

Artur TWARDZIK

Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki, Politechnika Śląska, ul. Akademicka 16, 44-100 Gliwice

Całka oznaczona — obliczanie pól obszarów ograniczonych przez krzywe zadane w postaci jawnej

Streszczenie. Prezentowany artykuł jest zebraniem metod obliczania pól trapezów krzywoliniowych wyznaczonych przez krzywe postaci $y = f(x)$ oraz obszarów zawartych między wykresami dwóch funkcji zadanych w postaci jawnej. Ma na celu zaprezentowanie przystępnej formy rozwiązywania charakterystycznych przykładów, po prześledzeniu których możliwa będzie samodzielna praca nad dalszymi zadaniami.

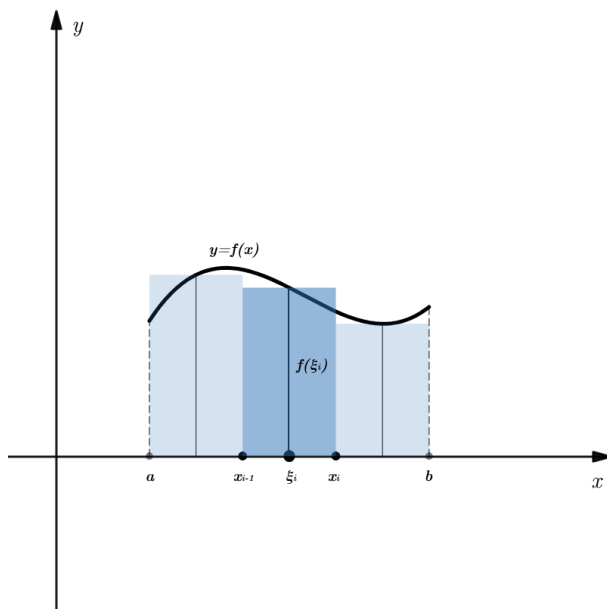
Słowa kluczowe: całka oznaczona, pole, krzywa, wzór Newtona–Leibniza, trapez krzywoliniowy.

1. Wstęp

Analiza matematyczna jest dziedziną, która kształtowała się przez tysiące lat. Już starożytni Egipcjanie i Babilończycy rozważali problemy związane z obliczaniem pól różnych figur. Rzeczywisty aparat matematyczny rozwinięty został jednak przez starożytnych Greków, a pierwszym przełomem były dokładne prace Archimedesesa. Jednym spośród problemów, które rozwiązał, jest obliczenie pola obszaru zawartego pomiędzy łukiem paraboli i jej cięciwą. W tym celu wykorzystywał on metodę wyczerpywania, którą nazwać możemy pra-całkowaniem (zob. [1]).

Przez następne stulecia (zob. [2]) matematyka odkryta przez Greków pozostawała w centrum zainteresowań uczonych. Kamieniem milowym w rozwoju analizy matematycznej było niezależne odkrycie rachunku różniczkowego i całkowego przez Isaaca Newtona oraz Gottfrieda Wilhelma Leibniza w XVII wieku. Co ciekawe, formalnie nazwę rachunku całkowego zawdzięczamy jednemu z braci Bernoullich, który wprowadził określenie *calculus integralis* w miejsce używanego wcześniej *calculus summatoris*. W następnych latach wielu wybitnych matematyków, takich jak Augustin Louis Cauchy czy Leonhard Euler, pochyliło się nad rozwojem dziedziny, choć obowiązującą dziś definicję całki oznaczonej podał dopiero w XIX wieku Bernhard Riemann.

We współczesnych podręcznikach do analizy matematycznej funkcjonuje kilka równoważnych definicji całki oznaczonej Riemanna¹. Przykładowo jedna z nich odwołuje się do istnienia skończonej granicy ciągu sum Riemanna $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ (interpretację sumy Riemanna przedstawiono na rys. 1), a inna do równości całek górnej i dolnej Riemanna, będących ograniczeniami sum całkowych (zob. [6], [7]).



Rysunek 1. Funkcja f w przedziale $[a, b]$ z zaznaczonym przedziałem $[x_{i-1}, x_i]$ oraz punktem pośrednim ξ_i

Dogłębne zrozumienie powyższych konceptów nie jest jednak konieczne do obliczania pól obszarów w układzie współrzędnych. Całkę oznaczoną z funkcji f w granicach od a do b oznaczamy $\int_a^b f(x) dx$. Aby obliczać całki oznaczone, będziemy korzystać z poniższej własności, zwanej wzorem Newtona–Leibniza.

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f , to*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w większości podręczników do analizy matematycznej (np. [5], s. 250). Różnicę $F(b) - F(a)$ oznaczamy zapisem $[F(x)]_a^b$ lub $F(x)|_a^b$ i czytamy: wartość funkcji F w granicach od a do b .

Uwaga 1. Ciągłość jest warunkiem wystarczającym dla całkowalności. Nie jest jednak warunkiem koniecznym — istnieją funkcje nieciągłe i całkowalne. W tym artykule zajmiemy się wyłącznie funkcjami ciągłymi.

¹ Istnieją również inne całki będące uogólnieniami całki Riemanna. Najpopularniejszymi są całka Riemanna–Stieltjesa oraz całka Lebesgue'a (zob. [7]).

2. Obliczanie pola trapezu krzywoliniowego

Całka oznaczona jest używana do obliczania pól obszarów w kartezjańskim układzie współrzędnych. Przy obliczaniu pól figur geometrycznych nie może dojść do sytuacji, w której otrzymujemy ujemne pole. Zauważmy, że krzywa $y = f(x)$ może znajdować się również pod osią OX . Z tego powodu sama całka Riemanna może być ujemna.

W tym artykule obszar w układzie współrzędnych oznaczany będzie przez A , a jego pole przez $P(A)$.

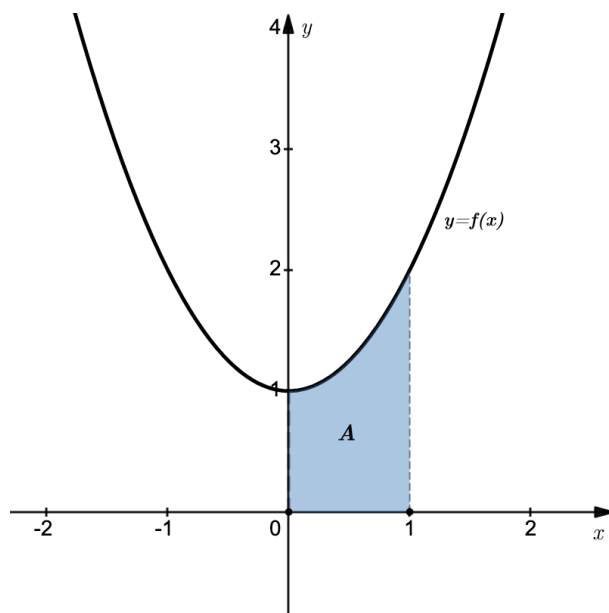
Twierdzenie 2. Pole obszaru A ograniczonego przez krzywą $y = f(x)$, proste $x = a$, $x = b$ oraz oś OX w przypadku ogólnym opisane jest wzorem

$$P(A) = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Obszar ten nazywamy trapezem krzywoliniowym.

Przykład 1. Policzmy pole obszaru ograniczonego przez krzywą $y = x^2 + 1$, proste $x = 0$, $x = 1$ oraz oś OX .

Zacznijmy od narysowania wykresu funkcji i zaznaczenia obszaru (rys. 2).



Rysunek 2. Obszar A ograniczony wykresem funkcji $f(x) = x^2 + 1$, osią OX oraz prostymi $x = 0$ i $x = 1$

Pole tego obszaru to

$$P(A) = \int_0^1 |x^2 + 1| dx.$$

Ponieważ krzywa $y = x^2 + 1$ leży nad osią OX , możemy pominąć moduł i obliczyć całkę oznaczoną ze wzoru Newtona–Leibniza. Aby to zrobić, musimy znaleźć funkcję pierwotną. Jest nią każda funkcja

postaci $F(x) = \frac{x^3}{3} + x + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$, bo

$$\int x^2 + 1 \, dx = \frac{x^3}{3} + x + C.$$

Pozostaje podstawić do wzoru:

$$A = \int_0^1 x^2 + 1 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x + C \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 + C - \left(\frac{0}{3} + 0 + C \right) = \frac{4}{3}.$$

Odp. Pole tego obszaru jest równe $\frac{4}{3}$.

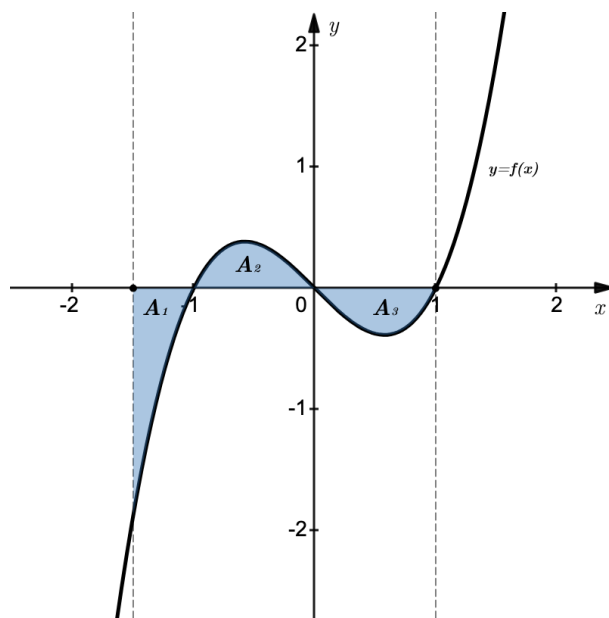
Uwaga 2. Zauważmy, że stałe całkowania pochodzące od całek nieoznaczonych zawsze się redukują, zatem możemy je w przyszłości pominąć. Z tego samego powodu w twierdzeniu 1 funkcja F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f .

Przykład 2. Obliczmy pole obszaru ograniczonego przez krzywą $y = x^3 - x$, oś OX oraz proste $x = -\frac{3}{2}$ i $x = 1$.

W takiej postaci nie widać od razu, czy krzywa znajduje się nad czy pod osią OX . Niech $f(x) = x^3 - x$. Podejrzewamy, że w zadanym przedziale funkcja f może przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne. Musimy zatem określić przedziały, w których funkcja f ma stały znak. Zaczynamy od znalezienia miejsc zerowych funkcji f :

$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}.$$

Funkcja f jest ciągła, więc w przedziałach $(-1, 0)$ i $(1, \infty)$ przyjmuje ona wartości dodatnie, natomiast w przedziałach $(-\infty, -1)$ i $(0, 1)$ przyjmuje wartości ujemne.



Rysunek 3. Obszary ograniczone wykresem funkcji $f(x) = x^3 - x$ i osią OX

Z tego powodu nie możemy bezpośrednio stwierdzić, jakie pole będzie miał zadany obszar. Zapomnijmy na chwilę o wzorze i policzmy osobno trzy całki oznaczone związane z obszarami A_1 , A_2 i A_3 :

$$I_1 = \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} x^3 - x \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-\frac{3}{2}}^{-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \left(\frac{81}{64} - \frac{9}{8} \right) = -\frac{1}{4} - \frac{9}{8} \left(\frac{9}{8} - 1 \right) = -\frac{8}{64} - \frac{9}{64} = -\frac{25}{64},$$

$$I_2 = \int_{-1}^0 x^3 - x \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = 0 - 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4},$$

$$I_3 = \int_0^1 x^3 - x \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - (0 - 0) = -\frac{1}{4}.$$

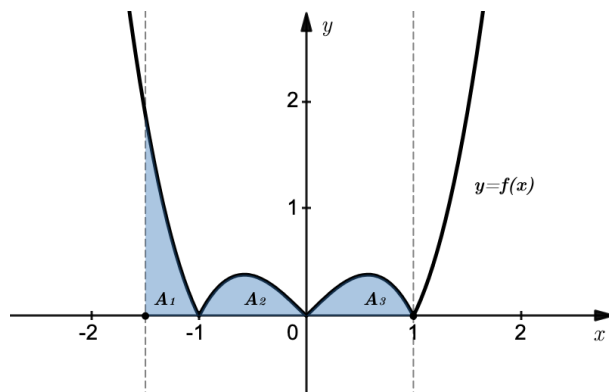
Całki oznaczone opisujące obszary A_1 oraz A_3 mają ujemny znak. Jest to spowodowane tym, że rozpatrywana krzywa leży pod osią OX . Gdybyśmy chcieli teraz posumować wszystkie wyliczone całki, to otrzymalibyśmy $-\frac{25}{64}$. Oczywiście żadna figura geometryczna nie może mieć ujemnego pola. Aby policzyć pole, musimy uwzględnić moduły. Zatem pole całego obszaru A , składającego się z obszarów A_1 , A_2 oraz A_3 to:

$$P(A) = |I_1| + |I_2| + |I_3| \stackrel{df.}{=} -I_1 + I_2 - I_3 = \frac{57}{64}.$$

Pamiętaj!

Całka oznaczona może być ujemna, podczas gdy pole figury geometrycznej nie.

Gdyby odbić symetrycznie względem osi OX część wykresu funkcji f leżącą pod tą osią, odległości pomiędzy wartościami funkcji a osią nie zmienią się. Powinniśmy więc otrzymać to samo pole.



Rysunek 4. Obszary ograniczone wykresem funkcji $f(x) = |x^3 - x|$ i osią OX

Z definicji wartości bezwzględnej mamy

$$|x^3 - x| = \begin{cases} x^3 - x & \text{dla } x \in [-1, 0] \cup [1, \infty) \\ -x^3 + x & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1). \end{cases}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
 P(A_1) &= \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} |x^3 - x| dx \stackrel{df.}{=} \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} -x^3 + x dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_{-\frac{3}{2}}^{-1} = \frac{25}{64}, \\
 P(A_2) &= \int_{-1}^0 |x^3 - x| dx \stackrel{df.}{=} \int_{-1}^0 x^3 - x dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{4}, \\
 P(A_3) &= \int_0^1 |x^3 - x| dx \stackrel{df.}{=} \int_0^1 -x^3 + x dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Stąd pole całego obszaru to

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{57}{64}.$$

W obu przypadkach otrzymaliśmy ten sam wynik.

Odp. Pole tego obszaru jest równe $\frac{57}{64}$.

Wniosek 1. Na przykładzie pokazaliśmy, dlaczego w twierdzeniu 2 znajduje się wartość bezwzględna w funkcji podcałkowej. Intuicyjnie korzystaliśmy również z własności addytywności całki względem przedziału całkowania:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Wniosek 2. Aby obliczyć powyższą całkę, moglibyśmy od razu napisać, że

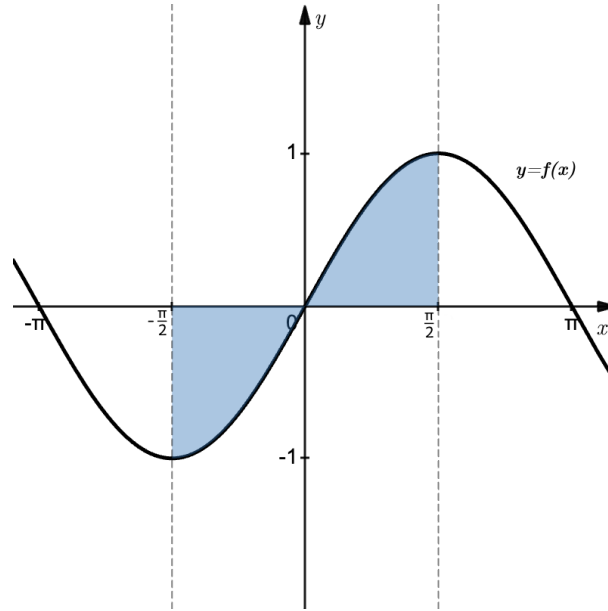
$$P(A) = \int_{-\frac{3}{2}}^1 |x^3 - x| dx = \underbrace{- \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} x^3 - x dx}_{P(A_1)} + \underbrace{\int_{-1}^0 x^3 - x dx}_{P(A_2)} + \underbrace{\left(- \int_0^1 x^3 - x dx \right)}_{P(A_3)}$$

oraz obliczyć elementarne całki.

Podsumowując, aby obliczyć pole obszaru zawartego pomiędzy krzywą a osią OX , należy uwzględnić znak funkcji opisującej tę krzywą w zadanym przedziale. Możemy podzielić daną figurę na mniejsze obszary i liczyć osobno ich pola, pamiętając o znaku, albo skorzystać ze wzoru i definicji wartości bezwzględnej. Okazuje się, że to drugie podejście jest wygodniejsze, ponieważ wystarczy zapamiętać jeden wzór.

Przykład 3. Obliczmy pole obszaru ograniczonego przez krzywą $y = \sin x$, oś OX oraz proste $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$.

Wiemy, że funkcja sinus przyjmuje wartości niedodatnie w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ oraz nieujemne w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$.



Rysunek 5. Obszary ograniczone wykresem funkcji $f(x) = \sin x$ i osią OX

Korzystamy ze wzoru i zapisujemy:

$$P(A) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 -\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

Przed całką oznaczoną, podobnie jak dla całki nieoznaczonej, możemy wyłączyć stałą:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 -\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \\ &= -[-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -[-1 - 0] + [-1 - 0] = 2. \end{aligned}$$

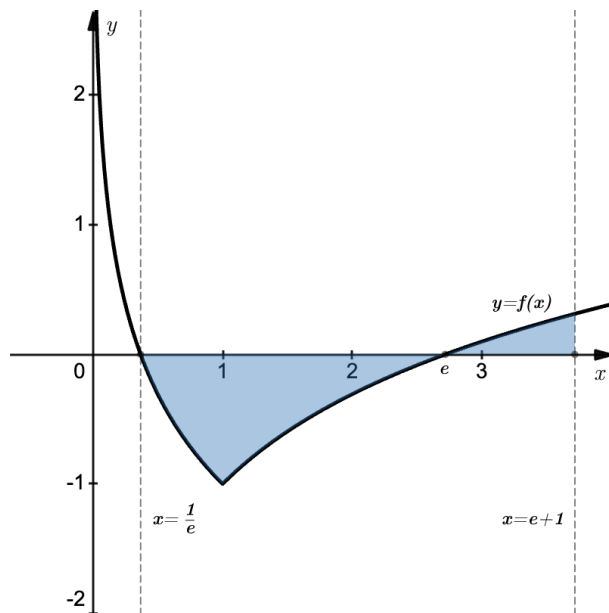
Odp. Pole tego obszaru jest równe 2.

Uwaga 3. W tym przykładzie mogliśmy również skorzystać z nieparzystości funkcji sinus. Ponieważ $\sin(-x) = -\sin(x)$, a w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ funkcja sinus przyjmuje wartości dodatnie, mamy:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2[0 - (-1)] = 2.$$

Przykład 4. Obliczmy pole obszaru ograniczonego przez krzywą $y = |\ln x| - 1$, oś OX oraz proste $x = \frac{1}{e}$ i $x = e + 1$.

Zaczynamy od wykonania rysunku poglądowego. Część wykresu funkcji $f(x) = \ln x$, która leży pod osią OX , odbijamy symetrycznie względem osi OX , a następnie cały wykres przesuwamy o jedną jednostkę w dół (rys. 6).



Rysunek 6. Trapez krzywoliniowy z przykładu 4

Korzystając ze wzoru, zapisujemy:

$$P(A) = \int_{\frac{1}{e}}^{e+1} ||\ln x| - 1| dx.$$

Podobnie jak w poprzednich zadaniach, aby obliczyć powyższą całkę, należy poprawnie opuścić moduł. Określmy, w jakich przedziałach funkcja pod zewnętrzną wartością bezwzględną jest nieujemna:

$$|\ln x| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |\ln x| \geq 1 \Leftrightarrow (\ln x \geq 1 \vee \ln x \leq -1) \Leftrightarrow (x \geq e \vee x \leq e^{-1}).$$

Funkcja pod zewnętrzną wartością bezwzględną przyjmuje wartości nieujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (0, \frac{1}{e}] \cup [e, \infty)$. Możemy więc zapisać, że

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e+1} ||\ln x| - 1| dx = - \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| - 1 dx + \int_e^{e+1} |\ln x| - 1 dx.$$

Podobnie jak dla całek nieoznaczonych, całka sumy jest równa sumie całek², więc

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e+1} ||\ln x| - 1| dx = - \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx + \int_{\frac{1}{e}}^e 1 dx + \int_e^{e+1} |\ln x| dx - \int_e^{e+1} 1 dx.$$

Ponownie skorzystamy z definicji wartości bezwzględnej, tym razem dla funkcji $g(x) = |\ln x|$. Zauważmy, że $|\ln x| = -\ln x \Leftrightarrow x \in (0, 1)$, więc w pierwszym przedziale całkowania funkcja przyjmuje wartości

²Własność ta nazywana jest addytywnością całki względem funkcji podcałkowej. Więcej własności można znaleźć na stronie 140 w [6].

różnych znaków. Z tego powodu zapisujemy pierwszą całkę jako sumę dwóch całek:

$$-\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx - \int_1^e \ln x dx.$$

Pole interesującego nas obszaru zapisujemy ostatecznie jako sumę całek elementarnych, które możemy łatwo policzyć:

$$P(A) = \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx - \int_1^e \ln x dx + \int_{\frac{1}{e}}^e 1 dx + \int_e^{e+1} \ln x dx - \int_e^{e+1} 1 dx.$$

Aby wyznaczyć całkę³ z $\ln x$, będziemy całkować przez części:

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln x & v'(x) = 1 \\ u'(x) = \frac{1}{x} & v(x) = x \end{array} \right| = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Wyznaczamy całki będące składnikami całkowitego pola obszaru:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_{\frac{1}{e}}^1 = -1 - \left(\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - \frac{1}{e} \right) = -1 - \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} + \frac{1}{e}, \\ I_2 &= \int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e = e - e - (-1) = 1, \\ I_3 &= \int_{\frac{1}{e}}^e 1 dx = [x]_{\frac{1}{e}}^e = e - \frac{1}{e}, \\ I_4 &= \int_e^{e+1} \ln x dx = [x \ln x - x]_e^{e+1} = (e+1) \ln(e+1) - (e+1) - (e - e) = \\ &= (e+1)[\ln(e+1) - 1], \\ I_5 &= \int_e^{e+1} 1 dx = [x]_e^{e+1} = e+1 - e = 1. \end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$\begin{aligned} P(A) &= I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = \\ &= -1 - \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} + \frac{1}{e} - 1 + e - \frac{1}{e} + (e+1)[\ln(e+1) - 1] - 1 = -3 + \frac{1}{e} + e + (e+1)[\ln(e+1) - 1]. \end{aligned}$$

Gdy otrzymujemy taki wynik, warto sprawdzić, czy na pewno otrzymaliśmy dodatnie pole. Warto zapamiętać przybliżenie (z niedomiarem) $\frac{1}{e} \approx 0,36$. W naszym wyniku $-3 + \frac{1}{e} + e > 0$ i $\ln(e+1) > 1$,

³ Alternatywnie, zamiast najpierw liczyć całkę nieoznaczoną, możemy bezpośrednio całkować przez części, korzystając z następującego twierdzenia: jeżeli u, v są funkcjami zmiennej x oraz ich pochodne są ciągłe w $[a, b]$, to $\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx$. W tym przykładzie mamy trzy całki z tej samej funkcji w różnych granicach, więc szybciej będzie, jeśli najpierw znajdziemy całkę nieoznaczoną.

zatem całe wyrażenie jest większe od zera. Warto pamiętać, że przy obliczaniu całek oznaczonych opisujących rzeczywiste zjawiska rzadko otrzymamy „ładny” wynik.

Odp. Pole tego obszaru jest równe: $-3 + \frac{1}{e} + e + (e + 1)[\ln(e + 1) - 1]$.

Przykład 5. Obliczmy pole obszaru ograniczonego przez krzywą $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, oś OX oraz proste $x = \sqrt{2}$ i $x = \sqrt{17}$.

W tym przykładzie narysowanie wykresu może być trudne. Wiemy jednak, że funkcja zadana wzorem $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ w przedziale $[\sqrt{2}, \sqrt{17}]$ jest ciągła i przyjmuje wartości dodatnie. Możemy zatem podstawić bezpośrednio do wzoru:

$$P(A) = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Podobnie jak dla całek nieoznaczonych, gdy liczymy całki oznaczone, możemy całkować przez podstawienie. Musimy jednak pamiętać o zmianie granic całkowania — gdy zamieniamy zmienną x na t , to granice również musimy przetransformować, dzięki czemu nie będziemy musieli wracać do podstawienia:

$$P(A) = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \left| \begin{array}{c} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x dx \\ x \mid \sqrt{2} \mid \sqrt{17} \\ t \mid 1 \mid 16 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_1^{16} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} [2\sqrt{t}]_1^{16} = [\sqrt{t}]_1^{16} = 4 - 1 = 3.$$

Odp. Pole tego obszaru jest równe 3.

Uwaga 4. Oczywiście można najpierw policzyć całkę nieoznaczoną, a następnie skorzystać ze wzoru Newtona–Leibniza, stosując jednak powyższe podejście oszczędzamy czas.

3. Pole obszaru zawartego między krzywymi

W poprzednim rozdziale rozważaliśmy pola trapezów krzywoliniowych. Możemy zadać sobie pytanie: co jeśli interesujące nas pole pewnego obszaru zawarte jest pomiędzy dwiema krzywymi?

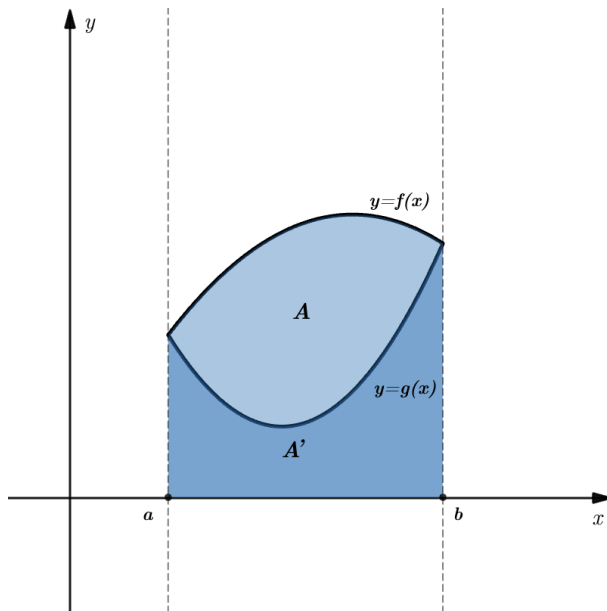
Klasyycznym spojrzeniem na rozwiązanie powyższego problemu ([5], s. 254) jest obliczenie pola obszaru $A \cup A'$ ograniczonego przez górną krzywą oraz oś OX i odjęcie od niego pola obszaru A' ograniczonego przez dolną krzywą (zob. rys. 7). Wtedy pole obszaru A opisać możemy następująco:

$$P(A) = P(A \cup A') - P(A') = \int_a^b |f(x)| dx - \int_a^b |g(x)| dx.$$

Jeżeli wykresy funkcji f oraz g są takie jak na rys. 7 (tzn. $f(x) \geq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$), to pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$ jest równe

$$P(A) = \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

Może się jednak zdarzyć tak, że krzywe $y = f(x)$ i $y = g(x)$ przecinają się będą w pewnym miejscu, więc nie będzie można natychmiastowo określić, która funkcja jest „górną”, a która „dolną”.



Rysunek 7. Obszar A zawarty pomiędzy krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$

Twierdzenie 3. Pole obszaru zawartego pomiędzy krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$ oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ w przypadku ogólnym opisane jest wzorem

$$P(A) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Uwaga 5. Zauważmy, że w układzie współrzędnych odległość pomiędzy dwoma dowolnymi punktami a i b o tej samej odciętej wynosi $|a - b|$. Własność tę zastosować możemy również do odległości między punktami należącymi do wykresów dwóch funkcji f oraz g . Niech h będzie funkcją opisującą taką odległość dla funkcji f i g :

$$h(x) = |f(x) - g(x)|.$$

Zwróćmy uwagę, że opisanie pola obszaru pomiędzy wykresami funkcjami f i g ogranicza się do policzenia całki z funkcji h na danym przedziale z wykorzystaniem wzoru z poprzedniego rozdziału

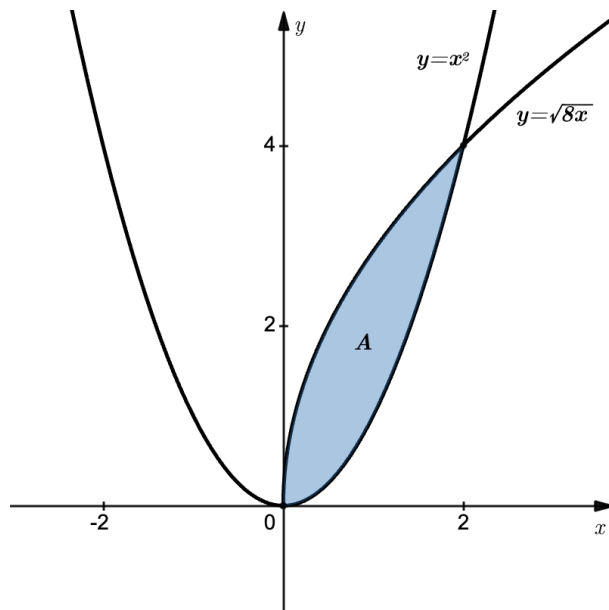
$$P(A) = \int_a^b h(x) dx.$$

Przykład 6. W tym przykładzie policzymy pole obszaru ograniczonego przez krzywe $y = x^2$ oraz $y = \sqrt{8x}$ (rys. 8).

W treści zadania nie jest wprost podany przedział całkowania. To oznacza, że podane krzywe przecinają się w pewnych punktach, które musimy znaleźć. Aby wyznaczyć punkty przecięcia, wystarczy rozwiązać układ równań. Nas jednak interesują wyłącznie ich **odcięte**, więc rozwiązujemy równanie:

$$x^2 = \sqrt{8x} \Leftrightarrow x^4 = 8x \Leftrightarrow x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 2\}.$$

Stąd otrzymujemy, że krzywe przecinają się w punktach o odciętych 0 i 2.

Rysunek 8. Obszar zawarty pomiędzy krzywymi $y = x^2$ i $y = \sqrt{8x}$

Aby obliczyć pole obszaru A , podstawiamy dane do wzoru:

$$P(A) = \int_0^2 |\sqrt{8x} - x^2| dx.$$

Z definicji wartości bezwzględnej mamy:

$$|\sqrt{8x} - x^2| = \begin{cases} \sqrt{8x} - x^2 & \text{dla } x \in [0, 2] \\ -\sqrt{8x} + x^2 & \text{dla } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

Nasz przedział całkowania pokrywa się z przedziałem dodatniego znaku funkcji pod wartością bezwzględną, więc możemy pominąć moduł:

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_0^2 |\sqrt{8x} - x^2| dx = \int_0^2 \sqrt{8x} - x^2 dx = \left[\sqrt{8} \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \\ &= \sqrt{8} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Odp. Pole tego obszaru jest równe $\frac{8}{3}$.

Uwaga 6. Czytelnik mógłby zadać sobie pytanie, czy istotne jest, która funkcja jest „górną”, a która „dolną”. Ostatecznie brany jest pod uwagę moduł z różnicy tych funkcji, który w obu konfiguracjach odjemna–odjemnik jest taki sam. Zwróćmy jednak uwagę, że gdy od „mniejszej” funkcji odejmiemy „większą”, to funkcja pod wartością bezwzględną będzie ujemna w przedziale, więc dodatkowo konieczne będzie poprawne opuszczenie modułu. Gdybyśmy w powyższym przykładzie zamienili miejscami funkcje pod

wartością bezwzględną, to otrzymalibyśmy:

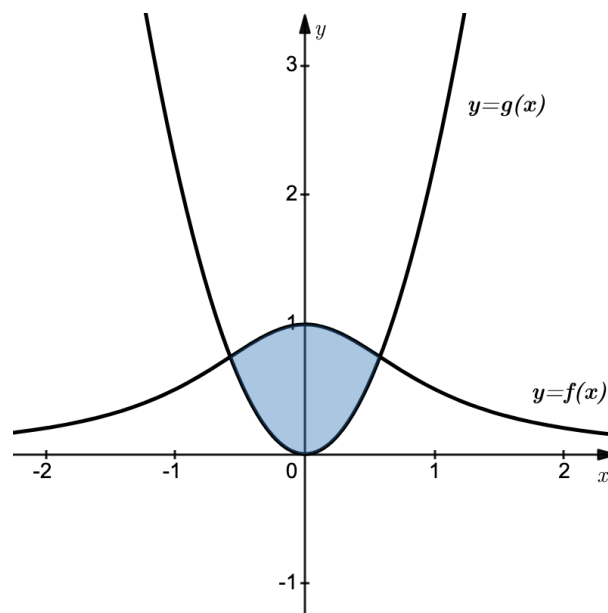
$$\int_0^2 |x^2 - \sqrt{8x}| dx \stackrel{df.}{=} \int_0^2 -x^2 + \sqrt{8x} dx,$$

czyli taką samą funkcję podcałkową.

Pamiętaj!

Poprawne określenie położenia funkcji względem siebie oszczędza nam późniejszych operacji na modułach. Najłatwiej jest przyjąć konwencję „górną funkcją minus dolną funkcją”.

Przykład 7. Obliczmy pole obszaru zawartego pomiędzy krzywą $y = \frac{1}{1+x^2}$ (zwaną *wersjerą* lub *lokiem Agnesi*) oraz parabolą $y = \frac{9}{4}x^2$ (rys. 9).



Rysunek 9. Obszar zawarty pomiędzy wykresami funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ i $g(x) = \frac{9}{4}x^2$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, na początku musimy wyznaczyć granice całki oznaczonej, czyli znaleźć odcięte punktów przecięcia krzywych. Aby to zrobić, rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{9}{4}x^2 \Leftrightarrow 9x^2(1+x^2) = 4 \Leftrightarrow 9x^4 + 9x^2 - 4 = 0.$$

Podstawiając $t = x^2$, sprowadzamy powyższe równanie do równania kwadratowego:

$$9t^2 + 9t - 4 = 0,$$

z którego otrzymujemy rozwiązania $t_1 = -\frac{4}{3}$ i $t_2 = \frac{1}{3}$. Z założenia zmienna t jest kwadratem pewnej liczby rzeczywistej, więc odrzucamy t_1 . Z t_2 ostatecznie otrzymujemy odcięte punktów przecięcia krzywych: $\frac{\sqrt{3}}{3}$ oraz $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Podstawiając dane do wzoru i pamiętając o przyjęciu konwencji „górną funkcją minus dolną funkcją”, otrzymujemy:

$$P(A) = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{9}{4}x^2 \right| dx = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+x^2} - \frac{9}{4}x^2 dx.$$

Zauważmy, że obszar, którego pola szukamy, jest symetryczny względem osi OY , więc możemy zapisać:

$$P(A) = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+x^2} - \frac{9}{4}x^2 dx.$$

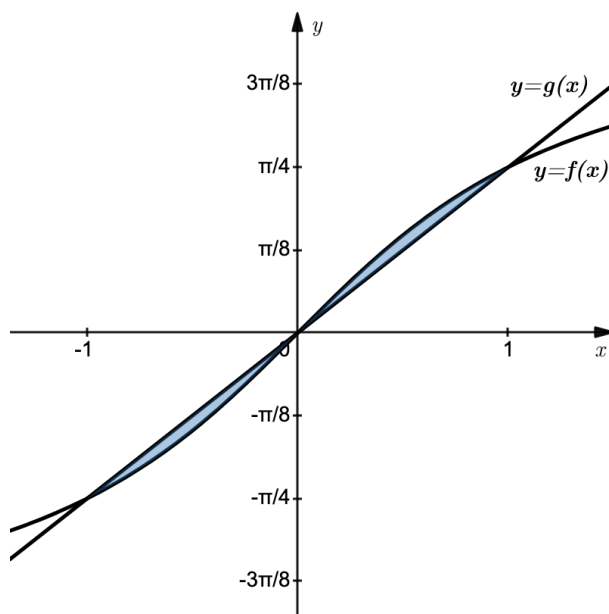
Zatem

$$P(A) = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+x^2} - \frac{9}{4}x^2 dx = 2 \left[\arctan x - \frac{9}{12}x^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 \left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{12} \right] = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Odp. Pole tego obszaru jest równe $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Przykład 8. Obliczmy pole obszaru ograniczonego przez krzywe $y = \arctan x$ i $y = \frac{\pi}{4}x$ (rys. 10).

Wiemy, że $\tan \frac{\pi}{4} = 1$. Na tej podstawie daje się łatwo zauważyć, że zadane krzywe przecinają się w punktach o odciętych $-1, 0, 1$.



Rysunek 10. Obszar zawarty pomiędzy wykresami funkcji $f(x) = \arctan x$ i $g(x) = \frac{\pi}{4}x$

Zauważmy, że obszary przedstawione na wykresie są symetryczne względem punktu $(0, 0)$. Dzięki temu możemy zapisać:

$$P(A) = \int_{-1}^1 \left| \arctan x - \frac{\pi}{4}x \right| dx = 2 \int_0^1 \arctan x - \frac{\pi}{4}x dx = 2 \left(\int_0^1 \arctan x dx - \int_0^1 \frac{\pi}{4}x dx \right).$$

Policzmy pierwszą całkę. Całkując przez części, otrzymujemy⁴:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u(x) = \arctan x \quad v'(x) = 1 \\ u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad v(x) = x \end{array} \right| = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \\ &= 1 \cdot \arctan 1 - 0 - \left[\frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Obliczamy drugą całkę:

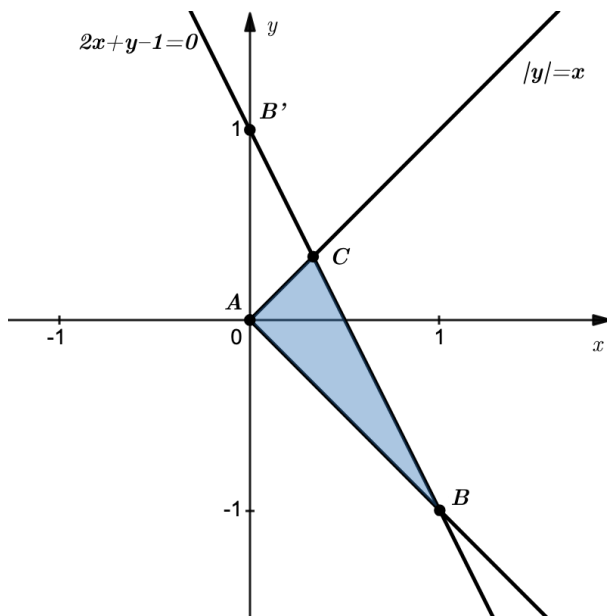
$$\int_0^1 \frac{\pi}{4} x \, dx = \left[\frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

Zatem

$$P(A) = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{4} - \ln 2.$$

Odp. Pole tego obszaru jest równe $\frac{\pi}{4} - \ln 2$.

Przykład 9. Obliczmy pole obszaru ograniczonego przez $|y| = x$ i $2x + y - 1 = 0$ (rys. 11)⁵.



Rysunek 11. Obszar zawarty pomiędzy $|y| = x$ i $2x + y - 1 = 0$

W tym przykładzie łatwiejsze będzie skorzystanie z podstawienia $x = f(y)$. Oznacza to, że będziemy całkować po zmiennej y . Przekształcając prostą do postaci kierunkowej, otrzymujemy

$$x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}.$$

⁴ Można też najpierw znaleźć całkę nieoznaczoną i potem zastosować wzór Newtona-Leibniza. W tym zadaniu mamy tylko jedną taką całkę, więc oszczędzamy czas, stosując od razu wzór na całkowanie przez części dla całki oznaczonej.

⁵ Oczywiście możemy policzyć pole tego obszaru bez wykorzystania całek, jednak to całki oznaczone są przedmiotem tego artykułu.

Wyliczmy teraz **rzędne** punktów przecięcia krzywych. Musimy rozwiązać równanie

$$|y| = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}.$$

Po lewej stronie mamy liczbę nieujemną, więc liczba po prawej stronie też jest nieujemna, tzn. $y \leq 1$. Przy tym założeniu mamy

$$\begin{aligned} y = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} & \vee y = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} & \vee y = -1. \end{aligned}$$

Teraz wystarczy, że podstawimy dane do wzoru, pamiętając, że dx w całce zmienia się na dy :

$$P(A) = \int_{-1}^{\frac{1}{3}} \left| -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - |y| \right| dy.$$

W zadanym przedziale funkcja pod zewnętrzną wartością bezwzględną przyjmuje wartości dodatnie, więc

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_{-1}^{\frac{1}{3}} -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - |y| dy = \int_{-1}^{\frac{1}{3}} -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} dy - \int_{-1}^{\frac{1}{3}} |y| dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{\frac{1}{3}} -y + 1 dy - \int_{-1}^0 -y dy - \int_0^{\frac{1}{3}} y dy = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^2}{2} + y \right]_{-1}^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{18} + \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \right] - \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Odp. Pole tego obszaru jest równe $\frac{1}{3}$.

Uwaga 7. W podobnych zadaniach całkowanie po zmiennej x oczywiście w dalszym ciągu jest możliwe, jednak zazwyczaj prowadzi to do dłuższych obliczeń i konieczności dzielenia obszaru na mniejsze części. Przykładowo, w powyższym zadaniu moglibyśmy obliczyć pole trójkąta ABB' i odjąć od niego pole trójkąta $AB'C$. Wtedy otrzymalibyśmy następujący opis pola:

$$P(A) = \int_0^1 |-2x + 1 + x| dx - \int_0^{\frac{1}{3}} |-2x + 1 - x| dx = \frac{1}{3}.$$

Wniosek 3. Czasami całkowanie po zmiennej y ułatwia obliczenia. Takie sytuacje zdarzają się, gdy we wzorze zmienna y zadana jest w jakiejś potęgze lub gdy zadany jest jej moduł.

Przykład 10. Obliczmy pole obszaru zawartego pomiędzy krzywymi $y = e^{2x}$ i $y = x^2 e^{2x}$.

Zacznijmy od ustalenia, gdzie znajdują się odcięte punktów przecięcia krzywych:

$$e^{2x} = x^2 e^{2x} \Leftrightarrow e^{2x} - x^2 e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} (1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1).$$

Aby podstawić do wzoru, musimy określić, która funkcja jest „górną” oraz która jest „dolną”. W poprzednich przykładach mogliśmy w łatwy sposób narysować wykresy zadanych krzywych. W tym przypadku narysowanie krzywej $y = x^2 e^{2x}$ może nie być najłatwiejszym zadaniem. Wiemy jednak, że krzywe przecinają się tylko w dwóch punktach, których odcięte to $x = 1$ oraz $x = -1$. Przyjmijmy, że $f(x) = e^{2x}$ oraz $g(x) = x^2 e^{2x}$. Ponieważ funkcje f i g są ciągłe, wystarczy, że porównamy wartości obu funkcji dla dowolnego argumentu z przedziału $(-1, 1)$, dzięki czemu dowiemy się, która krzywa leży wyżej w przedziale całkowania. Mamy:

$$f(0) = e^0 = 1 \quad \text{i} \quad g(0) = 0^2 e^0 = 0.$$

Stwierdzamy, że krzywa $y = e^{2x}$ leży nad krzywą $y = x^2 e^{2x}$.

Mamy już wszystkie dane, więc możemy wstawić je do wzoru (od razu pomijamy moduł, bo wiemy, która funkcja jest „górną”):

$$P(A) = \int_{-1}^1 e^{2x} - x^2 e^{2x} dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) e^{2x} dx.$$

Aby obliczyć tę całkę, dwukrotnie całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - x^2) e^{2x} dx &= \left| \begin{array}{l} u(x) = 1 - x^2 \quad v'(x) = e^{2x} \\ u'(x) = -2x \quad v(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \left[\frac{1}{2} (1 - x^2) e^{2x} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -2x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx = \\ &= 0 - 0 + \int_{-1}^1 x e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} u(x) = x \quad v'(x) = e^{2x} \\ u'(x) = 1 \quad v(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \left[\frac{1}{2} x e^{2x} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^{2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \left(-\frac{1}{2} e^{-2} \right) - \left[\frac{1}{4} e^{2x} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e^{-2} - \left(\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} e^{-2} \right) = \frac{1}{4} (e^2 + 3e^{-2}) = \frac{1}{4} \left(e^2 + \frac{3}{e^2} \right). \end{aligned}$$

Odp. Pole tego obszaru jest równe $\frac{1}{4} \left(e^2 + \frac{3}{e^2} \right)$.

4. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Obliczyć pola obszarów ograniczonych przez:

- krzywą $y = -x^2 + x\sqrt{2x}$ oraz oś OX ,
- krzywą $y = \frac{1}{x} \sin \ln x$, proste $x = 1$, $x = e^\pi$ oraz oś OX ,
- krzywą $y = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$, proste $x = 0$, $x = 3$ oraz oś OX ,
- krzywą $y = -\ln(2 - x)$, proste $x = 0$, $x = 1$ i $y = -\ln 2$,
- krzywą $y = e^{\arcsin x}$, proste $x = 0$, $x = 1$ oraz oś OX .

Zadanie 2. Obliczyć pola obszarów ograniczonych przez:

a) $y = \cos 2x$, $y = -\sin^2 x$, $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$,

b) $y^2 = -x + 1$ i $y^2 = 2x - 1$,

c) $y = |\ln x|$ i $y = -|\ln x| + 2$,

d) $y = 2x^3 - 2x$ i $y = \frac{5}{2}x$,

e) $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$ i oś OY .

Podobne zadania można znaleźć w [3], [4], [6].

Odpowiedź 1.

a) $\frac{8}{15}$, b) 2, c) $\frac{49}{30}$, d) $1 - \ln 2$, e) $\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$.

Odpowiedź 2.

a) $\frac{\pi}{2}$, b) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, c) $2(e + \frac{1}{e} - 2)$, d) $\frac{81}{16}$, e) $2 - \sqrt{2}$.

Podziękowania

Autor pragnie podziękować recenzentom za trud włożony w recenzje oraz wszystkim inspirującym nauczycielom matematyki, których poznał na swojej drodze.

Literatura

1. C. Bagiński, *O Archimedesie i jego niektórych odkryciach*, MINUT 2021 (3), s. 74–86.
2. W. Koepf *Geschichte der Analysis*, Universität Kassel 2007/2008,
<https://www.mathematik.uni-kassel.de/%7ekoepf/geschichte-ana.pdf> (widziano 2.05.2024 r.).
3. W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. I*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2019, s. 371–380.
4. E. Łobos, J. Macura, B. Sikora, *Calculus and linear algebra in exercises. Part 1*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2020, pp. 110–113.
5. E. Łobos, B. Sikora, *A first course in calculus*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2007, pp. 236–254.
6. C. Obczyński, R. Kowalczyk, K. Niedziałomski, *Całki Metody rozwiązywania zadań*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012, s. 134–158 i 170–189.
7. W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998, s. 103–104.