

Katarzyna ADRIANOWCZ, Iwona NOWAK

Katedra Metod Matematycznych w Technice i Informatyce, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23,
44-100 Gliwice

Egzamin z teorii matematyki na kierunkach inżynierskich – czy i jak warto go przeprowadzać?

Streszczenie. W dobie natychmiastowego dostępu do informacji i wszechobecnych narzędzi wspomagających rozwiązywanie zadań matematycznych coraz częściej pojawiają się pytania o sens i formę egzaminowania teorii matematyki, zwłaszcza na kierunkach inżynierskich. Czy nadal warto sprawdzać znajomość definicji, twierdzeń i ich własności? A jeśli tak, to w jaki sposób, aby egzamin nie był jedynie testem pamięci, lecz rzeczywistym narzędziem wspierającym zrozumienie i praktyczne zastosowanie pojęć teoretycznych?

W artykule analizujemy zarówno argumenty przeciwko egzaminom teoretycznym (problemy z tradycyjną formą, bariery psychologiczne, wyzwania technologiczne), jak i przemawiające za ich utrzymaniem (motywacyjna rola, rozwój umiejętności argumentowania, diagnostyka trudności). Prezentujemy własne propozycje modyfikacji egzaminów teoretycznych i dzielimy się przykładami pytań, które mamy nadzieję, rozwijają umiejętność myślenia matematycznego. Szczególną uwagę poświęcamy nieoczywistym efektom utrzymania komponentu teoretycznego w procesie kształcenia oraz problemom związanym z umiejętnością czytania i rozumienia tekstów matematycznych.

Słowa kluczowe: dydaktyka matematyki, egzaminowanie, teoria matematyki, kierunki inżynierskie

1. Wprowadzenie

Współczesne nauczanie matematyki na uczelniach technicznych odbywa się w warunkach dynamicznych zmian. Studenci mają natychmiastowy dostęp do informacji i coraz powszechniej korzystają z narzędzi wspomagających rozwiązywanie problemów matematycznych, począwszy od systemów obliczeniowych typu Wolfram Alpha czy GeoGebra, po aplikacje wykorzystujące sztuczną inteligencję, takie jak ChatGPT. Wpływa to nie tylko na sposób rozwiązywania zadań, ale również na sposób uczenia się i przyswajania wiedzy teoretycznej.

Stąd pojawia się pytanie: czy – a jeśli tak, to w jakiej formie – warto nadal egzaminować opanowanie teorii matematyki na kierunkach inżynierskich? Tradycyjny model sprawdzania wiedzy teoretycznej, polegający na odtwarzaniu definicji, twierdzeń i ich dowodów, coraz częściej postrzegany jest jako przestarzały lub mało funkcjonalny. Z drugiej strony rezygnacja z tej części egzaminowania może prowadzić do dalszego ograniczenia rozwoju zdolności do dedukcji, analizowania i logicznego myślenia.

Mogłoby się wydawać, że w czasach, gdy każde twierdzenie można błyskawicznie znaleźć w Internecie, weryfikowanie wiedzy teoretycznej traci rację bytu. Często padają pytania o sens sprawdzania umiejętności ręcznego całkowania nietrywialnych funkcji lub odtworzenia z pamięci znanych twierdzeń, np. o regule de'Hospitala. Czy jednak większą wartością nie jest dzisiaj to, aby student rozumiał, do czego cała może być przydatna i w jakim kontekście można się jej spodziewać?

W niniejszym artykule najpierw omawiamy argumenty przeciwko egzaminowaniu teorii. Następnie wskazujemy powody, dla których naszym zdaniem, utrzymanie elementu teoretycznego w procesie egzaminowania jest istotne, choć wymaga znaczących modyfikacji w zakresie formy i treści pytań.

2. Argumenty przeciwko egzaminom z teorii

Krytyka egzaminów teoretycznych w matematyce nie jest bezpodstawna. Istnieje szereg poważnych argumentów przemawiających przeciwko ich przeprowadzaniu (szczególnie w tradycyjnej formie), które warto szczerze rozważyć.

2.1. Problemy z tradycyjną formą egzaminowania

Tradycyjne pytania typu „podaj definicję” czy „sformułuj twierdzenie” promują głównie pamięciowe odtwarzanie treści, bez ich rzeczywistego zrozumienia. Studenci uczą się definicji na pamięć, aby zdać egzamin, po czym szybko je zapominają, realizując w ten sposób popularną zasadę $3 \times Z$: „zapamiętać, zdać, zapomnieć”. Taka forma egzaminowania może prowadzić do postrzegania matematyki jako zbioru oderwanych faktów, a nie spójnego systemu pojęciowego.

Ograniczenia czasowe w nauczaniu matematyki na studiach technicznych pogłębiają te problemy. Zmniejszona liczba godzin wykładów zmusza wykładowców do skupienia się na przekazaniu pojęć i ich zastosowań kosztem głębszego zrozumienia struktury matematycznej. W efekcie studenci mają ogromne trudności z odróżnieniem definicji od twierdzeń czy z rozpoznaniem, co w twierdzeniu stanowi założenie, a co wniosek. Prowadzi to do sytuacji, którą D. Tall i S. Vinner [4] opisali jako konflikt między intuicyjnym obrazem pojęcia a jego formalną definicją.

Gdy na egzaminie pojawia się pytanie „jak brzmi twierdzenie X?”, student często odtwarza tekst, nie rozumiejąc jego logicznej struktury ani tego, kiedy twierdzenie można zastosować. To mechaniczne podejście sprawia, że nawet „poprawnie” zaliczona teoria nie przekłada się na umiejętność jej wykorzystania.

2.2. Niewystarczające przygotowanie studentów

Znaczącą barierą w egzaminowaniu teorii są braki w przygotowaniu studentów wynikające z charakteru wcześniejszej edukacji. Polskie szkolnictwo podstawowe i średnie koncentruje się głównie na opanowaniu algorytmów obliczeniowych kosztem rozumienia pojęć i ich wzajemnych relacji.

Student po maturze często nie potrafi odpowiedzieć na pytanie „co to jest rozwiązanie równania”. Automatycznie zaczyna rozwiązywać, nie rozumiejąc, że pyta się go o definicję, a nie o sposób postępowania. A na pytanie o definicję wyznacznika otrzymujemy opis metody jego obliczania, co świadczy o fundamentalnym niezrozumieniu różnicy między tym, czym dany obiekt matematyczny jest, a tym, jak się go oblicza. Często niezrozumiałe pozostaje dla nich również samo pojęcie funkcji, przez co zdarza się, że nie potrafią odróżnić funkcji od równania.

Brak nawyku pracy z teorią oraz niemożność odróżnienia definicji od procedury sprawia, że zwykłe zadania z treścią, będące najprostszymi przykładami modelowania matematycznego, budzą przerażenie,

nawet gdy są banalnie łatwe. Ta fundamentalna luka w rozumieniu natury pojęć matematycznych czyni egzaminy teoretyczne szczególnie trudnymi i może prowadzić do ich postrzegania jako sztucznych czy niepraktycznych.

2.3. Bariery psychologiczne i praktyczne

Świadomość własnych braków w przygotowaniu i brak doświadczenia w obcowaniu z teorią mogą zwiększać lęk przed matematyką, szczególnie u studentów, którzy skupiają się na pamięciowym zapamiętywaniu procedur zamiast na rozwijaniu zrozumienia konceptów. Badania pokazują, że studenci uczeni w sposób konceptualny wykazują nie tylko lepsze rozumienie, ale także mniejszy poziom lęku matematycznego.

Niechęć studentów do egzaminów teoretycznych oraz pojawiające się postulatory ich upraszczania lub całkowitego wyeliminowania świadczą o tym, że studenci często nie dostrzegają praktycznego zastosowania wiedzy teoretycznej w swojej przyszłej pracy zawodowej.

Przeprowadzanie egzaminu z teorii, obok zaliczenia części praktycznej (zadań), znacząco wydłuża też proces zaliczania przedmiotu. Dodaje to dodatkowe obciążenie zarówno studentom, którzy muszą przygotować się do dwóch różnych typów sprawdzianów, jak i prowadzącym. Dla nauczycieli akademickich oznacza to podwójną pracę: przygotowanie odpowiednich pytań teoretycznych (co wymaga szczególnej dbałości o jakość i przejrzystość) oraz czasochłonne sprawdzanie i ocenianie odpowiedzi, które często nie poddają się tak łatwemu zobiektywizowaniu jak zadania rachunkowe.

2.4. Wyzwania współczesnej epoki

Nowoczesna technologia sprawia, że tradycyjne egzaminy teoretyczne stają się coraz trudniejsze do kontrolowania. Przy obecnej miniaturyzacji urządzeń elektronicznych studentom bardzo łatwo jest ściągać – wystarczy znaleźć w sieci odpowiednią definicję czy twierdzenie i wyświetlić je na zegarku, okularach czy innych trudno wykrywalnych urządzeniach. Prowadzący podczas egzaminu nie są w stanie skutecznie kontrolować wszystkich możliwych sposobów dostępu do informacji.

W tej sytuacji pytanie „czy student zna definicję” traci sens. Ważniejsze staje się pytanie „czy student rozumie, jak definicję zastosować”. Podobne obserwacje formułuje M. Małolepszy [2], który podkreśla, że „prawdziwa matematyczna wartość” to raczej umiejętność logicznego myślenia, kojarzenia faktów i wykorzystania wiedzy w nowych sytuacjach, niż zapamiętywanie wzorów i definicji.

2.5. Presja systemowa na ułatwienie zaliczania

Współczesne szkolnictwo wyższe funkcjonuje w warunkach nasilającej się konkurencji między uczelniami, pogłębionej przez niż demograficzny i system finansowania, w którym środki „idą za studentem”. W obliczu malejącej liczby absolwentów szkół średnich każdy student staje się szczególnie cenny dla uczelni zarówno z powodów ekonomicznych, jak również ze względu na konieczność utrzymania prowadzonych kierunków studiów i miejsc pracy dla kadry akademickiej.

Władze uczelni, świadome że największy „odsiew” słuchaczy występuje na pierwszym roku, wywierają presję na prowadzących zajęcia, aby zwiększyć „sprawność” systemu, a niestety matematyka powszechnie postrzegana jest jako główna przyczyna ubywania studentów. Rezygnacja z trudniejszej części zaliczenia, za jaką uważany jest egzamin teoretyczny, może przyczynić się do zwiększenia odsetka osób zaliczających matematykę, co z perspektywy zarządzania uczelnią wydaje się racjonalnym rozwiązaniem.

3. Dlaczego mimo wszystko warto egzaminować teorię?

Pomimo powyższych argumentów pozostajemy przekonane, że egzaminowanie wiedzy teoretycznej ma istotną wartość. Nie chodzi przy tym o obronę tradycyjnych form egzaminowania, które rzeczywiście mają swoje ograniczenia, lecz o potraktowanie dobrze zaprojektowanego egzaminu z teorii jako ważnego elementu kształcenia przyszłego inżyniera.

Kluczowe jest jednak podejście do tej części egzaminu: sprawdzian teoretyczny nie powinien być testem pamięci, ale narzędziem wspierającym rozwój umiejętności, które będą przydatne zarówno w dalszej edukacji, jak i w praktyce zawodowej.

Naszą rolą jako nauczycieli matematyki nie jest bowiem przygotowanie studentów do odtworzenia gotowych rozwiązań, lecz do świadomego posługiwania się narzędziami matematycznymi przy rozwiązywaniu problemów inżynierskich. Studenci często bezrefleksyjnie stosują metody lub twierdzenia, traktując je jako algorytmy, które mają „dać wynik”. Tymczasem ugruntowana wiedza teoretyczna pozwala nie tylko stosować metody, lecz również ocenić ich zalety i ograniczenia oraz świadomie wybierać odpowiednie narzędzia do konkretnych problemów.

Nieoczywiste efekty utrzymania komponentu teoretycznego

Egzaminowanie teorii może przynosić korzyści, które nie są widoczne na pierwszy rzut oka i często umykają uwadze w dyskusji o sensie takich sprawdzianów. Zanim przedstawimy główne argumenty za utrzymaniem egzaminów teoretycznych, omówimy krótko te mniej oczywiste, ale istotne efekty.

Wymuszenie głębszego przetwarzania treści. Nawet jeśli student uczy się definicji czy twierdzenia na pamięć, musi je wcześniej przeczytać, a często także przetworzyć ich strukturę logiczną. Może to prowadzić do głębszego zrozumienia, mimo braku pełnej świadomości poznawczej. Badania A.Seldena [3] pokazują, że studenci rzadko czytają uważnie teksty matematyczne, jeśli nie są do tego zmuszeni.

Ujawnienie trudności w czytaniu i rozumieniu pojęć. Pytania teoretyczne obnażają błędy, które mogą nie być widoczne w zadaniach rachunkowych, np. mylenie definicji z twierdzeniami, brak rozróżnienia między warunkami a wnioskami czy utożsamianie przykładu z dowodem [5].

Rozwój języka formalnego i myślenia pojęciowego. Kontakt z teorią wymusza posługiwanie się językiem formalnym oraz rozumienie struktury logicznej dowodów. Nawet częściowa ekspozycja na ten sposób myślenia może mieć wpływ na późniejsze rozumienie bardziej zaawansowanych treści.

Budowanie zasobu pojęć potrzebnych w późniejszych kursach. Zapamiętanie nazw i ogólnego sensu twierdzeń może pomóc w późniejszym rozpoznawaniu i stosowaniu tych idei w innych przedmiotach, nawet jeśli początkowe rozumienie było powierzchowne.

4. Korzyści egzaminów z teorii – argumenty za ich utrzymaniem

4.1. Ugruntowanie podstaw i przenoszenie wiedzy

Znajomość definicji, twierdzeń oraz ich założeń stanowi niezbędny fundament do rozumienia bardziej złożonych zagadnień. Przygotowania do egzaminu teoretycznego zmuszają co najmniej do ich przeczytania, a u części studentów (mamy taką nadzieję) do ich przemyślenia i zinternalizowania. Sprzyja to głębszemu zrozumieniu, dostrzeganiu zależności, ocenie użyteczności metod oraz wyznaczaniu granic ich stosowalności.

Nie bez znaczenia jest również to, że student o solidnie ugruntowanej wiedzy teoretycznej łatwiej „łączy kropki”, a także zapamiętuje procedury i metody w sposób bardziej trwały i świadomy.

Jako przyszły inżynier, student powinien dysponować bazą wiedzy teoretycznej, z której będzie mógł korzystać podczas tworzenia modeli zjawisk rzeczywistych. Powinien na przykład rozumieć: jaką interpretację ma pochodna oraz całka oznaczona, jaka jest różnica między rozwiązaniem szczególnym a ogólnym równania różniczkowego oraz w jakich zbiorach spodziewać się wyników obliczeń, itp.

Solidne podstawy przekładają się bezpośrednio na zdolność do przenoszenia wiedzy. Studenci, którzy dobrze rozumieją podstawy teoretyczne, znacznie lepiej radzą sobie z adaptacją wiedzy do nowych kontekstów, nawet wtedy, gdy zadanie egzaminacyjne różni się od tych wcześniej ćwiczonych. Egzamin z teorii może być okazją do sprawdzenia, czy student potrafi „wyjść poza schemat” i samodzielnie przetworzyć znane pojęcia w nowej sytuacji. Znana wcześniej studentom forma egzaminu, z pewnością wpłynie na ich sposób przygotowywania się, zmotywuje do głębokiego przeanalizowania pojęć i ich własności. A to przekłada się zarówno na ich zrozumienie, jak i zapamiętanie.

Aby pomóc studentom już na etapie nauki, warto unikać nadmiernej schematyczności, również w warstwie symbolicznej. Zamiast klasycznych zmiennych (x, y, z) , można celowo używać innych oznaczeń, by sprawdzić, czy student rzeczywiście rozumie strukturę matematyczną problemu, a nie tylko „rozpoznaje wzór”. Zadanie pokroju „oblicz całkę $\int_{\alpha}^{\alpha^2-1} 2\beta d\beta$ ” zazwyczaj nie wymaga skomplikowanych rachunków, ale zmusza do przemyślenia sensu pojęć oraz świadomego operowania formalizmem.

Takie pytanie sprawdza, czy student rzeczywiście zinternalizował strukturę matematyczną, czy jedynie zapamiętał powierzchowne schematy rozwiązywania.

4.2. Motywacyjna rola egzaminu teoretycznego

Sama świadomość istnienia egzaminu z teorii wywiera istotny wpływ na sposób uczenia się studentów. W przypadku rezygnacji z egzaminu teoretycznego lub innej formy sprawdzania tej wiedzy, studenci często w ogóle lekceważą treści teoretyczne, skupiając się wyłącznie na przyswojeniu „jak to zrobić”, ignorując przy tym „dlaczego to działa”.

Perspektywa egzaminu z teorii powoduje, że studenci większą wagę przykładają do śledzenia treści teoretycznych, analizują niuanse definicji, rozważają rolę założeń twierdzeń i ich konsekwencje. Wartością dodaną nie jest przy tym znajomość definicji i twierdzeń jako takich, ale wyrobienie nawyku myślenia analitycznego.

W trakcie przygotowań studenci rozwijają „ścieżki” myślenia obejmujące analizę, syntezę, uogólnianie, wskazywanie przykładów i kontrprzykładów. To umiejętności nie do przecenienia, a ich rozwijanie stanowi według nas zasadnicze zadanie i sens nauczania matematyki na poziomie wyższym.

Doświadczenia dydaktyczne potwierdzają wartość wieloetapowego podejścia do egzaminowania teorii. Mimo że studenci mają dostęp do przykładowych pytań teoretycznych na platformie zdalnej edukacji, często dopiero podczas kolejnych terminów egzaminacyjnych (zerowego, pierwszego, a czasem nawet drugiego) zaczynają rozumieć, jak właściwie podejść do nauki teorii. Stopniowo uczą się zwracać uwagę na kluczowe aspekty twierdzeń: jakie są założenia i jak wpływają na stosowalność. Zastanawiają się, co się dzieje, gdy któreś z założeń usuniemy, jak sprawdzić, czy twierdzenie można zastosować w konkretnej sytuacji, a także co wskazuje na to, że jego warunki nie są spełnione. Ten proces „dojrzwiania” do teorii matematycznej nie następuje automatycznie – wymaga czasu, wielokrotnego kontaktu z materiałem i refleksji nad błędami.

Paradoksalnie, właśnie te „niepowodzenia” na pierwszych terminach często okazują się najbardziej wartościowe dla rozwoju rozumienia matematycznego. Efekty takich zmagania z egzaminem teoretycznym wyraźnie widać w podejściu studentów do podobnych wyzwań. W kolejnych semestrach przychodzą już

z innym nastawieniem, lepiej rozumiejąc, czego się od nich oczekuje i jak skutecznie przygotować się do części teoretycznej.

4.3. Rozwój umiejętności argumentowania i ścisłego rozumowania

Egzamin z teorii to często jedyne miejsce, w którym student musi przedstawić rozumowanie krok po kroku, posługując się precyzyjnym i ścisłym językiem matematycznym. Musi nie tylko podać odpowiedź, ale ją uzasadnić, powołując się na konkretne treści, a nie intuicję czy zasłyszane stwierdzenia. To kompetencja, która nie rozwija się podczas rutynowego rozwiązywania zadań rachunkowych, w których liczy się głównie uzyskanie poprawnego wyniku, czasami sposób dojścia do niego, a nigdy to „dlaczego tak właśnie się liczy”.

Tymczasem to właśnie zdolność prowadzenia logicznego, uzasadnionego rozumowania, z odwołaniem do definicji, założeń i twierdzeń, stanowi fundament pracy inżyniera, analityka, a także naukowca. Te same elementy rozumowania: analiza, synteza, identyfikacja kluczowych założeń, stanowią fundament pracy inżyniera podejmującego decyzje projektowe w różnorodnych warunkach.

Przeprowadzanie rozumowań, w których wyciągając wnioski z jakichś przesłanek, należy powołać się na obowiązujące prawa i własności, tak powszechne w matematyce, jest również umiejętnością niezbędną w życiu codziennym. Dotyczy to analizy umów prawnych, zasad reklamacyjnych, zgód i umów przy zakupie i używaniu aplikacji, czy oceny argumentacji w mediach. To są te kompetencje, których rozwojowi sprzyja operowanie wiedzą teoretyczną.

4.4. Ujawnienie trudności w rozumieniu pojęć matematycznych

Egzaminy teoretyczne pełnią ważną funkcję diagnostyczną, ponieważ obnażają problemy, które mogą nie być widoczne w zadaniach rachunkowych. Ujawniają charakterystyczne trudności studentów, takie jak:

- mylenie definicji z twierdzeniami i własnościami,
- brak rozróżnienia między warunkami a wnioskami,
- utożsamianie przykładu z dowodem,
- traktowanie symboli i pojęć formalnych jako zbioru faktów do zapamiętania, a nie narzędzi do rozumowania.

Okazuje się, że wielu studentów ma poważne trudności z czytaniem i rozumieniem tekstów matematycznych, co jest umiejętnością kluczową dla rozwoju kompetencji matematycznych, a jednocześnie rzadko rozwijaną wprost na zajęciach [3].

Przykładowo, student może łatwo znaleźć definicję wyznacznika macierzy, ale nie umie na jej podstawie obliczyć wyznacznika konkretnej macierzy, wyrażnie ma trudność z odróżnieniem tego, jak zastosować definicję od poznanych wcześniej metod obliczeniowych. Takie problemy ujawniają się dopiero podczas egzaminu teoretycznego, podczas gdy w zadaniach rachunkowych mogą pozostać niezauważone.

Warto podkreślić, że nawet pozornie „pamięciowe” pytania o podanie treści definicji czy twierdzenia mogą mieć znaczną wartość diagnostyczną. Sposób formułowania wypowiedzi matematycznej „własnymi słowami”, to co student uznał za ważne, a co pominął, daje dobry obraz tego, jak rozumie dane stwierdzenie. Praktyka pokazuje, że studenci mają problemy nawet z materiałem wyrażnie wskazanym jako egzaminacyjny. Nie potrafią odróżnić tego, co kluczowe, od tego, co drugorzędne. Podczas czytania wydaje im się, że wszystko dobrze rozumieją — klasyczny przypadek „jak patrzę, to umiem, jak nie

patrzę, to nie umiem”. Dopiero próba samodzielnego wyjaśnienia na egzaminie ujawnia, że pomijają kluczowe informacje. Na przykład uważają, że wystarczy napisać, iż wyznacznik to funkcja, która macierzy przypisuje liczbę, żeby w pełni go zdefiniować.

5. Między ideałem a praktyką

Zanim przejdziemy do analizy problematycznych form egzaminowania, warto zauważyć, że jedną z metod często wskazywanych jako optymalna jest bezpośrednia rozmowa ze studentem. Tradycyjny egzamin, powszechny niegdyś na uczelniach, wciąż uznawany jest za najbardziej adekwatny sposób sprawdzania wiedzy teoretycznej i rozumowania matematycznego. Pozwala na elastyczne dostosowanie pytań do poziomu studenta, sprawdzenie głębokości rozumienia poprzez pytania uzupełniające oraz ocenę spontaniczności myślenia matematycznego. Umożliwia również natychmiastowe skorygowanie błędnego toku rozumowania i ukierunkowanie studenta na właściwe tory myślowe.

Niestety, realia współczesnego szkolnictwa wyższego czynią tę formę w praktyce trudną do zrealizowania. Po pierwsze, współczesne grupy studenckie są znacznie liczniejsze, a przeprowadzenie kilkuset indywidualnych rozmów przekracza możliwości czasowe prowadzących. Po drugie, obecne standardy akademickie wymagają obiektywnych i przejrzystych kryteriów oceny, z jasno określonymi punktami za poszczególne elementy odpowiedzi. Egzamin ustny, mimo niewątpliwiej wartości dydaktycznej, pozostaje z natury subiektywny, a zapewnienie porównywalności między różnymi studentami staje się problematyczne. Nie bez znaczenia pozostaje również obowiązek dokumentowania przebiegu egzaminu, który obecnie spoczywa na egzaminatorze. Egzamin ustny musiałby być nagrywany lub w inny sposób protokolany, co utrudnia jego organizację.

Dodatkowo, współcześni studenci wykazują znaczny lęk przed egzaminami ustnymi, postrzegając je jako bardziej stresujące niż formy pisemne. Paradoksalnie, egzamin ustny może być łatwiejszy, bo pozwala na natychmiastową korektę błędów na podstawie reakcji egzaminatora i elastyczne dostosowanie odpowiedzi do przebiegu rozmowy. Jednak brak doświadczenia z tą formą oraz obawy przed „pustką w głowie” w sytuacji bezpośredniej konfrontacji sprawiają, że studenci często kategorię odrzucają taką możliwość, nawet gdy jest im oferowana jako alternatywa.

W rezultacie egzamin ustny, mimo niezaprzeczalnych zalet, rzadko bywa wykorzystywany w nauczaniu masowym. Musimy zatem poszukiwać kompromisowych rozwiązań w formie pisemnej, spełniających wymogi praktyczne i metodologiczne współczesnego egzaminowania oraz oczekiwania studentów.

5.1. Jaka forma egzaminu nie zdaje już egzaminu?

Tradycyjne pytania w stylu: „Podaj definicję, twierdzenie, własności...” coraz słabiej sprawdzają się w realiach współczesnego nauczania. Skoro student może w każdej chwili sprawdzić sformułowanie twierdzenia, pytanie o jego dosłowne odtworzenie traci sens.

Zamiast tego, warto skupić się na sprawdzaniu **rozumienia struktury i zastosowania** pojęć teoretycznych. Egzamin powinien weryfikować, czy student potrafi:

- rozpoznać, kiedy dane twierdzenie można zastosować,
- wskazać, które założenia są kluczowe i dlaczego,
- przewidzieć konsekwencje naruszenia warunków,
- zastosować pojęcia w nietypowych kontekstach.

5.2. Zadania problemowe jako ideał i ich ograniczenia

Najbardziej wartościową formą sprawdzania wiedzy teoretycznej byłyby zadania problemowe osadzone w kontekście inżynierskim, gdzie studenci muszą wykazać się umiejętnością doboru odpowiednich metod matematycznych i świadomego zastosowania definicji, twierdzeń oraz ich założeń w praktycznych sytuacjach. Takie podejście, zbliżone do egzaminu „open book” omawianego przez M. Małolepszego [2], sprawdzałoby rzeczywiste rozumienie matematyki w jej naturalnym zastosowaniu.

W trakcie przygotowywania niniejszego artykułu przeprowadziłyśmy króciutką ankietę wśród pracowników naszego wydziału, w której wielu respondentów wskazywało właśnie taką formę sprawdzania wiedzy (w tym teorii) jako najlepszą z możliwych. Zadania problemowe pozwalają bowiem na ocenę nie tylko znajomości pojęć, ale przede wszystkim sprawdzają, czy student potrafi zastosować teorię w praktyce, co stanowi istotę matematycznej kompetencji inżyniera.

Niestety, tego typu zadania napotykają na istotne ograniczenia praktyczne. Po pierwsze, wymagają często wiedzy z innych dziedzin (fizyka, mechanika, elektronika), co sprawia, że gdy studentowi brakuje tej wiedzy, w ogóle nie może dojść do etapu zastosowań matematyki. Nie jest w stanie zrozumieć istoty problemu czy sformułować model matematyczny. Po drugie, są bardzo czasochłonne zarówno w rozwiązywaniu, jak i w sprawdzaniu, co przy dużych grupach studenckich staje się niewykonalne. Po trzecie, uproszczone, pojedyncze zadanie problemowe może sprawdzić tylko wybrany fragment materiału z całego kursu. Aby kompleksowo zweryfikować wiedzę teoretyczną z semestru lub roku, potrzeba by było kilku takich problemów lub jednego, bardzo rozbudowanego, co wydłużyłoby egzamin do nieakceptowalnych rozmiarów.

5.3. Praktyczny kompromis w projektowaniu egzaminów

Mając świadomość opisanych wcześniej ograniczeń i trudności, naszym celem powinno być projektowanie egzaminu, który będzie praktycznym kompromisem między rzetelnością sprawdzania wiedzy teoretycznej a „zdawalnością” i możliwością (wygodą) realizacji w obecnych realiach.

Proponujemy skupienie się na krótkich, konkretnych pytaniach weryfikujących rozumienie kluczowych pojęć teoretycznych. System ten koncentruje się na najbardziej podstawowej wiedzy, ale promuje jej świadome i aktywne wykorzystanie. Pytania egzaminacyjne nie są trudne w sensie zawłości czy skomplikowania, ale wymagają zrozumienia ich sensu i umiejętności zastosowania wiedzy w nowych sytuacjach. Na przykład, student może korzystać z wzorów na całki, ale powinien potrafić opisać całą pole obszaru, który nie jest normalny.

Takie podejście promuje aktywne myślenie i integrację wiedzy. Jednocześnie motywując do nauki poprzez jasne sygnały dotyczące wymagań egzaminacyjnych, nie stawiając przy tym barier uniemożliwiających zaliczenie przy odpowiednim przygotowaniu.

5.4. Zasady projektowania dobrych pytań teoretycznych

Skuteczne pytania teoretyczne powinny spełniać kilka kluczowych zasad.

Sprawdzanie zrozumienia, nie pamięci. Zamiast pytać „jak brzmi twierdzenie?”, lepiej zapytać: „co się stanie, jeśli nie będzie spełnione założenie X ?” lub „dla której z poniższych funkcji można zastosować dane twierdzenie i dlaczego?”

Unikanie schematyczności. Warto celowo używać nietypowych oznaczeń zmiennych (zamiast klasycznych x, y, z) oraz kontekstów, by sprawdzić, czy student rzeczywiście rozumie strukturę matematyczną, a nie tylko „rozpoznaje wzór”.

Łączenie teorii z intuicją. Dobre pytania pozwalają studentowi skorzystać zarówno z formalnej wiedzy, jak i z matematycznej intuicji, pokazując, że teoria i praktyka się uzupełniają.

Różnicowanie form pytań. To samo zagadnienie można sprawdzić na kilka sposobów, które ujawniają różne poziomy zrozumienia lub jego braku:

- *forma wprost* – bezpośrednie pytanie o właściwości („Czy funkcja może mieć asymptotę pionową i ograniczony zbiór wartości?”)
- *weryfikacja błędnych stwierdzeń* – ocena poprawności gotowych twierdzeń („ChatGPT twierdzi, że funkcja o ograniczonej dziedzinie może mieć asymptotę ukośną. Czy ma rację?”)
- *konstrukcja przykładów* („Podaj przykład funkcji (wzór lub wykres), która ma ograniczony zbiór wartości i ma asymptotę ukośną”)

Student, który naprawdę rozumie zagadnienie, poradzi sobie z każdą z form. Ten, który tylko zapamiętał procedury, często będzie miał problem z dwiema ostatnimi.

Dostosowanie poziomu trudności. Pytania powinny być wymagające, ale osiągalne. Powinny stawiać poprzeczkę na odpowiedniej wysokości – na tyle wysoko, żeby wymagać realnego wysiłku, ale wystarczająco nisko, żeby student miał świadomość, że przy zaangażowaniu może ją pokonać.

Jasne kryteria oceniania. Każde pytanie powinno mieć przejrzyste kryteria pozwalające na obiektywną ocenę, z możliwością przyznania punktów częściowych za poprawne rozumowanie. Badania nad ocenianiem kształtującym pokazują [1], że jasne kryteria nie tylko usprawniają proces oceniania, ale też wspierają uczenie się.

Przykładowe zadania, które naszym zdaniem spełniają przedstawione zasady, prezentujemy w Dodatku.

6. Kilka słów o ocenianiu

Nawet najlepiej zaprojektowany egzamin nie spełni swojej roli, jeśli sposób jego oceniania będzie niejasny, niespójny lub zbyt subiektywny. Szczególnie w przypadku egzaminów teoretycznych warto zadbać o to, aby ocenianie było możliwie obiektywne i transparentne.

Trzeba przy tym pamiętać, że większość studentów przyzwyczajona jest do algorytmicznego systemu oceniania, charakterystycznego dla egzaminu maturalnego. Odpowiedź jest tam zazwyczaj „poprawna” lub „niepoprawna”, czasem „częściowo poprawna”. Takie podejście daje poczucie bezpieczeństwa: wiadomo, za co przyznawane są punkty, a za co nie.

Aby zachować spójność z tym sposobem myślenia, a jednocześnie promować głębsze rozumienie, warto konstruować pytania, na które można odpowiedzieć w sposób jednoznacznie poprawny, niepoprawny lub częściowo poprawny.

Stąd wnioski, że:

- pytania teoretyczne warto formułować tak, by umożliwiały jednoznaczne rozróżnienie odpowiedzi poprawnych, niepoprawnych i częściowo poprawnych,
- w uzasadnieniach warto premiować poprawne rozumowanie, nawet jeśli wynik końcowy zawiera błąd rachunkowy,
- pomocne może być udostępnienie studentom przykładowych odpowiedzi z punktacją,
- im bardziej jawny i przewidywalny system oceniania, tym większa szansa, że studenci potraktują egzamin jako narzędzie rozwojowe.

7. Podsumowanie

Odpowiednio zaprojektowany egzamin teoretyczny nie musi być jedynie testem pamięci. Może, a naszym zdaniem wręcz powinien, służyć jako narzędzie wspierające rozwój umiejętności analizy, argumentowania oraz przenoszenia wiedzy na nowe konteksty.

Choć argumenty przeciwko egzaminom teoretycznym są w pełni uzasadnione, uważamy, że zalety takiego sprawdzania wiedzy przeważają nad kosztami. Problemy z tradycyjną formą, bariery psychologiczne, czy współczesne wyzwania technologiczne, wszystkie te trudności można przezwyciężyć. Kluczowe jest jednak przeformułowanie podejścia: od sprawdzania pamięci do weryfikacji rozumienia i umiejętności zastosowania.

Najważniejszym argumentem za utrzymaniem egzaminów teoretycznych jest ich rola motywacyjna. Sama świadomość ich istnienia powoduje, że studenci większą wagę przykładają do śledzenia treści teoretycznych, analizują niuanse definicji i zastanawiają się nad założeniami twierdzeń.

Z myślą o tych studentach, którzy już są dociekliwi, ale także o tych, którzy jeszcze nie wiedzą, że mogą tacy być, warto projektować egzaminy premiujące zrozumienie, dopingujące do głębszego zastanowienia i dojrzałego podejścia do procesu uczenia się. Proponujemy zatem sprawdziany z niestandardowymi pytaniami, które są niezbyt skomplikowane w treści, trywialne rachunkowo lub w ogóle nie wymagające obliczeń, za to prowokują do analizy pojęć, ich właściwości i wzajemnych relacji.

Przygotowanie do tak skonstruowanego egzaminu wymaga jednak odpowiedniego podejścia już na etapie wykładu: poprzez omawianie podobnych pytań na zajęciach i przeprowadzanie krótkich quizów sprawdzających zrozumienie.

Podziękowania

Autorki składają serdeczne podziękowania Recenzentowi za niezwykle dokładną i wnikliwą recenzję, przeprowadzoną w błyskawicznym tempie. Szczegółowe uwagi dotyczące zarówno aspektów merytorycznych, jak i redakcyjnych znacząco przyczyniły się do poprawy jakości niniejszego artykułu.

Dodatek. Przykłady pytań egzaminacyjnych

Zadania w dodatku zostały pogrupowane tematycznie, jednak podział ten ma wyłącznie orientacyjny charakter. Wiele problemów ma przekrojową naturę i łączy zagadnienia z różnych działów. Niektóre z zadań mogłyby więc równie dobrze znaleźć się w innej sekcji. Sformułowania używane w zadaniach odpowiadają konwencjom przyjętym w naszej praktyce dydaktycznej i mogą różnić się od terminologii stosowanej przez innych autorów – na przykład mówimy o „asymptotach funkcji”, podczas gdy niektórzy preferują określenie „asymptoty wykresu funkcji”. Zachęcamy do traktowania tego zbioru jako uzupełnienia treści artykułu, a nie jako zestawu sztywnych bloków tematycznych czy egzaminacyjnych.

Zadania, które wymagają szczególnej uwagi, oznaczono (!).

Funkcje

Zadanie 1. Czy przypisanie liczbie całkowitej $z \in \mathbb{Z}$ jej odwrotności jest funkcją $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$? Uzasadnij, odnosząc się do definicji.

Co sprawdzamy: znajomość definicji funkcji i umiejętność sprawdzenia, czy dane przyporządkowanie spełnia warunki definicji.

Oczekiwane podejście: student powinien zauważyć, że przyporządkowanie nie jest funkcją, bo dla $0 \in \mathbb{Z}$ nie istnieje odwrotność w $\mathbb{R}$.

Typowe błędy:

- twierdzenie, że to funkcja bez uwzględnienia problemu z zerem,
- mylenie „odwrotności liczby” z „funkcją odwrotną”,
- brak odwołania do definicji funkcji.

Zadanie 2. Czy przyporządkowanie $K2$, które każdej funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ (gdzie $a \neq 0$) przypisuje jej współczynnik a , jest funkcją?

1. Jeśli nie, wskaż i uzasadnij, który warunek definicji funkcji nie jest spełniony.
2. Podaj dziedzinę i przeciwdziedzinę oraz zapisz w postaci: $K2 : \dots \rightarrow \dots$
3. Określ zbiór wartości i uzupełnij zapis: $K2 : \dots \xrightarrow{\text{na}} \dots$
4. Podaj przykład pojedynczego argumentu (np. $x_0 = \dots$) i wartości $K2(x_0) = \dots$ dla tego argumentu.
5. Czy to przyporządkowanie jest różnowartościowe? Uzasadnij.

Co sprawdzamy: znajomość definicji funkcji i umiejętność jej zastosowania w kontekście abstrakcyjnym, gdzie argumentami są funkcje; rozumienie pojęć dziedziny, przeciwdziedziny, zbioru wartości oraz różnowartościowości w nietypowym kontekście.

Oczekiwane podejście: student powinien stwierdzić, że $K2$ jest funkcją, poprawnie określić dziedzinę jako zbiór wszystkich funkcji kwadratowych, przeciwdziedzinę jako $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ lub $\mathbb{R}$, zbiór wartości jako $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, podać konkretny przykład oraz uzasadnić, że przyporządkowanie nie jest różnowartościowe (różne funkcje mogą mieć ten sam współczynnik a).

Typowe błędy:

- mylne przekonanie, że przyporządkowanie nie jest funkcją z powodu wieloznaczności argumentów,
- błędne określenie dziedziny jako zbioru współczynników zamiast funkcji,
- pomijanie warunku $a \neq 0$ przy określaniu zbioru wartości,
- błędne twierdzenie o różnowartościowości bez podania kontrprzykładu,
- nierozumienie, że argumentami tej funkcji są funkcje, nie liczby,
- mylenie dziedziny ze zbiorem wartości.

Zadanie 3. Która z podanych funkcji jest równa funkcji f określonej na swojej dziedzinie naturalnej D_f , jeśli:

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Jeśli uważasz, że jest ich więcej, wskaż wszystkie.

a) $g_1(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (1, +\infty),$

d) $g_4(x) = (1-x)^{-1}, \quad x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty),$

b) $g_2(v) = \frac{1}{1-v}, \quad v \in D_{g_2},$

e) $g_5(q) = (1+q)(1-q^2)^{-1}, \quad q \in D_{g_5},$

c) $g_3(p) = \frac{1-p}{1-p^2}, \quad p \in D_{g_3},$

f) $g_6(w) = \frac{1+x}{1-w^2}, \quad w \in D_{g_6}.$

Co sprawdzamy: rozumienie równości funkcji jako równości dziedzin i przyporządkowań; umiejętność przekształcania wyrażeń algebraicznych i rozróżniania argumentów funkcji od parametrów.

Oczekiwane podejście: student powinien sprawdzić dla każdej funkcji zarówno dziedzinę, jak i wzór, rozpoznając że funkcje równe to g_2, g_4 . Powinien zauważyć, że w g_1, g_3, g_5, g_6 są różne wzory, inna dziedzina lub parametr zamiast zmiennej).

Typowe błędy:

- sprawdzanie tylko wzorów bez uwzględnienia dziedzin,
- nieuwzględnienie, że funkcje o identycznych wzorach mogą być różne ze względu na różne dziedziny,
- nierozpoznanie w g_6 , że pojawia się parametr x oprócz zmiennej w ,
- błędne uproszczenie g_3 i g_5 bez sprawdzenia równoważności,
- mylenie równości funkcji z podobieństwem wzorów.

Zadanie 4. Wskaż poprawne dokończenie zdania.

Odwzorowanie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ przyporządkowujące liczbie naturalnej n pierwiastek drugiego stopnia z liczby $n^2 - 1$

- nie jest funkcją,
- jest funkcją ale nie różnowartościową,
- jest funkcją różnowartościową.

Co sprawdzamy: rozumienie definicji funkcji; znajomość pojęcia funkcji różnowartościowej oraz umiejętność analizy własności odwzorowania w kontekście dziedziny liczb naturalnych.

Oczekiwane podejście: student powinien sprawdzić, czy odwzorowanie jest dobrze określone dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i ocenić różnowartościowość.

Typowe błędy:

- stwierdzenie, że skoro dla $n = 1$ mamy $\sqrt{0} = 0$, to funkcja nie istnieje,
- przyjęcie, że skoro jest kwadrat, to funkcja nie może być różnowartościowa,
- nieprawidłowa analiza różnowartościowości funkcji,
- nierozróżnienie między $\mathbb{N}$ z zerem i bez zera.

Zadanie 5. Dana jest funkcja $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Funkcja do niej odwrotna to: (uważaj na dziedzinę podanej funkcji)

- | | |
|---|---|
| a) $y = \arctg(x)$ dla $x \in (-1, 1)$, | d) $y = \arctg(x)$ dla $x \in (-1, 1)$, |
| b) $y = \arctg(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, | e) $y = \arctg(x)$ dla $x \in (-\infty, 0)$, |
| c) nie istnieje, | f) $y = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$ dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. |

Co sprawdzamy: rozumienie pojęcia funkcji odwrotnej; umiejętność wyznaczania jej dziedziny i przeciwdziedziny na podstawie własności funkcji wyjściowej; znajomość funkcji tg i $\arctg$ na ograniczonych przedziałach.

Oczekiwane podejście: student powinien rozpoznać, że funkcja $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ jest różnowartościowa, więc ma funkcję odwrotną. Powinna to być funkcja $y = \arctg x$ dla $x \in (-\infty, 0)$, ponieważ zbiorem wartości tg na tym przedziale jest $(-\infty, 0)$.

Typowe błędy:

- mylenie dziedziny funkcji odwrotnej ze zbiorem wartości funkcji wyjściowej,
- używanie standardowej dziedziny $\arctg$ bez uwzględnienia ograniczonej dziedziny funkcji wyjściowej,
- mylenie funkcji odwrotnej z odwrotnością funkcji (opcja f),
- nierozpoznanie, że tg na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ przyjmuje wszystkie wartości ujemne,
- błędne określenie zbioru wartości funkcji tg na danym przedziale.

Ciągi i ich granice

Zadanie 6. O ciągu (a_n) wiemy tylko, że ma granicę 5. Co to oznacza w języku potocznym? Które stwierdzenie jest poprawne dla każdego takiego ciągu:

- a) wszystkie wyrazy ciągu są równe 5,
- b) wyrazy ciągu od pewnego momentu są coraz bliższe 5,
- c) nieskończenie wiele wyrazów jest równych 5,

- d) dla dostatecznie dużego n wyraz a_n ciągu jest dowolnie bliski 5 ,
 e) $|a_n - 5|$ jest dowolnie małe dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
 f) ciąg stale rośnie, ale nie przekracza wartości 5.

Co sprawdzamy: intuicyjne rozumienie definicji granicy ciągu i umiejętność odróżnienia poprawnego sformułowania potocznego od nieprecyzyjnych lub błędnych stwierdzeń.

Oczekiwane podejście: student powinien wybrać odpowiedź b) oraz d) jako poprawne, rozumiejąc że granica oznacza możliwość uczynienia wyrazów dowolnie bliskimi granicy dla dostatecznie dużych numerów, niezależnie od zachowania wcześniejszych wyrazów.

Typowe błędy:

- mylenie granicy ze stałością ciągu (opcja a).
- przekonanie, że ciąg musi być monotoniczny względem granicy (opcja f),
- mylenie granicy z nieskończoną liczbą wyrazów równych granicy (opcja c),
- nierozumienie różnicy między „dla każdego n ”, a „dla dostatecznie dużego n ” – błędne przekonanie, że wszystkie wyrazy muszą być blisko granicy (opcja e),
- nieprecyzyjne rozumienie pojęcia „dowolnie bliski” i „dostatecznie duży”.

Zadanie 7. Jeśli wiemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$, to ile wynosi:

- | | |
|--|--|
| 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 3) = \dots$ | 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = \dots$ |
| 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \dots$ | 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = \dots$ |
| 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - c_n) = \dots$ | 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 3}{b_n} = \dots$ |
| 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \dots$ | 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = \dots$ |
| 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n \cdot c_n) = \dots$ | 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = \dots$ |
| 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \dots$ | |

Co sprawdzamy: znajomość twierdzeń o granicach ciągów (suma, różnica, iloczyn, iloraz) oraz rozpoznawanie symboli nieoznaczonych; umiejętność stosowania reguł działań na granicach i identyfikowania przypadków, gdy twierdzenia nie mają zastosowania.

Oczekiwane podejście: student powinien poprawnie obliczyć granice stosując twierdzenia o działaniach na granicach tam, gdzie to możliwe (punkty 1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 11) oraz rozpoznać symbole nieoznaczone wymagające dodatkowej analizy (punkty 5, 6, 9).

Typowe błędy:

- mechaniczne stosowanie wzorów bez sprawdzenia warunków ich stosowalności,
- nierozpoznanie symboli nieoznaczonych typu $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $[\frac{0}{0}]$,
- błędne twierdzenie, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = [\frac{3}{0}] = +\infty$ bez analizy znaku b_n ,
- pomijanie faktu, że niektóre granice wymagają dodatkowych informacji o ciągach.

Zadanie 8. Ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^2$ jest:

- a) zbieżny, bo jest rosnący,
- b) rozbieżny, bo nie jest ograniczony,
- c) (!) **zbieżny** do nieskończoności,
- d) rozbieżny, bo nie jest monotoniczny,
- e) jeżeli uważasz, że jest zbieżny lub rozbieżny, ale z innego powodu niż podane powyżej, to podaj swoje uzasadnienie.

Co sprawdzamy: rozumienie pojęć zbieżności i rozbieżności ciągów oraz znajomość kryteriów zbieżności; umiejętność odróżnienia zbieżności do granicy skończonej od rozbieżności do nieskończoności.

Oczekiwane podejście: student powinien wybrać odpowiedź b) rozpoznając, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = n^2$ jest nieograniczony i dąży do $+\infty$, co oznacza rozbieżność; powinien rozumieć, że „zbieżność do nieskończoności” to nieprecyzyjne określenie rozbieżności.

Typowe błędy:

- mylne przekonanie, że każdy ciąg rosnący jest zbieżny (opcja a),
- używanie nieprecyzyjnego sformułowania „zbieżny do nieskończoności,” zamiast „rozbieżny do $+\infty$ ” (opcja c),
- błędne twierdzenie, że podany ciąg nie jest monotoniczny (opcja d),
- nierozumienie różnicy między zbieżnością a rozbieżnością,
- mylenie warunków koniecznych z wystarczającymi w kryteriach zbieżności.

Zadanie 9. Ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony z góry przez 10. ŚciągBot twierdzi, że jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 10$.

1. Czy ciąg (a_n) faktycznie jest zbieżny? Uzasadnij.
2. Czy jeśli jest zbieżny to rzeczywiście do 10? Uzasadnij.

Co sprawdzamy: znajomość twierdzenia o zbieżności ciągu monotonicznego i ograniczonego oraz rozumienie różnicy między ograniczeniem górnym a granicą ciągu; umiejętność krytycznej analizy błędnych stwierdzeń.

Oczekiwane podejście: student powinien potwierdzić zbieżność ciągu na podstawie twierdzenia o zbieżności ciągu monotonicznego i ograniczonego (punkt a – tak), ale zauważyć błąd ŚciągBota w punkcie b – granica nie musi równać się 10, lecz może być mniejsza od 10.

Typowe błędy:

- nieznanie twierdzenia o zbieżności ciągu rosnącego i ograniczonego z góry,
- mylenie ograniczenia górnego z granicą ciągu,
- przekonanie, że jeśli ciąg jest ograniczony przez liczbę M , to koniecznie dąży do M ,
- poleganie na informacjach z sieci bez ich krytycznej weryfikacji (ściągać też trzeba umieć :)),
- brak umiejętności skonstruowania kontrprzykładu.

Granice funkcji

Zadanie 10. Funkcja f określona w sąsiedztwie punktu x_0 , ma granicę w punkcie x_0 **wtedy i tylko wtedy**, gdy:

- a) istnieją granice jednostronne funkcji w punkcie x_0 i są różne,
- b) istnieją granice jednostronne funkcji w punkcie x_0 i są równe,
- c) funkcja jest określona w punkcie x_0 ,
- d) funkcja jest ciągła w punkcie x_0 ,
- e) istnieją granice jednostronne funkcji w punkcie x_0 i są równe wartości funkcji w x_0 .

Co sprawdzamy: znajomość warunków koniecznych i wystarczających istnienia granicy funkcji w punkcie; rozumienie związku między granicami jednostronnymi a istnieniem granicy oraz różnicy między istnieniem granicy a ciągłością.

Oczekiwane podejście: student powinien wybrać odpowiedź b) rozpoznając, że istnienie i równość granic jednostronnych jest warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia granicy tej funkcji w punkcie, niezależnie od tego czy funkcja jest określona w tym punkcie.

Typowe błędy:

- mylenie warunku istnienia granicy z warunkiem jej nieistnienia (opcja a),
- przekonanie, że funkcja musi być określona w punkcie, aby miała granicę (opcja c),
- mylenie istnienia granicy z ciągłością funkcji (opcje d i e),
- nierozumienie, że granica może istnieć nawet gdy funkcja nie jest określona w punkcie,
- nierozumienie różnicy między warunkami koniecznymi a wystarczającymi.

Zadanie 11. (!) Jeśli wiadomo, że funkcja f ma granicę w punkcie x_0 to pewne jest, że:

- a) istnieją obie granice jednostronne tej funkcji w punkcie x_0 ,
- b) istnieje przynajmniej jedna granica jednostronna tej funkcji w punkcie x_0 ,
- c) o ile istnieją obie granice jednostronne w punkcie x_0 , to są równe,
- d) funkcja jest określona w punkcie x_0 ,
- e) funkcja jest ciągła w punkcie x_0 .

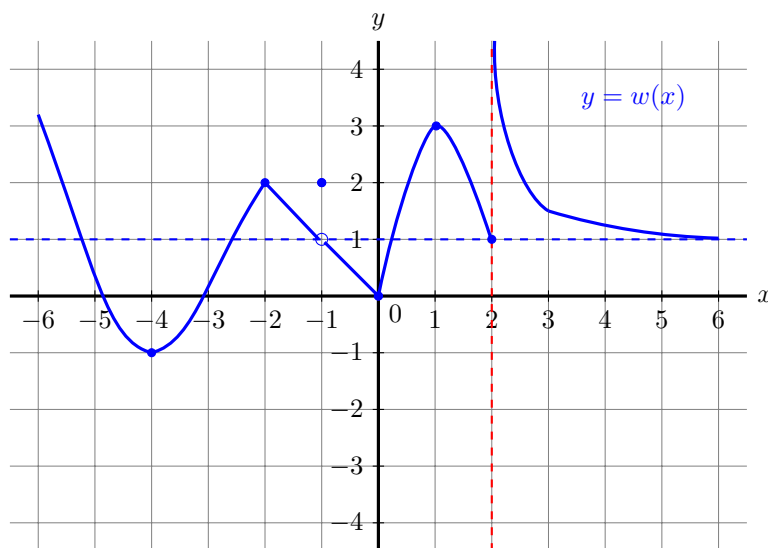
Co sprawdzamy: rozumienie wszystkich implikacji wynikających z istnienia granicy funkcji; umiejętność analizy przypadków, gdy punkt leży wewnątrz dziedziny (mogą istnieć obie granice jednostronne) oraz gdy punkt leży na brzegu dziedziny (może istnieć tylko jedna granica jednostronna).

Oczekiwane podejście: student powinien wybrać odpowiedzi b) i c) rozpoznając, że z istnienia granicy wynika istnienie przynajmniej jednej granicy jednostronnej oraz równość granic jednostronnych (gdy obie istnieją). Powinien odrzucić opcje sugerujące automatyczne określenie funkcji w punkcie czy ciągłość.

Typowe błędy:

- przekonanie, że istnienie granicy automatycznie oznacza istnienie obu granic jednostronnych (opcja a) – nieuwzględnienie sytuacji, gdy punkt x_0 leży na brzegu dziedziny funkcji i tylko jedna granica jednostronna ma sens,
- mylenie istnienia granicy z określeniem funkcji w punkcie (opcja d),
- mylenie istnienia granicy z ciągłością funkcji (opcja e),
- nieprecyzyjne rozumienie warunków koniecznych wynikających z istnienia granicy.

Zadanie 12. Z poniższego wykresu funkcji w odczytaj potrzebne informacje i dokończ podane stwierdzenia:



1. Funkcja w ma minimum/minima lokalne w: $x = \dots$
2. Funkcja w ma nieciągłość typu luka w: $\dots$
3. punkt, w którym funkcja w jest ciągła, ale nie ma pochodnej, to: $\dots$
4. w punkcie $x_0 = -4$ pochodna funkcji w wynosi $\dots$
5. w punkcie $x_1 = -2$ pochodna funkcji w $\dots$
6. w punkcie $x_2 = 2$ pochodna funkcji w $\dots$
7. Funkcja w ma maksimum/maksima lokalne lokalne w: $\dots$
8. Funkcja w ma asymptotę pionową jednostronna w: $\dots$
9. Funkcja w ma asymptotę poziomą o równaniu: $\dots$
10. $w'(x) = 0$ dla $x = \dots$

Co sprawdzamy: umiejętność odczytywania własności funkcji z wykresu: ekstremów lokalnych, nieciągłości, punktów nieróżniczkowalności, asymptot oraz wartości pochodnej; rozumienie związku między „wyglądem wykresu” a wartością pochodnej.

Oczekiwane podejście: student powinien poprawnie odczytać z wykresu: minima lokalne, maksima lokalne, punkty nieciągłości, punkty, w których funkcja jest ciągła ale nie jest różniczkowalna, asymptoty oraz miejsca zerowe pochodnej, powinien rozumieć interpretację pochodnej funkcji w punkcie.

Typowe błędy:

- mylenie minimum/maksimum lokalnego z globalnym,
- nierozróżnianie różnych typów nieciągłości,
- błędne identyfikowanie punktów, w których funkcja nie jest różniczkowalna (np. mylenie z punktami nieciągłymi),
- nieprawidłowe odczytywanie wartości pochodnej,
- mylenie asymptoty pionowej lewostronnej z prawostronną,
- nierozpoznanie miejsc zerowych pochodnej (punkty o poziomej stycznej),
- błędne określenie równania asymptoty poziomej.

Zadanie 13. Dla funkcji $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dla } x < 1 \\ 2x, & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$ określ dziedzinę $D_g = \dots\dots$

i wskaż wszystkie poprawne stwierdzenia:

- | | |
|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1,$ | e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2,$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1,$ | f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 2,$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1,$ | g) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ nie istnieje, |
| d) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2,$ | h) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1).$ |

Co sprawdzamy: umiejętność obliczania granic jednostronnych funkcji nieelementarnej oraz sprawdzania istnienia granicy obustronnej; rozumienie różnicy między granicą a wartością funkcji w punkcie.

Oczekiwane podejście: student powinien określić $D_g = \mathbb{R}$, obliczyć $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$; stwierdzić, że granica obustronna nie istnieje oraz że $g(1) = 2$. Poprawne odpowiedzi to c), e), g).

Typowe błędy:

- błędne obliczenie granic jednostronnych – mylenie wzorów dla różnych przedziałów,
- twierdzenie, że granica obustronna istnieje mimo różnych granic jednostronnych,
- mylenie wartości funkcji $g(1) = 2$ z granicą lewostronną,
- nieprecyzyjne określenie dziedziny funkcji,
- mechaniczne stosowanie wzorów bez uwzględnienia przedziałów określoności,
- mylenie granicy z wartością funkcji w punkcie (opcja h).

Ciągłość i asymptoty

Zadanie 14. Funkcja $g : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, ciągła w swojej dziedzinie, może mieć (niepotrzebne skreślić):

- | | |
|---|--|
| a) co najwyżej/dokładnie jedną asymptotę pionową, | e) co najwyżej/dokładnie dwie asymptoty poziome, |
| b) co najwyżej/dokładnie dwie asymptoty pionowe, | f) dowolną liczbę asymptot poziomych, |
| c) dowolną liczbę asymptot pionowych, | g) co najwyżej/dokładnie jedną asymptotę ukośną, |
| d) co najwyżej/dokładnie jedną asymptotę poziomą, | h) co najwyżej/dokładnie dwie asymptoty ukośne, |
| | i) dowolną liczbę asymptot ukośnych. |

Co sprawdzamy: rozumienie związku między dziedziną funkcji ciągłej a liczbą możliwych asymptot pionowych; znajomość ograniczeń dotyczących liczby asymptot poziomych i ukośnych dla funkcji jednej zmiennej; rozumienie, że asymptota pozioma to szczególny przypadek asymptoty ukośnej.

Oczekiwane podejście: student powinien rozpoznać, że funkcja ciągła może mieć asymptoty pionowe tylko w punktach wyłączonych z dziedziny (opcja b), co najwyżej dwie asymptoty poziome – po jednej dla $x \rightarrow +\infty$ i $x \rightarrow -\infty$ (opcja e) oraz co najwyżej dwie asymptoty ukośne (opcja h). Opcje dla asymptot poziomych i ukośnych powinien traktować jako równoważne.

Typowe błędy:

- mylne przekonanie, że liczba asymptot pionowych jest nieograniczona mimo skończonej liczby punktów wyłączonych z dziedziny,
- mylenie asymptot pionowych z punktami nieciągłości (nie każdy punkt wyłączony z dziedziny daje asymptotę pionową),
- nierozumienie, że asymptoty ukośne mogą być co najwyżej dwie w kierunkach $-\infty$ lub $+\infty$,
- nierozumienie, że asymptota pozioma to szczególny przypadek asymptoty ukośnej,
- błędne twierdzenie, że funkcja może mieć jednocześnie asymptotę poziomą i ukośną w tym samym kierunku nieskończoności.

Zadanie 15. (!) Wykorzystując wyrażenia: co najmniej (jedną, dwie, ...), dokładnie, co najwyżej, dowolną liczbę, określ dla funkcji $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ możliwą liczbę asymptot:

- | | |
|----------------------|------------------------------------|
| a) pionowych – | d) ukośnych plus pionowych – |
| b) poziomych – | e) ukośnych plus poziomych – |
| c) ukośnych – | f) w kierunku $+\infty$ – |

Co sprawdzamy: rozumienie związku między dziedziną funkcji a liczbą możliwych asymptot pionowych; znajomość ograniczeń dotyczących liczby asymptot poziomych i ukośnych; rozumienie relacji między różnymi typami asymptot; wpływ braku założenia o ciągłości funkcji na istnienie asymptot; rozumienie, że asymptota pozioma to szczególny przypadek asymptoty ukośnej.

Oczekiwane podejście: student powinien rozpoznać, że funkcja może mieć dowolną liczbę asymptot pionowych (w punktach wyłączonych z dziedziny oraz w punktach nieciągłości drugiego rodzaju); co najwyżej dwie asymptoty poziome i co najwyżej dwie asymptoty ukośne; zrozumieć różnicę między punktami wyłączonymi z dziedziny a punktami nieciągłości; zrozumieć, że asymptoty poziome to jednocześnie asymptoty ukośne; właściwie określić liczbę asymptot w kierunku $+\infty$.

Typowe błędy:

- ograniczanie asymptot pionowych tylko do punktów wyłączonych z dziedziny,
- nieuwzględnienie możliwości asymptot pionowych w punktach nieciągłości drugiego rodzaju należących do dziedziny,
- nierozumienie różnicy między funkcją ciągłą a dowolną funkcją w kontekście asymptot,
- błędne założenie, że brak ciągłości wpływa na liczbę asymptot poziomych lub ukośnych,
- nierozumienie, że asymptoty poziome to szczególny przypadek ukośnych,
- błędne zsumowanie asymptot poziomych i ukośnych jako niezależnych,
- nieuwzględnienie ograniczeń kierunkowych asymptot.

Zadanie 16. (!) 3Z-Chat zapytany o liczbę asymptot funkcji l o dziedzinie $D_l = (0, +\infty)$ i zbiorze wartości $W_l = (0, 5)$ ($l : (0, +\infty) \xrightarrow{na} (0, 5)$) odpowiedział, że ta funkcja może mieć

- a) jedną asymptotę pionową: $x = 0$,
- b) jedną asymptotę poziomą,
- c) jedną asymptotę ukośną różną od poziomej.

Które z jego stwierdzeń są poprawne (możliwe, że wszystkie)? Uzasadnij odpowiedź do każdego stwierdzenia.

Co sprawdzamy: analiza możliwych asymptot funkcji o nieograniczonej dziedzinie i ograniczonym zbiorze wartości; rozumienie związku między ograniczonością zbioru wartości a możliwością istnienia różnych typów asymptot; krytyczna ocena informacji z AI.

Oczekiwane podejście: student powinien rozpoznać, że tylko stwierdzenie b) jest poprawne - funkcja może mieć jedną asymptotę poziomą, w $+\infty$. Stwierdzenia a) i c) są błędne: ograniczony zbiór wartości $(0, 5)$ wyklucza asymptoty pionowe i asymptoty ukośne o współczynniku kierunkowym różnym od zera, lewostronnie ograniczona dziedzina wyklucza asymptotę ukośną w $-\infty$.

Typowe błędy:

- nierozumienie, że ograniczony zbiór wartości wyklucza asymptoty pionowe,
- mylne przekonanie, że punkt brzegowy dziedziny automatycznie daje asymptotę pionową,

- brak świadomości, że asymptota ukośna o współczynniku kierunkowym różnym od zera wymaga nieograniczoności zbioru wartości funkcji,
- nieuwzględnienie, że dziedzina $(0, +\infty)$ wyklucza asymptoty w kierunku $-\infty$,
- bezrefleksyjne przyjmowanie odpowiedzi z aplikacji internetowych bez weryfikacji.

Zadanie 17. (!) Czy istnieje funkcja, która ma tylko jedną asymptotę pionową i tylko jedną asymptotę ukośną $y = ax + b$ o współczynniku $a \neq 0$, a jej zbiór wartości jest ograniczony. Jeśli tak, to podaj przykład takiej funkcji, podając wzór lub rysując wykres. Jeśli nie, to uzasadnij, dlaczego.

Co sprawdzamy: umiejętność analizy zgodności warunków dotyczących asymptot i ograniczoności funkcji; rozumienie, że istnienie asymptoty ukośnej, która nie jest pozioma ($a \neq 0$), wyklucza ograniczoność zbioru wartości funkcji.

Oczekiwane podejście: student powinien stwierdzić, że taka funkcja nie istnieje i uzasadnić, że asymptota ukośna $y = ax + b$ (gdzie $a \neq 0$) oznacza, że funkcja jest nieograniczona (dla $x \rightarrow +\infty$ lub $x \rightarrow -\infty$), co wyklucza ograniczoność zbioru wartości.

Typowe błędy:

- mylenie asymptoty ukośnej z poziomą,
- niezrozumienie, że asymptota ukośna z $a \neq 0$ implikuje nieograniczoność funkcji,
- pomijanie dokładnej analizy definicji asymptoty ukośnej,
- nierozpoznanie, że w przypadku ograniczonego zbioru wartości mogą istnieć jedynie asymptoty poziome.

Zadanie 18. Funkcja $h : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ma asymptotę pionową $x = 2$.

1. Czy może być ciągła w swojej dziedzinie?
2. Czy może mieć dokładnie jeden punkt nieciągłości? Jeśli tak, to wskaż przykład (przykłady) podając wzór lub rysując wykres.
3. Czy może mieć dwa punkty nieciągłości. Jeśli tak, to wskaż przykład (przykłady).
4. Czy może być ograniczona?
5. Czy może być różnowartościowa?

Uzasadnij każdą odpowiedź.

Co sprawdzamy: rozumienie pojęcia asymptoty pionowej i jej związku z ciągłością funkcji w dziedzinie; umiejętność analizowania własności funkcji z asymptotą pionową oraz konstruowania odpowiednich przykładów.

Oczekiwane podejście: student powinien zrozumieć, że asymptota pionowa nie wyklucza ciągłości w dziedzinie (punkt 1 – tak); mieć świadomość, że funkcja ma punkt nieciągłości w $x = 2$ i może on być jedyny (punkt 2 – tak, ale, może współistnieć z innymi nieciągłościami (punkt 3 – tak, z przykładami); asymptota pionowa wyklucza ograniczoność (punkt 4 – nie), ale nie wyklucza różnowartościowości (punkt 5 – tak). Każda odpowiedź powinna być uzasadniona.

Typowe błędy:

- mylenie ciągłości w dziedzinie z ciągłością w całym $\mathbb{R}$,
- twierdzenie, że asymptota pionowa automatycznie oznacza nieciągłość w dziedzinie,
- nieumiejętność skonstruowania przykładu funkcji z asymptotą pionową i dodatkową nieciągłością,
- błędne rozumowanie o ograniczoności – uznanie, że asymptota pionowa oznacza nieograniczoność,
- mylenie równoważności z ciągłością lub monotonicznością.

Zadanie 19. Funkcja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma asymptotę pionową lewostronną $x = 2$.

1. Czy może być ciągła w swojej dziedzinie?
2. Czy może mieć punkt nieciągłości? Jeśli tak, to wskaż przykład (przykłady) podając wzór lub rysując wykres.
3. Czy może być ograniczona?
4. Czy może być różnowartościowa?

Uzasadnij każdą odpowiedź.

Co sprawdzamy: rozumienie pojęcia asymptoty pionowej lewostronnej i jej wpływu na własności funkcji; umiejętność analizowania ciągłości funkcji z asymptotą jednostronną oraz konstruowania odpowiednich przykładów.

Oczekiwane podejście: student powinien zauważyć, że asymptota pionowa lewostronna w $x = 2$ oznacza nieciągłość w tym punkcie, więc funkcja nie może być ciągła w całej dziedzinie (punkt 1 - nie); może mieć dodatkowe nieciągłości (punkt 2 - tak, z przykładami); nie może być ograniczona (punkt 3 - nie), ale może być różnowartościowa (punkt 4 - tak).

Typowe błędy:

- nierozumienie, że asymptota pionowa lewostronna w tym przypadku automatycznie oznacza nieciągłość w punkcie $x = 2$,
- mylenie asymptoty lewostronnej z prawostronną w kontekście ciągłości,
- błędne konstruowanie przykładów funkcji z dodatkowymi nieciągłościami,
- nierozpoznanie, że asymptota pionowa (nawet jednostronna) wyklucza ograniczoność,
- błędne wnioskowanie o różnowartościowości na podstawie istnienia asymptoty.

Zadanie 20. Widząc, że funkcja $k : (-2, 2) \rightarrow (0, +\infty)$ jest suriekcją na $(0, +\infty)$, podaj odpowiedzi na poniższe pytania wraz z uzasadnieniami, najlepiej podając przykłady (mogą być w postaci graficznej) konkretnych funkcji.

1. Czy ta funkcja może nie mieć żadnej asymptoty?
2. Czy może mieć dokładnie jedną asymptotę pionową?
3. Czy może mieć asymptotę poziomą $y = 0$?

4. Czy może być ciągła i osiągać maksimum globalne (przyjmować wartość największą)?
5. Czy jeśli jest ciągła to ,zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa, musi osiągnąć minimum globalne (przyjąć wartość najmniejszą)?

Co sprawdzamy: rozumienie pojęcia suriekcji; umiejętność analizy możliwych asymptot funkcji na przedziale otwartym z lewostronnie ograniczonym zbiorem wartości; rozumienie związku między dziedziną zbiorem wartości a istnieniem ekstremów globalnych w przypadku funkcji ciągłych; znajomość twierdzenia Weierstrassa i umiejętność oceny czy są spełnione jego założenia.

Oczekiwane podejście: student powinien rozpoznać, że funkcja może nie mieć asymptot (punkt 1 – tak), może mieć jedną asymptotę pionową (punkt 2 – tak), nie może mieć asymptoty $y = 0$ ze względu na dziedzinę, nie może osiągać maksimum globalnego ze względu na zbiór wartości (punkt 4 – nie); zauważyć, że nie jest spełnione założenie twierdzenia Weierstrassa bo funkcja jest ciągła na przedziale otwartym (punkt 5 – nie).

Typowe błędy:

- nieuwzględnienie ograniczeń wynikających z przeciwdziedziny $(0, +\infty)$ przy analizie asymptot poziomych,
- mylne przekonanie, że funkcja na przedziale otwartym musi mieć asymptoty pionowe,
- brak znajomości założeń twierdzenia Weierstrassa (lub całego twierdzenia),
- mylenie maksimum globalnego z lokalnym,
- nierozumienie znaczenia suriekcji,
- nieuwzględnienie dziedziny i zbioru wartości w rozumowaniu na temat ekstremów globalnych.

Pochodne funkcji

Zadanie 21. Określ, które z podanych zdań są prawdziwe, a które fałszywe.

- a) Jeżeli funkcja nie ma pochodnej w x_0 , to nie ma w tym punkcie ekstremum.
- b) Jeżeli $f'(x_0) = 0$, to funkcja jest w tym punkcie ciągła.
- c) Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 3$, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne.
- d) Jeżeli funkcja jest ciągła w x_0 , to jest w tym punkcie różniczkowalna.
- e) Jeśli $f'(x_0) > 0$, to funkcja jest rosnąca w pewnym otoczeniu punktu x_0 .
- f) Jeśli funkcja jest rosnąca w pewnym otoczeniu punktu x_0 , to $f'(x_0) > 0$.
- g) Jeśli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 0$, to nie można określić charakteru punktu x_0 .
- h) Funkcja $f(x) = x^3$ ma w $x_0 = 0$ punkt przegięcia.
- i) Styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ w $x_0 = 0$ jest równoległa do osi Ox .

- j) Funkcja $f(x) = |x|$ jest w $x_0 = 0$ różniczkowalna.
- k) Funkcja $f(x) = |x|$ nie ma w $x_0 = 0$ pochodnej.
- l) Styczna do wykresu funkcji $f(x) = |x|$ w $x_0 = 0$ jest równoległa do osi Ox .

Co sprawdzamy: znajomość związków między ciągłością, różniczkowalnością, ekstremami lokalnymi i monotonicznością funkcji; umiejętność stosowania testów na ekstrema i rozpoznawania typowych błędów w rozumowaniu o pochodnych; rozumienie pojęcia stycznej do wykresu funkcji.

Oczekiwane podejście: student powinien poprawnie ocenić prawdziwość każdego zdania, rozumiejąc że: różniczkowalność implikuje ciągłość, ale nie na odwrót, ekstrema mogą istnieć bez pochodnej, test drugiej pochodnej ma ograniczenia; powinien powiązać brak pochodnej w punkcie z brakiem stycznej oraz mieć świadomość, że styczna może przecinać wykres funkcji.

Typowe błędy:

- mylenie warunków koniecznych z wystarczającymi dla ekstremów,
- nierozumienie, że różniczkowalność jest warunkiem silniejszym niż ciągłość,
- błędne stosowanie testu drugiej pochodnej bez sprawdzenia warunków,
- mylenie monotoniczności lokalnej z globalną i jej związku z pochodną,
- nieznanie klasycznych przykładów funkcji nieróżniczkowalnych ($y = |x|$) i punktów przegięcia ($y = x^3$)
- błędne przekonanie, że styczna do wykresu funkcji nie może przecinać tego wykresu.

Zadanie 22. Wiadomo, że funkcja $y = g(x)$ ma pochodną $g'(x) = x^2 - 4$. Odpowiedz na poniższe pytania:

1. Czy g jest rosnąca w $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$?
2. W jakim przedziale/przedziałach g jest malejąca?
3. Czy można wskazać ekstrema funkcji g ? Jeśli tak, to podaj w jakim punkcie i jakie to ekstrema?

(Bez obliczania samej funkcji g)

Co sprawdzamy: umiejętność analizy monotoniczności i ekstremów funkcji na podstawie znaku pochodnej; rozumienie związku między miejscami zerowymi pochodnej a ekstremami lokalnymi oraz między znakiem pochodnej a monotonicznością.

Oczekiwane podejście: student powinien wyznaczyć miejsca zerowe funkcji g' , przeanalizować znak pochodnej na przedziałach i stwierdzić: 1) nie – funkcja nie jest rosnąca na podanym zbiorze; 2) g jest malejąca na $(-2, 2)$; 3) minimum lokalne w $x = 2$, maksimum lokalne w $x = -2$.

Typowe błędy:

- błędne wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej,
- nieprawidłowa analiza znaku wielomianu $x^2 - 4$ na różnych przedziałach,
- nierozumienie, że funkcja może być rosnąca na dwóch rozłącznych przedziałach, ale nie na ich sumie,
- pomijanie analizy punktów, gdzie pochodna zmienia znak.
- błędne określenie typu ekstremum na podstawie znaku pochodnej.

Zadanie 23. Naszkicuj wykres funkcji $f : [-3, +\infty) \xrightarrow{na} (-1, +\infty)$ spełniającej równocześnie wszystkie następujące wymagania:

1. f ma punkt nieciągłości pierwszego rodzaju typu luka w $x = 0$,
2. f ma punkt nieciągłości drugiego rodzaju typu skok nieskończony,
3. f jest ciągła w $x = -1$, ale $f'(-1)$ nie istnieje,
4. f ma jedno minimum lokalne,
5. f ma dwa maksima lokalne,
6. f ma asymptotę pionową jednostronną.

Co sprawdzamy: umiejętność szkicowania wykresu funkcji na podstawie zadanych warunków dotyczących ciągłości, różniczkowalności, ekstremów lokalnych i asymptot; rozumienie różnych typów nieciągłości i ich graficznej reprezentacji.

Oczekiwane podejście: student powinien naszkicować wykres uwzględniający wszystkie podane warunki: lukę, skok nieskończony, punkt, w którym funkcja jest ciągła ale nieróżniczkowalna, odpowiednią liczbę ekstremów lokalnych oraz asymptotę pionową jednostronną; powinien pamiętać o ograniczeniach dziedziny i zbioru wartości.

Typowe błędy:

- mylenie nieciągłości pierwszego i drugiego rodzaju,
- rysowanie asymptoty pionowej obustronnej zamiast jednostronnej,
- nieuwzględnienie ograniczeń dziedziny $[-3, +\infty)$ i zbioru wartości $(-1, +\infty)$,
- błędne umieszczenie ekstremów lokalnych lub ich niewłaściwa liczba,
- brak wiedzy, jak wygląda wykres funkcji w punkcie, w którym jest ciągła, ale nie różniczkowalna.

Zadanie 24. Wskaż, w których przypadkach można bezpośrednio zastosować regułę de l'Hospitala. Uzasadnij odpowiedź.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, $x \in [-5, 5] \setminus \{0\}$,

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$,

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 7}{-2n^2 + 5}$, $n \in \mathbb{N}$,

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$,

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3 + 1}$, $x \in \mathbb{N}$.

Co sprawdzamy: znajomość warunków stosowania reguły de l'Hospitala i umiejętność rozpoznawania symboli nieoznaczonych; rozumienie różnicy między granicami funkcji i ciągów.

Oczekiwane podejście: student powinien rozpoznać symbole nieoznaczone $\left[\frac{0}{0}\right]$ i $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; powinien zauważyć, że: regułę można zastosować bezpośrednio w przypadkach: a) i c); przypadki b) i d) nie mają symboli nieoznaczonych; przypadki e) i f) to granice ciągów – reguły nie można zastosować bezpośrednio.

Typowe błędy:

- mechaniczne stosowanie reguły bez sprawdzenia symbolu nieoznaczonego,
- nierozpoznanie, że przypadki b) i d) mają określone granice bez symboli nieoznaczonych,
- mylne przekonanie, że regułę można stosować do każdej granicy typu $\frac{f(x)}{g(x)}$,
- próba stosowania reguły de l'Hospitala do granic ciągów (przypadki e, f),
- nierozumienie, że reguła de l'Hospitala wymaga różniczkowalności, której nie ma na zbiorach dyskretnych,
- pomijanie analizy typu granicy (funkcja vs ciąg).

Całki

Zadanie 25. Zaproponuj podstawienia, które pomogą wyznaczyć całkę, a następnie zapisz ją przy użyciu nowych zmiennych.

1. $\int \frac{\ln^2 u}{2u} du = \dots$

2. $\int \frac{\sqrt{a+1}+a}{\sqrt[3]{a+1}} da = \dots$

Co sprawdzamy: umiejętność rozpoznania struktury wyrażenia podcałkowego i dobrania odpowiedniego podstawienia upraszczającego całkę; umiejętność poprawnej zamiany zmiennej w całce, czyli wyrażenia funkcji podcałkowej za pomocą nowej zmiennej, pamiętając o uwzględnieniu nowej różniczki.

Oczekiwane podejście: student powinien zaproponować dobre podstawienia i zapisać całki przy użyciu nowych zmiennych, pamiętając o zmianie różniczek.

Typowe błędy:

- w pierwszym przykładzie brak rozpoznania funkcji złożonej typu $\ln u$, błędne podstawienie, np. $z = u^2$.
- pominięcie różniczkowania, zapisanie podstawienia bez przekształcenia du na dz .
- w drugim przykładzie błędne podstawienie albo mieszanie zmiennych w jednej całce, będące efektem braku zmiany wszystkich składników na nowe zmienne.
- błędne operacje na potęgach przy upraszczaniu wyrażenia po podstawieniu.

Zadanie 26. Wskaż, do których całek NIE można zastosować twierdzenie Newtona-Leibniza. Uzasadnij odpowiedź, wskazując które założenia twierdzenia nie są spełnione.

a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$

d) $\int_{-2}^2 |x| dx$

g) $\int_{-2}^2 \frac{1}{x+5} dx$

b) $\int_0^2 x^2 dx$

e) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

h) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

c) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$

f) $\int_0^1 \ln(x) dx$

i) $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$

Co sprawdzamy: rozumienie założeń twierdzenia Newtona-Leibniza i umiejętność rozpoznawania przypadków, gdy nie można go stosować; rozróżnianie całek właściwych od niewłaściwych; identyfikowanie punktów nieciągłości funkcji podcałkowej.

Oczekiwane podejście: student powinien rozpoznać, że twierdzenia Newtona-Leibniza nie można stosować do całek a), c), e), f), h) ze względu na naruszenie założeń: nieciągłość funkcji w przedziale całkowania (a, c, f, h) lub nieskończone granice całkowania (e). Powinien zauważyć, że całki b), d), g), i) spełniają wszystkie założenia.

Typowe błędy:

- nierozpoznanie punktów nieciągłości funkcji podcałkowej,
- mylne przekonanie, że funkcja $|x|$ nie jest całkowalna,
- błędne identyfikowanie nieciągłości tam, gdzie jej nie ma (np. w przykładzie g),
- pomijanie sprawdzenia ciągłości funkcji w całym przedziale całkowania,
- nieuwzględnienie ograniczenia do przedziałów skończonych w twierdzeniu Newtona-Leibniza,
- mechaniczne stosowanie wzoru bez analizy założeń.

Zadanie 27. (!) Wiedząc, że funkcje f i w są klasy C^1 oraz funkcją pierwotną do w jest W , a pierwotną do f jest F , zastosuj metodę całkowania przez części lub przez podstawienie i zapisz **jeden** krok całkowania

1. $\int_0^1 (2e^x + x) \cdot w'(x) dx = \dots$

2. $\int_0^1 x \cdot f(x^2 + 7) dx = \dots$

Co sprawdzamy: znajomość pojęcia funkcji pierwotnych i umiejętność zastosowania odpowiednich metod całkowania.

Oczekiwane podejście: poprawne zastosowanie metod całkowania; uwzględnienie granic całkowania oraz ich zmiana, jeśli jest taka potrzeba.

Typowe błędy:

- niewłaściwe podstawienie funkcji do wzoru na całkowanie przez części, co prowadzi do bardziej skomplikowanej całki,
- nieuwzględnienie granic przy całce oznaczonej,
- mieszanie w jednym ciągu obliczeń (wykorzystując znak równości) całek nieoznaczonych i oznaczonych,
- nieprawidłowe obliczenie pochodnej lub funkcji pierwotnej przy całkowaniu przez części,
- brak przeliczenia granic całkowania przy podstawianiu,
- nieprawidłowy zapis funkcji podcałkowej po podstawieniu, np. pozostawienie gdzieś starej zmiennej.

Zadanie 28. Jeśli

$$\int_0^2 f(x) dx = 4, \quad \int_2^5 f(x) dx = -2, \quad \int_1^4 f(x) dx = 1,$$

to

1. $\int_4^5 f(x) dx = \dots$

2. $\int_5^0 f(x) dx = \dots$

3. $\int_3^3 f(x) dx = \dots$

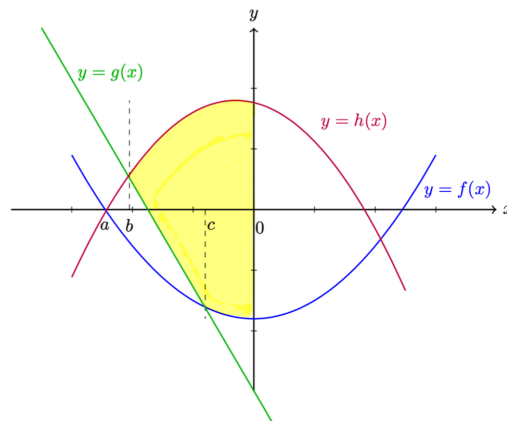
Co sprawdzamy: znajomość podstawowych własności całki oznaczonej, w tym addytywności na przedziałach, konieczności zmiany znaku przy zmianie orientacji granic, wartości całki po przedziale zdegenerowanym (gdzie dolna i górna granica są równe).

Oczekiwane podejście: student powinien prawidłowo wykorzystać własności całki oznaczonej.

Typowe błędy:

- nieuwzględnienie zmiany znaku przy odwrotnych granicach całkowania, np. błędne założenie, że $\int_0^5 f(x) dx = \int_5^0 f(x) dx$.
- traktowanie całki po przedziale o zerowej długości jako wartości funkcji, np. $\int_3^3 f(x) dx = f(3)$, zamiast 0.
- niewłaściwe łączenie całek, np. błędne sumowanie całek po nieprzylegających przedziałach lub w złym kierunku.

Zadanie 29. Za pomocą całki opisz pole zaznaczonego obszaru:



Co sprawdzamy: umiejętność interpretacji graficznej pojęcia całki jako pola pod wykresem funkcji oraz zdolność do poprawnego zapisania pola obszaru ograniczonego wykresami funkcji jako różnicy całek.

Oczekiwane podejście: student powinien zauważyć, że zaznaczony obszar składa się z dwóch części, rozpoznać, która z funkcji znajduje się wyżej i odpowiednio zapisać pole jako różnicę funkcji pod całką, prawidłowo określić granice całkowania i umieć zapisać pole zaznaczonego obszaru jako sumę dwóch całek.

Typowe błędy:

- błędna kolejność funkcji podcałkowych (np. $g(x) - h(x)$ zamiast $h(x) - g(x)$, co prowadzi do ujemnego pola.
- nieuwzględnienie podziału obszaru na dwa różne przedziały z różnymi dolnymi funkcjami.
- złe określenie granic całkowania.
- przekonanie, że wystarczy „odejmować wykresy” bez sprawdzenia, który znajduje się wyżej.

Zadanie 30. (!) Czy twierdzenie Newtona-Leibniza można wykorzystać do obliczenia całki $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$?

Jeśli tak, to oblicz ją. Jeśli nie, to wskaż, co należałoby zmienić, by móc z tego twierdzenia skorzystać.

Co sprawdzamy: znajomość i rozumienie założeń w twierdzeniu Newtona-Leibniza; umiejętność dostrzeżenia, że funkcja podcałkowa ma osobliwość (nieskończoność) w punkcie należącym do przedziału całkowania.

Oczekiwane podejście: student powinien zauważyć, że funkcja $y = \frac{1}{x}$ nie jest ciągła w przedziale $[-1, 1]$ i dlatego twierdzenie Newtona-Leibniza nie może zostać zastosowane bezpośrednio (bo zakłada ono ciągłość funkcji podcałkowej na całym przedziale całkowania). Student może zaproponować rozbięcie całki na sumę dwóch całek niewłaściwych i dopiero wtedy zauważyć, że podana całka jest niewłaściwa i rozbieżna. Student powinien zaproponować, że aby można było zastosować twierdzenie Newtona-Leibniza, należałoby całkować po przedziale nie zawierającym punktu osobliwego, np. $\int_a^b \frac{1}{x} dx$ dla $0 < a < b$ albo $a < b < 0$.

Typowe błędy:

- bezrefleksyjne zastosowanie twierdzenia Newtona-Leibniza mimo nieciągłości funkcji w punkcie $x = 0$,
- obliczenie $[\ln |x|]_{-1}^1 = \ln 1 - \ln 1 = 0$, co sugeruje błędnie, że całka istnieje i jest równa zero,
- nieuwzględnienie faktu, że całka oznaczona z funkcji nieograniczonej w punkcie wewnętrznym wymaga interpretacji jako całki niewłaściwej,
- nieumiejętność zapisu całki jako granicy sumy dwóch całek niewłaściwych.

Liczby zespolone

Zadanie 31. Spośród liczb zespolonych

a) $z_1 = \sqrt{2} \left(\sin \frac{2\pi}{3} + i \cos \frac{2\pi}{3} \right),$

c) $z_3 = - \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right),$

b) $z_2 = \pi \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right),$

d) $z_4 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7} \right),$

e) $z_5 = \cos 3 + i \sin 3,$

g) $z_7 = ie^\pi,$

f) $z_6 = \cos \frac{2\pi}{11} + i \sin \frac{13\pi}{11},$

h) $z_8 = 2e^{i\frac{\pi}{7}}.$

wskaz **wszystkie**, które są liczbami w postaci

1. algebraicznej: ...

2. trygonometrycznej: ...

3. wykładniczej: ...

Co sprawdzamy: znajomość i umiejętność rozpoznawania trzech głównych postaci liczby zespolonej: algebraicznej (kartezjańskiej), trygonometrycznej i wykładniczej oraz jej argumentu i modułu w różnych kontekstach.

Oczekiwane podejście: student powinien poprawnie zidentyfikować postać podanych liczb, powinien też rozpoznać błędy w składni (np. zamiana $\cos$ i $\sin$).

Typowe błędy:

- błędne utożsamianie każdej liczby z funkcjami trygonometrycznymi jako postaci trygonometrycznej (np. $\sin + i \cos$ zamiast $\cos + i \sin$ albo $\sin$ i $\cos$ liczony dla różnych argumentów),
- niezwracanie uwagi na to, że w strukturze postaci trygonometrycznej $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, moduł r musi być dodatni,
- nieuwzględnienie, że postać wykładnicza musi mieć wykładnik zespolony $i\varphi$, a nie np. e^π ,
- nierozróżnianie, że $a + ib$ to forma algebraiczna niezależnie od tego jak zapisano a, b (np. gdy część rzeczywista lub urojona dane są jako wartości funkcji trygonometrycznych).

Zadanie 32. Dana jest liczba

$$w = \left(\frac{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{\cos \beta + i \sin \beta} \right)^{12}.$$

Podaj:

1. moduł liczby w ,
2. argument liczby w ,
3. postać wykładniczą liczby w ,
4. $\operatorname{Re}(w)$ i $\operatorname{Im}(w)$,
5. postać trygonometryczną liczby w .

Co sprawdzamy: znajomość różnych postaci liczby zespolonej, wykonywanie działań w postaci trygonometrycznej.

Oczekiwane podejście: student powinien poprawnie obliczyć moduł, argument liczby zespolonej, $\operatorname{Re}(w)$ i $\operatorname{Im}(w)$, skorzystać ze wzorów w postaci trygonometrycznej lub wykładniczej.

Typowe błędy:

- nieuwzględnienie zasad działania na liczbach zespolonych w postaci trygonometrycznej (np. dodawanie argumentów zamiast ich odejmowania),

- niewłaściwe przekształcenie wyrażenia przed potęgowaniem (np. nieobliczenie modułu i argumentu ilorazu),
- niepoprawne stosowanie wzoru Moivre'a,
- błędne określenie $\operatorname{Re}(w)$ i $\operatorname{Im}(w)$, w tym nierozróżnienie części urojonej od liczby urojonej.

Zadanie 33. LastChanceGPT twierdzi, że liczba $2i$ jest pierwiastkiem równania $z^3 = 8i$.

1. Sprawdź, czy ma rację. Uzasadnij odpowiedź.
2. Ile rozwiązań ma to równanie?
3. Określ, w których ćwiartkach układu współrzędnych leżą pierwiastki równania.

Co sprawdzamy: umiejętność sprawdzenia, czy dana liczba zespolona jest rozwiązaniem równania (trzeba wykonać potęgowanie liczby zespolonej); wiedzę o liczbie i rozmieszczeniu pierwiastków na płaszczyźnie zespolonej.

Oczekiwane podejście: student powinien sprawdzić, czy $(2i)^3 = 8i$; zauważyć, że równanie $z^3 = 8i$ ma dokładnie trzy pierwiastki zespolone (bo stopień równania to 3) i że jednym z nich jest $-2i$, który leży na ujemnej części osi urojonej. Na tej podstawie powinien stwierdzić, że dwa pozostałe (jako wierzchołki trójkąta równobocznego) muszą leżeć w pierwszej i drugiej ćwiartce płaszczyzny zespolonej.

Typowe błędy:

- błędne obliczenia,
- uznanie, że skoro jedna liczba spełnia równanie, to jest ona jedynym rozwiązaniem,
- błędna interpretacja geometryczna liczby $-2i$,
- brak wiedzy o rozmieszczeniu pierwiastków w wierzchołkach wielokąta foremnego,
- niepoprawne określenie ćwiartek, wynikające z błędnego oszacowania kąta lub nieznanomości układu współrzędnych zespolonych.

Działania na macierzach

Zadanie 34. Niech $\mathbf{A}_{2 \times 3}$, $\mathbf{B}_{3 \times 2}$ oraz $\mathbf{C}_{3 \times 3}$. Dla każdego z poniższych wyrażeń:

- | | |
|--|--|
| 1. $\mathbf{A}^T \mathbf{C}$, | 5. $\mathbf{AC} + \mathbf{B}$, |
| 2. $\mathbf{CB} + \mathbf{BAC}^T$, | 6. $\mathbf{AB} + \mathbf{B}^T \mathbf{B}$, |
| 3. $\det(\mathbf{C}^T) \cdot \mathbf{A}$, | 7. $\mathbf{CB} - \mathbf{A}^T \mathbf{AA}^T$, |
| 4. $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{BB}^T)$, | 8. $\det(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T$. |

zdecyduj, czy działanie jest wykonalne, jeśli tak, określ typ wyniku (liczba lub macierz), w przypadku macierzy podaj jej wymiar.

Co sprawdzamy: umiejętność określania wykonalności działań na macierzach na podstawie ich rozmiarów (wymiarów), w szczególności iloczynu i dodawania macierzy oraz obliczania wyznacznika; świadomość, że nie każda kombinacja macierzy daje sensowną (czyli wykonalną) operację.

Oczekiwane podejście: student powinien dla każdego wyrażenia określić wymiary wszystkich macierzy występujących w działaniu (w tym przekształconych, np. transponowanych), zweryfikować zgodność wymiarów dla mnożenia i dodawania macierzy; zauważyć, że wyznacznik można obliczyć tylko dla macierzy kwadratowej; przeprowadzić analizę składniową bez wykonywania obliczeń.

Typowe błędy:

- nieuwzględnienie zmiany wymiarów po transpozycji,
- zakładanie, że jeśli pojedyncze operacje są wykonalne, to całe wyrażenie także (np. brak sprawdzenia, czy składniki sumy mają ten sam rozmiar),
- traktowanie mnożenia macierzy jako przemiennej,
- intuicyjne „dopasowywanie” wymiarów zamiast formalnej analizy (np. zakładanie, że „na pewno się da”, bo „coś się upraszcza”),
- uwzględnienie wyznacznika macierzy niekwadratowej.

Zadanie 35. Niech $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ i $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{3 \times 2}$ oraz $a_{ij} = (-1)^{i+j}$, $b_{ij} = \begin{cases} 1, & i < j \\ 2, & i = j \\ 0, & i > j \end{cases}$.

Jeśli $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}^T$ oraz $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$ to:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. $c_{12} = \dots$ | 3. $d_{12} = \dots$ |
| 2. $c_{23} = \dots$ | 4. $d_{22} = \dots$ |

Przyjmujemy, że $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, $\mathbf{D} = [d_{ij}]$.

Co sprawdzamy: umiejętność budowy macierzy na podstawie podanego wzorca, analizowania wymiarów macierzy w kontekście wykonalności działań, stosowanie reguł rachunku macierzowego oraz świadomego operowania transpozycją i jej wpływem na wymiary, wskazanie elementu macierzy na podstawie jego pozycji.

Oczekiwane podejście: student powinien poprawnie zbudować macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ oraz ocenić, czy podane działania są wykonalne; powinien przeprowadzić poprawne obliczenia i podać wartości elementów na wskazanych pozycjach.

Typowe błędy:

- niepoprawne zbudowanie macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$,
- błędne obliczenie wymiarów macierzy po transpozycji,
- dodawanie macierzy o niezgodnych wymiarach,
- traktowanie mnożenia macierzy jako przemiennej,
- błędne pozycjonowanie indeksów przy odczycie elementów z macierzy.

Wyznaczniki i macierz odwrotna

Zadanie 36. Z tego, że

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} = -3$$

wynika:

$$1. \det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4j \end{bmatrix} = \dots$$

$$2. \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ g-a & h-b & j-c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \end{bmatrix} = \dots$$

Co sprawdzamy: znajomość, rozumienie i umiejętność zastosowania podstawowych własności wyznacznika; świadomość że operacje na wierszach wpływają na wartość wyznacznika w określony sposób i należy te zmiany uwzględnić w obliczeniach.

Oczekiwane podejście: student powinien zastosować przekształcenia elementarne (Gaussa) i przekształcić podane macierze do postaci dla której znany jest wyznacznik, uwzględniając wpływ operacji elementarnych na wartość wyznacznika.

Typowe błędy:

- pominięcie wpływu mnożenia wiersza przez skalar na wartość wyznacznika,
- błędne przekształcenia przy zamianie kolejności wierszy (np. brak zmiany znaku wyznacznika),
- niezrozumienie, że dodanie wielokrotności jednego wiersza do innego nie zmienia wyznacznika,
- problemy z rozwiązaniem zadania wynikające z mechanicznego wykonywania obliczeń na macierzach liczbowych.

Zadanie 37. Zakładając, że wszystkie macierze są odwracalne oraz, że wszystkie wymagane działania są poprawnie zdefiniowane, wyznacz $\mathbf{X}$ z równań:

1. jeśli $\mathbf{XA} + \mathbf{B} = \mathbf{I}$, to $\mathbf{X} = \dots$

2. jeśli $\mathbf{AXB} = \mathbf{I}$, to $\mathbf{X} = \dots$

3. jeśli $\mathbf{AX} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$, to $\mathbf{X} = \dots$

4. jeśli $\mathbf{AX} = \mathbf{BA}$, to $\mathbf{X} = \dots$

Co sprawdzamy: umiejętność rozwiązywania prostych równań macierzowych z wykorzystaniem własności działań na macierzach odwracalnych.

Oczekiwane podejście: student powinien przekształcić równania tak, aby wyrazić $\mathbf{X}$ jako kombinację działań odwrotnych (mnożenie przez macierz odwrotną z lewej/prawej strony) i zastosować przemienność tylko tam, gdzie jest to dopuszczalne.

Typowe błędy:

- błędne założenie przemienności mnożenia macierzy i nieprawidłowe mnożenie stron równania przez macierz odwrotną (np. z niewłaściwej strony),

- niepoprawne wyciąganie $\mathbf{X}$ poza nawias (np. w przykładzie 3),
- nieuwzględnianie faktu, że działanie odwrotne dotyczy całego bloku macierzy, a nie tylko jednej z nich,
- błędne „skrócenie” równania $\mathbf{AX} = \mathbf{BA}$ do $\mathbf{X} = \mathbf{B}$, wynikające z niepoprawnego skracania macierzy $\mathbf{A}$ po przeciwnych stronach równania bez mnożenia przez macierz odwrotną we właściwej kolejności,
- próba zastosowania działania dzielenia przez macierz.

Układy równań liniowych

Zadanie 38. Macierz $\mathbf{U} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\beta & -\beta \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \end{array} \right]$ jest macierzą uzupełnioną układu równań $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$.

Z tego, że $R(\mathbf{A}) = \dots\dots\dots$ oraz $R(\mathbf{U}) = \dots\dots\dots$, a liczba niewiadomych to $\dots\dots\dots$ wynika, że układ

- | | |
|--------------------------|--------------------------------------|
| a) nie ma rozwiązań, | d) ma trzy rozwiązania, |
| b) ma jedno rozwiązanie, | e) ma nieskończenie wiele rozwiązań, |
| c) ma dwa rozwiązania, | f) inna odpowiedź – podaj jaką. |

Co sprawdzamy: umiejętność analizy układu równań liniowych metodą rzędów: wyznaczania rzędu macierzy głównej i rozszerzonej oraz stosowanie twierdzenia Kroneckera-Capelliego.

Oczekiwane podejście: student powinien przeprowadzić przekształcenia wierszowe lub wykorzystać zależności między wierszami, aby prawidłowo określić rząd macierzy głównej i macierzy rozszerzonej, porównać te wartości i odnieść je do liczby niewiadomych, a następnie podać poprawny wniosek dotyczący liczby rozwiązań układu.

Typowe błędy:

- niewłaściwe określenie rzędu macierzy (np. nieuwzględnienie zależności liniowych między wierszami),
- pominięcie porównania $R(\mathbf{A})$ i $R(\mathbf{U})$, czyli nieuwzględnienie warunku istnienia rozwiązania,
- błędna interpretacja zależności między rzędem a liczbą niewiadomych (np. przyjęcie, że jeśli rzędy $R(\mathbf{A})$ i $R(\mathbf{U})$ są równe, ale mniejsze od liczby niewiadomych, to układ nie ma rozwiązania),
- utożsamianie rzędu lub liczby niewiadomych z liczbą rozwiązań.

Zadanie 39. Istnieją trzy „popularne” metody rozwiązywania układów równań liniowych.

- ☐ **A** metoda eliminacji Gaussa,
- ☐ **B** twierdzenie Cramera,
- ☐ **C** metoda wykorzystująca macierz odwrotną.

Wskaż **wszystkie** metody, których można użyć do rozwiązywania podanych układów równań. Odpowiedź uzasadnij.

1.
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$
 ☐ **A** ☐ **B** ☐ **C**

2.
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$
 ☐ **A** ☐ **B** ☐ **C**

3.
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$
 ☐ **A** ☐ **B** ☐ **C**

Co sprawdzamy: umiejętność rozróżniania metod rozwiązywania układów równań liniowych i znajomość warunków ich stosowalności: eliminacji Gaussa, wzorów Cramera i metody macierzy odwrotnej.

Oczekiwane podejście: student powinien przeanalizować każdy z podanych układów, określić, czy jego macierz główna jest kwadratowa i odwracalna. Na tej podstawie powinien poprawnie wskazać, które metody (spośród A, B, C) mogą być użyte w danym przypadku.

Typowe błędy:

- zakładanie, że wszystkie metody są zawsze stosowalne niezależnie od rodzaju układu,
- stosowanie wzorów Cramera lub macierzy odwrotnej do układu nieoznaczonego lub sprzecznego,
- nieuwzględnienie wymogu, że metoda z macierzą odwrotną i wzory Cramera wymagają kwadratowej i odwracalnej macierzy głównej,
- traktowanie metody Gaussa jako mającej te same ograniczenia co pozostałe, mimo że może być stosowana także do układów nieoznaczonych lub sprzecznych,
- mechaniczne podejmowanie decyzji bez uprzedniej analizy rzędu macierzy lub liczby równań i niewiadomych,
- nieuwzględnienie, że metody B i C mają identyczne ograniczenia stosowalności (obie wymagają, aby macierz główna była kwadratowa i odwracalna) i mogą być stosowane zamiennie.

Literatura

1. P. Black, D. Wiliam, *Developing a theory of formative assessment*, In: J. Gardner (ed.), *Assessment and learning*, Sage, London 2006, pp. 81–100.
2. M. Małolepszy, *Egzamin z matematyki typu open book w kształceniu przyszłych inżynierów*, Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej, nr 72, 2021, ss. 63–66.
3. A. Selden, J. Selden, *Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem?*, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 34, no. 1, 2003, pp. 4–36.
4. D. Tall, S. Vinner, *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, no. 2, 1981, pp. 151–169.
5. K. Weber, *Mathematics Majors' Perceptions of Conviction, Validity, and Proof*, *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 12, no. 4, 2010, pp. 306–336.