

Katarzyna ADRIANOWCZ

Katedra Zastosowań Matematyki i Metod Sztucznej Inteligencji, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23,
44-100 Gliwice

Macierze odwrotne. Część 2 – wyznaczanie macierzy odwrotnych z wykorzystaniem dopełnień algebraicznych

Streszczenie. Artykuł stanowi kontynuację pracy pt. *Macierze odwrotne. Część 1 - definicje, własności, wyznaczanie macierzy odwrotnych z definicji*. W tej części omówiono alternatywną metodę wyznaczania macierzy odwrotnych, opartą na wzorze wykorzystującym macierz dopełnień algebraicznych. Wprowadzono definicje dopełnień algebraicznych oraz macierzy dołączonej, a następnie podano i udowodniono wzór potrzebny do wyznaczania macierzy odwrotnej. Wszystkie zagadnienia zilustrowano szczegółowo omówionymi przykładami. Na końcu artykułu znajdują się zadania do samodzielnego rozwiązywania wraz z odpowiedziami.

Słowa kluczowe: macierz, macierz odwrotna, wyznacznik, dopełnienie algebraiczne, macierz dopełnień algebraicznych, macierz dołączona.

1. Wiadomości wstępne

W poprzednim artykule dotyczącym macierzy odwrotnych [1] szczegółowo omówiono definicję macierzy odwrotnej, jej własności oraz sposób jej wyznaczania na podstawie definicji. W niniejszym artykule zachowujemy wszystkie stosowane tam oznaczenia.

Opisywana w tej pracy metoda, wykorzystująca dopełnienia algebraiczne, sprowadza się do zastosowania jednego wzoru, który często jest przez studentów mylnie przyjmowany za definicję macierzy odwrotnej. Wspomniany wzór podano w następnym rozdziale (w twierdzeniu 1) wraz z dowodem jego poprawności.

Przypomnijmy definicję macierzy odwrotnej:

Definicja 1. Jeśli dla macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ stopnia n istnieje macierz $\mathbf{B}$, która spełnia zależność

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n, \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{I}_n$ oznacza macierz jednostkową stopnia n , to macierz $\mathbf{A}$ nazywamy **odwracalną**, a macierz $\mathbf{B}$ **macierzą odwrotną do macierzy $\mathbf{A}$** i oznaczamy jako $\mathbf{A}^{-1}$.

Zanim sformułujemy twierdzenie będące podstawą omawianej metody, podajemy definicje pojęć, które należy przyswoić, aby poprawnie stosować ten wzór.

Rozważamy macierz kwadratową stopnia n o elementach a_{ij} :

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definicja 2. Wyznacznik macierzy powstałej z macierzy $\mathbf{A}$ przez usunięcie (wykreślenie) jej i -tego wiersza i j -tej kolumny nazywamy **minorem** macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadającym elementowi a_{ij} i oznaczamy symbolem M_{ij} .

Definicja 3. **Dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy liczbę będącą wynikiem mnożenia liczby $(-1)^{i+j}$ przez minor M_{ij} odpowiadający elementowi a_{ij} . Dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} oznaczamy symbolem A_{ij} :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (2)$$

Pojęcie dopełnienia algebraicznego jest zapewne znane Czytelnikom, ponieważ pojawia się przy omawianiu wyznaczników¹, między innymi w rozwinięciu Laplace'a.

Znając macierz $\mathbf{A}$, możemy wyznaczać dopełnienia algebraiczne jej dowolnych elementów.

Przykład 1. Wyznaczyć dopełnienia algebraiczne elementów $a_{11}, a_{12}, a_{23}, a_{31}$ macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze wzoru (2), obliczamy dopełnienia algebraiczne:

¹Krótki kurs obliczania wyznaczników podaje artykuł [5]. Dokładniejsze omówienie można znaleźć w [3] lub [4].

$$\text{dla } a_{11} : A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} -|- & -- & -- \\ | & 3 & 5 \\ | & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -29,$$

$$\text{dla } a_{12} : A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} -- & -|- & -- \\ 2 & | & 5 \\ 0 & | & -3 \end{bmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\text{dla } a_{23} : A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & | \\ -- & -- & -|- \\ 0 & 4 & | \end{bmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\text{dla } a_{31} : A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} | & 2 & 0 \\ | & 3 & 5 \\ -|- & -- & -- \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10.$$

Uwaga.

Podczas obliczania dopełnienia algebraicznego elementu a_{ij} jego wartość nie ma znaczenia. We wzorze (2) element a_{ij} nie występuje.

Z dopełnień algebraicznych wszystkich elementów macierzy $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ można zbudować macierz dopełnień algebraicznych:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Nam będzie jednak potrzebna macierz powstała poprzez transponowanie tej macierzy, nazywana **macierzą dołączoną** i oznaczana jako $\mathbf{A}^D$:

$$\mathbf{A}^D = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Przykład 2. Zbudować macierz dołączoną dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ jest to ta sama macierz co w przykładzie 1, wykorzystamy wcześniej obliczone dopełnienia algebraiczne. Wystarczy wyznaczyć pozostałe:

$$\begin{aligned} A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^4(8) = 8, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^3(6) = 6, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^4(3) = 3, \\ A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^5(5) = 5, \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^6(-7) = -7. \end{aligned}$$

Macierz dołączoną otrzymamy, transponując macierz dopełnień algebraicznych:

$$\mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} -29 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 4 \\ 10 & 5 & -7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -29 & 6 & 10 \\ 6 & 3 & 4 \\ 8 & 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

2. Wyznaczanie macierzy odwrotnej ze wzoru z wykorzystaniem dopełnień algebraicznych

Jeżeli potrafimy znaleźć macierz dołączoną $\mathbf{A}^D$ macierzy kwadratowej i nieosobliwej, to poniższe twierdzenie wprowadza wzór pozwalający na wyznaczenie macierzy odwrotnej.

Twierdzenie 1. *Jeżeli $\mathbf{A}$ jest macierzą odwracalną, a $\mathbf{A}^D$ jest jej macierzą dołączoną, to:*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^D. \quad (3)$$

Dowód. Dowód przeprowadzono na podstawie książki [2].

Oznaczmy przez $\mathbf{W} = [w_{ij}]$ iloczyn macierzy $\mathbf{A}$ i jej macierzy dołączonej $\mathbf{A}^D$.

$$\mathbf{W} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Element w_{ij} tej macierzy jest wynikiem mnożenia i -tego wiersza macierzy $\mathbf{A}$ przez j -tą kolumnę macierzy $\mathbf{A}^D$:

$$w_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}.$$

Jeżeli $i = j$, to

$$w_{ii} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \det \mathbf{A}$$

ponieważ powyższa równość jest rozwinięciem Laplace'a względem i -tego wiersza².

Pokażemy, że dla $i \neq j$ zachodzi $w_{ij} = 0$. W tym celu rozpatrzmy pomocniczą macierz $\mathbf{A}'$, powstałą z macierzy $\mathbf{A}$ przez zamianę j -tego wiersza na wiersz i -ty. Otrzymana w ten sposób macierz $\mathbf{A}'$ ma dwa identyczne wiersze: i -ty oraz j -ty.

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{-ty wiersz} \\ \\ j\text{-ty wiersz} \\ \\ \end{array}$$

Z konstrukcji dopełnień algebraicznych wynika, że dopełnienia algebraiczne elementów j -tego wiersza macierzy $\mathbf{A}'$ są identyczne z dopełnieniami j -tego wiersza macierzy $\mathbf{A}$:

$$A'_{j1} = A_{j1}, \quad A'_{j2} = A_{j2}, \quad \dots, \quad A'_{jn} = A_{jn}.$$

Rozwinięcie Laplace'a względem j -tego wiersza macierzy $\mathbf{A}'$ daje:

$$\det \mathbf{A}' = a_{i1}A'_{j1} + a_{i2}A'_{j2} + \dots + a_{in}A'_{jn} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = w_{ij}.$$

Ponieważ w macierzy $\mathbf{A}'$ dwa wiersze są identyczne, to $\det \mathbf{A}' = 0$. Zatem $w_{ij} = \det \mathbf{A}' = 0$.

Podsumowując, mamy:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^D = [w_{ij}], \quad \text{gdzie} \quad w_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{dla } i \neq j, \\ \det \mathbf{A}, & \text{dla } i = j. \end{cases}$$

Otrzymujemy więc:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det \mathbf{A} \end{bmatrix} = \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}.$$

² O rozwinięciu Laplace'a można poczytać w [5], str. 146, lub [3], str. 165.

Ponieważ $\mathbf{A}$ jest odwracalna, to $\det \mathbf{A} \neq 0$, co oznacza, że istnieje macierz $\mathbf{A}^{-1}$. Mnożąc obustronnie równanie przez $\frac{1}{\det \mathbf{A}}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^D &= \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \quad | \cdot \frac{1}{\det \mathbf{A}} \\ \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^D &= \mathbf{I} \quad | \cdot \mathbf{A}^{-1} \text{ z lewej strony} \\ \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^D &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \cdot \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^D &= \mathbf{A}^{-1},\end{aligned}$$

czyli:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^D.$$

□

Uwaga.

Założenie o odwracalności macierzy $\mathbf{A}$ jest kluczowe, ponieważ gwarantuje, że $\det \mathbf{A} \neq 0$, a wzór (3) jest poprawny. Przed zastosowaniem wzoru należy zawsze sprawdzić, czy to założenie jest spełnione. Oznacza to, że obliczenia musimy rozpocząć od wyliczenia wyznacznika.

Przykład 3. Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zaczynamy od wyznacznika:

$$\det \mathbf{A} = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2.$$

Wyznacznik jest różny od zera, więc macierz jest odwracalna.

Następnym krokiem jest wyznaczenie macierzy dołączonej $\mathbf{A}^D$. Dopełnienia algebraiczne są następujące:

$$\begin{aligned}A_{11} &= (-1)^{1+1} \det [0] = 0, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \det [1] = -1, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \det [2] = -2, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \det [3] = 3.\end{aligned}$$

Macierz dołączona to transponowana macierz zbudowana z dopełnień algebraicznych:

$$\mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Podstawiając do wzoru na macierz odwrotną:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^D = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Sprawdzenie ³:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} & 3 \cdot 1 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} & 1 \cdot 1 + 0 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2.$$

Macierz odwrotna została poprawnie wyznaczona.

Przykład 4. Wyznamy macierz odwrotną do macierzy

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Macierz $\mathbf{Z}$ została zaczerpnięta z pracy [5], w której można znaleźć dokładne omówienie sposobu obliczenia jej wyznacznika. Wyznacznik ten wynosi

$$\det \mathbf{Z} = 8 \neq 0,$$

co oznacza, że macierz odwrotna istnieje.

Obliczamy dopełnienia algebraiczne:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 & Z_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 & Z_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \\ Z_{21} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7 & Z_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 & Z_{23} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \\ Z_{31} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 & Z_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 & Z_{33} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Budujemy z nich macierz dołączoną $\mathbf{Z}^D$:

$$\mathbf{Z}^D = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{21} & Z_{31} \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{32} \\ Z_{13} & Z_{23} & Z_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie, stosując wzór (1), otrzymujemy:

$$\mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy poprawność wyniku:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

³ Mając pewność, że macierz jest odwracalna wystarczy sprawdzić tylko jedną z równości $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ lub $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Odpowiedni iloczyn jest macierzą odwrotną, więc znaleźliśmy prawidłową macierz odwrotną.

Przykład 5. Znajdźmy macierz odwrotną do macierzy:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ta sama macierz pojawiła się w artykule [1] w przykładzie 6, gdzie pokazano, jak wyznaczyć macierz odwrotną do $\mathbf{B}$, wykorzystując definicję macierzy odwrotnej. Czytelnik może więc porównać obie metody.

Obliczamy wyznacznik macierzy:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Ponieważ $\det \mathbf{B} \neq 0$, macierz odwrotna istnieje.

Obliczamy dopełnienia algebraiczne, od razu budując z nich macierz:

$$\mathbf{B}^D = \begin{bmatrix} (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T.$$

Obliczamy wartości poszczególnych wyznaczników i transponujemy macierz dołączoną:

$$\mathbf{B}^D = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -3 & -5 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 6 & -5 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze wzoru (3), obliczamy $\mathbf{B}^{-1}$:

$$\mathbf{B}^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 6 & -5 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Sprawdzając wynik w pracy [1], można zauważyć, że otrzymana macierz odwrotna jest identyczna z tą uzyskaną inną metodą. Ponieważ macierz może mieć tylko jedną odwrotną, nie ma potrzeby dodatkowej weryfikacji – wynik jest poprawny.

Przykład 6. Wyznamy macierz odwrotną do macierzy:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wyznacznik macierzy:

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Ponieważ $\det \mathbf{C} \neq 0$, macierz odwrotna istnieje.

Podczas obliczania macierzy $\mathbf{C}^D$ wykorzystamy fakt, że czynnik $(-1)^{i+j}$, przez który mnożone są kolejne wyznaczniki w dopełnieniach algebraicznych, przyjmuje na zmianę wartości 1 i -1 .

$$\mathbf{C}^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T.$$

Po obliczeniu poszczególnych wyznaczników i transponowaniu macierzy dołączonej otrzymujemy:

$$\mathbf{C}^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Macierz odwrotna ma postać:

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

W celu weryfikacji wyniku wygodniej jest skorzystać z macierzy $\mathbf{C}^{-1}$ przed wymnożeniem przez $\frac{1}{2}$:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_4.$$

Przykład 7. Wyznamy macierz odwrotną do macierzy

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Aby macierz była odwracalna, jej wyznacznik musi być różny od zera.

$$\det \mathbf{D} = ad - bc,$$

więc aby istniała macierz odwrotna, musi zachodzić warunek $ad \neq bc$.

Macierz dopełnień algebraicznych ma postać:

$$\mathbf{D}^D = \begin{bmatrix} (-1)^2 \det[d] & (-1)^3 \det[c] \\ (-1)^3 \det[b] & (-1)^4 \det[a] \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T.$$

Wstawiając obliczone $\det \mathbf{D}$ oraz $\mathbf{D}^D$ do wzoru na macierz odwrotną, otrzymujemy ogólny wzór⁴ na macierz odwrotną do macierzy stopnia drugiego:

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Wyznaczanie macierzy odwrotnych dla macierzy kwadratowych stopnia drugiego jest szybkie i proste dzięki zastosowaniu wyprowadzonego wcześniej wzoru. Wystarczy podstawić odpowiednie wartości:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-5)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}.$$

3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Wyznacz macierze odwrotne do macierzy:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, & \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, & \text{c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, & \text{d) } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \\ \text{e) } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 4 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, & \text{f) } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, & \text{g) } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1-i & i \\ 2+i & -1 \end{bmatrix}, & \text{h) } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \ln 3 & \frac{1}{2} \\ \ln 9 & 2 \end{bmatrix}, a \neq 0. \end{array}$$

Zadanie 2. Wyznacz macierze odwrotne do macierzy:

⁴Ten sam wzór został wyprowadzony w pracy [1].

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}, & \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}, & \text{c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \\ \text{d) } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, & \text{e) } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, & \text{d) } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Zadanie 3. Wyznacz macierze odwrotne do macierzy:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, & \text{b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, & \text{c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}. \end{array}$$

4. Odpowiedzi

Odpowiedź 1.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{7}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, & \text{b) } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, & \text{c) } \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, & \text{d) } \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \\ \text{e) } \mathbf{E}^{-1} \text{ nie istnieje} & \text{f) } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, & \text{g) } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1-2i & 1+i \end{bmatrix}, & \text{h) } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\ln 3} & -\frac{1}{2\ln 3} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Odpowiedź 2.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}, & \text{b) } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{13}{16} & \frac{11}{48} \\ 3 & -\frac{15}{16} & -\frac{3}{16} \\ 2 & -\frac{3}{8} & -\frac{5}{24} \end{bmatrix}, & \text{c) } \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & 0 & \frac{2}{11} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{3}{11} \end{bmatrix}, \\ \text{d) } \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{6}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{bmatrix}, & \text{e) } \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{24} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, & \text{d) } \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} & -\frac{4}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{6}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{bmatrix}. \end{array}$$

Odpowiedź 3.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \det = 0, \mathbf{A}^{-1} \text{ nie istnieje}, & \text{b) } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \\ & \text{c) } \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}. \end{array}$$

Literatura

1. K. Adrianowicz, *Macierze odwrotne. Część 1 – definicje, własności, wyznaczanie macierzy odwrotnych z definicji*, MINUT 2023 (5), s. 183-194.
2. H. Anton, *Elementary Linear Algebra (Applications Version)* (9th ed.), Wiley International 2005.
3. M. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1976.
4. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.
5. K. Sawicz, *Obliczanie wyznaczników*, MINUT 2021 (3), s. 142-152.