces można zautomatyzować, co jest szczególnie przydatne w obliczeniach numerycznych. W praktyce, zamiast jawnie mnożyć macierze elementarne, wykonuje się operacje bezpośrednio na wierszach macierzy rozszerzonej $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$, co prowadzi do uzyskania postaci $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$.

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_k \cdots E_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}].$$

2.1. Algorytm w praktyce

Podsumowując, wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą Gaussa-Jordana przebiega według następujących kroków:

1. Konstruujemy macierz rozszerzoną $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$, gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową tego samego stopnia co $\mathbf{A}$.
2. Stosując operacje elementarne na wierszach, przekształcamy macierz rozszerzoną, dobierając kroki Gaussa tak, aby lewa część (macierz $\mathbf{A}$) przekształciła się w macierz jednostkową. Równocześnie przekształcana jest również prawa część macierzy rozszerzonej (macierz $\mathbf{I}$).
3. Po zakończeniu przekształceń prawa część macierzy rozszerzonej zawiera macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$.

W praktyce oznacza to systematyczne dążenie do postaci $[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]$ poprzez eliminację elementów poza przekątną główną (doprowadzanie ich do wartości 0) i sprowadzenie elementów na przekątnej do wartości 1.

3. Przykłady

Przykład 1. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Zaczynamy od zestawienia macierzy $\mathbf{A}$ z macierzą jednostkową tego samego stopnia, tworząc macierz rozszerzoną:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Przystępujemy do przekształcania tak zbudowanej macierzy (należy pamiętać o wykonaniu tych samych przekształceń również na macierzy po prawej stronie)

Krok 1: Eliminacja w pierwszej kolumnie

Wyzerujemy elementy pod pierwszym elementem głównym:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + w_1 \cdot 2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Kontynuujemy eliminację w pierwszej kolumnie:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{3} & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + w_1 \cdot (-3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Krok 2: Eliminacja w drugiej kolumnie

Wyzerujemy element pod drugim elementem głównym:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + w_2 \cdot (-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & -1 & -7 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

Krok 3: Normalizacja trzeciego wiersza

Sprowadzamy element na przekątnej do wartości 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & -1 \end{array} \right].$$

Krok 4: Eliminacja wsteczna

Wyzerujemy element nad trzecim elementem głównym:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + w_3 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \mathbf{0} & -6 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & -1 \end{array} \right].$$

Otrzymaliśmy macierz jednostkową po lewej stronie ostatniej macierzy, więc $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Weryfikacja wyniku

Sprawdźmy czy faktycznie uzyskana macierz jest macierzą odwrotną do $\mathbf{A}$.

Mając pewność, że macierz jest odwracalna, wystarczy sprawdzić tylko jedną z równości $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ lub $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wynik potwierdza poprawność obliczeń.

Przykład 2. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zaczynamy od budowy macierzy rozszerzonej, czyli zestawienia macierzy $\mathbf{B}$ z macierzą jednostkową tego samego stopnia:

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{I}_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Krok 1: Normalizacja pierwszego wiersza

Sprowadzamy pierwszy element główny¹ do wartości 1:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Krok 2: Eliminacja w pierwszej kolumnie

Wyzerujemy element pod pierwszym elementem głównym:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + w_1 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right].$$

Krok 3: Normalizacja drugiego wiersza

Sprowadzamy drugi element główny do wartości 1:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot 2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

Krok 4: Eliminacja wsteczna

Wyzerujemy element nad drugim elementem głównym:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + w_2 \cdot (-\frac{1}{2})} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

Otrzymaliśmy macierz jednostkową po lewej stronie, więc $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Weryfikacja wyniku

Sprawdźmy czy faktycznie uzyskana macierz jest macierzą odwrotną do $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wynik potwierdza poprawność obliczeń.

Przykład 3. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zaczynamy od zestawienia macierzy $\mathbf{C}$ z macierzą jednostkową tego samego stopnia:

$$[\mathbf{C} : \mathbf{I}_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

¹ Normalizację pierwszego wiersza tej macierzy można również osiągnąć zamieniając miejscami wiersze pierwszy i drugi. Pozwoliłoby to uniknąć dzielenia, które prowadzi do pojawienia się ułamków.

Krok 1: Zamiana wierszy

Pierwszy element macierzy jest zerem, więc musimy zastosować operację ERO1 (zamianę wierszy):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{0} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Krok 2: Eliminacja w pierwszej kolumnie

Wyzerujemy element pod pierwszym elementem głównym:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + w_1 \cdot (-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

Krok 3: Eliminacja w drugiej kolumnie

Wyzerujemy element pod drugim elementem głównym:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + w_2 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & -7 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

Krok 4: Normalizacja trzeciego wiersza

Sprowadzamy trzeci element główny do wartości 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{7} & -1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \cdot (-\frac{1}{7})} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array} \right].$$

Krok 5: Eliminacja wsteczna

Wyzerujemy elementy nad trzecim elementem głównym:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + w_3 \cdot (-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array} \right].$$

Kontynuujemy eliminację wsteczną:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + w_3 \cdot (-3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \mathbf{0} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array} \right].$$

Otrzymaliśmy macierz jednostkową po lewej stronie, więc $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

Weryfikacja wyniku

Sprawdźmy czy faktycznie uzyskana macierz jest macierzą odwrotną do $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wynik potwierdza poprawność obliczeń.

Przykład 4. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Zaczynamy od zestawienia macierzy $\mathbf{D}$ z macierzą jednostkową tego samego stopnia:

$$[\mathbf{D} : \mathbf{I}_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Krok 1: Eliminacja w pierwszej kolumnie

Wyzerujemy elementy pod pierwszym elementem głównym:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + w_1 \cdot (-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Wniosek

Drugi wiersz składa się z samych zer po lewej stronie macierzy rozszerzonej, co oznacza, że macierz $\mathbf{D}$ jest osobliwa i nie posiada macierzy odwrotnej.

Ten przykład pokazuje dodatkową zaletę metody Gaussa-Jordana: pozwala ona nie tylko wyznaczyć macierz odwrotną, ale również sprawdzić, czy macierz jest odwracalna. Jeśli w trakcie przekształceń otrzymamy wiersz złożony z samych zer po lewej stronie macierzy rozszerzonej, oznacza to, że macierz nie jest odwracalna. Dzięki temu nie musimy wcześniej obliczać wyznacznika – informacja o odwracalności macierzy wynika naturalnie z procesu przekształceń.

4. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Wyznacz macierze odwrotne do podanych macierzy metodą Gaussa-Jordana:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$

b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix},$

c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$

d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$

Zadanie 2. Wyznacz macierze odwrotne do podanych macierzy metodą Gaussa-Jordana:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Sprawdź, które z podanych macierzy są odwracalne, używając metody Gaussa-Jordana:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. Wyznacz macierze odwrotne do macierzy, które są odwracalne z zadania 3.

5. Odpowiedzi

Odpowiedź 1.

$$\text{a) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź 2.

$$\text{a) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź 3.

a) Macierz nie jest odwracalna,

b) Macierz jest odwracalna,

c) Macierz nie jest odwracalna,

d) Macierz jest odwracalna.

Odpowiedź 4.

$$\mathbf{b}) \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}) \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 6 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Literatura

1. K. Adrianowicz, I. Nowak,, *Dlaczego eliminacja Gaussa działa i dlaczego jest taka pomocna?*, MINUT 2023 (5), s. 137-152.
2. K. Adrianowicz, *Macierze odwrotne. Część 1 – definicje, własności, wyznaczanie macierzy odwrotnych z definicji*, MINUT 2023 (5), s. 183-194.
3. K. Adrianowicz, *Macierze odwrotne. Część 2 – wyznaczanie macierzy odwrotnych z wykorzystaniem dopełnień algebraicznych*, MINUT 2025 (6).
4. M. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1976.
5. M. Biedrońska, *Zbiór zadań z odpowiedziami i rozwiązaniami*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
6. R. Grzymkowski, *Matematyka dla studentów wyższych uczelni technicznych*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 1999.
7. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.