MINUT 2024 (6), s. 1–13
ISSN 2719-3063

Ewa ŁOBOS

Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska w Gliwicach

Wyznaczanie dziedziny funkcji dwóch zmiennych

Streszczenie. W artykule przedstawiono przykłady wyznaczania dziedziny funkcji rzeczywistych dwóch zmiennych rzeczywistych. Prezentowane zadania pochodzą z archiwalnych kolokwiów z analizy matematycznej.

Słowa kluczowe: dziedzina, funkcja dwóch zmiennych.

1. Wstęp

Analizę każdej funkcji zaczynamy od wyznaczenia jej dziedziny. Jedna z przyczyn takiego podejścia jest prozaiczna — oszczędność czasu i sił. Jeśli np. jakaś funkcja ma nieskończenie wiele argumentów i chcemy zbadać jakąś jej własność, to z reguły odwołujemy się do twierdzeń dotyczących interesującej nas własności. Gdyby jednak funkcja miała zaledwie kilka argumentów, to moglibyśmy ją przedstawić w postaci tabelki lub grafu (czasem da się narysować wykres) i stąd odczytać wszystkie jej własności, nawet nie znając żadnych twierdzeń.

Zasady wyznaczania dziedziny funkcji jednej zmiennej omówiono w pracy [2], w której Czytelnik znajdzie również ciekawe przykłady rozwiązane krok po kroku, z precyzyjnymi opisami i uzasadnieniami. W tym artykule zajmiemy się funkcjami rzeczywistymi dwóch zmiennych rzeczywistych, przy czym skupimy się na funkcjach elementarnych, które można zdefiniować za pomocą powszechnie stosowanych oznaczeń. Przy wyznaczaniu dziedziny takiej funkcji, podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej, należy zwrócić uwagę na:

- ułamki — każdy mianownik musi być różny od zera;
- pierwiastki stopnia parzystego — liczba pierwiastkowana musi być **nieujemna** (pierwiastki stopni nieparzystych są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych, także ujemnych);
- logarytmy — liczba logarytmowana musi być dodatnia, natomiast podstawa logarytmu musi być dodatnia i różna od 1;
- funkcje tan i cot — pierwsza z nich jest określona dla liczb różnych od $\frac{\pi}{2}+k\pi$, druga jest określona dla liczb różnych od $k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (funkcje sin i cos są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych);
- funkcje cyklometryczne arcsin i arccos — ich argumenty należą do przedziału $[-1,1]$ (funkcje cyklometryczne arctan i arccot są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych).

Autor korespondencyjny: E. Łobos (Ewa.Lobos@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 20.11.2023 r.

Przyjrzyjmy się najpierw czterem prostym wzorom określającym funkcje rzeczywiste dwóch zmiennych rzeczywistych:

$$f_1(x,y) = x + 2y - 3xy, \quad f_2(x,y) = \frac{x}{y-1}, \quad f_3(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}, \quad f_4(x,y) = \ln x - \sqrt{y}.$$

Aby obliczyć wartość którejkolwiek z tych funkcji, musimy znać x oraz y, czyli musimy znać parę (x,y) liczb rzeczywistych. Zatem argumentem funkcji dwóch zmiennych jest para liczb rzeczywistych (możemy ją interpretować jako punkt na płaszczyźnie), a dziedziną jest zbiór wszystkich argumentów, który możemy interpretować jako pewien podzbiór płaszczyzny xOy.
Jeśli chcemy obliczyć wartość $f_1(x,y)$, to możemy wziąć dowolny $x \in \mathbb{R}$ i dowolny $y \in \mathbb{R}$. Zatem[1]

$$D_{f_1} = \{(x,y)\colon x \in \mathbb{R} \ \wedge \ y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Jeśli chcemy obliczyć wartość $f_2(x,y)$, to możemy wziąć dowolny $x \in \mathbb{R}$ i dowolny $y \neq 1$, czyli $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Zatem

$$D_{f_2} = \{(x,y)\colon x \in \mathbb{R} \ \wedge \ y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{1\}).$$

Wartości $f_3(x,y)$ nie obliczymy tylko wtedy, gdy $x^2 + y^2 = 0$. Warunek ten spełnia tylko punkt $(0,0)$. Zatem[2]

$$D_{f_3} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Aby obliczyć wartość $f_4(x,y)$, możemy wziąć dowolny $x > 0$ i dowolny $y \geq 0$. Zatem

$$D_{f_4} = \{(x,y)\colon x \in (0,+\infty) \ \wedge \ y \in [0,+\infty)\} = (0,+\infty) \times [0,+\infty).$$

Podsumowując, możemy powiedzieć, że:

- dziedziną funkcji f_1 jest cała płaszczyzna,
- dziedziną funkcji f_2 jest płaszczyzna bez prostej $y = 1$,
- dziedziną funkcji f_3 jest płaszczyzna bez punktu $(0,0)$,
- dziedziną funkcji f_4 jest pierwsza ćwiartka układu współrzędnych bez osi Oy.

2. Przykłady

Prezentowane poniżej przykłady są oparte na tym samym schemacie postępowania. Najpierw wypisujemy wszystkie warunki, które muszą być spełnione przez współrzędne każdego punktu należącego do dziedziny rozważanej funkcji. Następnie rozwiązujemy osobno każdy warunek i przedstawiamy jego rozwiązanie jako pewien zbiór na płaszczyźnie xOy (warto użyć różnych kolorów lub różnych sposobów kreskowania zbioru). Dziedziną jest część wspólna otrzymanych zbiorów. Staramy się opisać otrzymany zbiór w najprostszej postaci[3].

[1] Napis ten czytamy: dziedziną funkcji f_1 jest zbiór takich par (x,y), że $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$. Ten zbiór można zapisać krócej, korzystając z definicji iloczynu kartezjańskiego (tzn. $A \times B = \{(x,y)\colon x \in A \ \wedge \ y \in B\}$).

[2] Proszę zwrócić uwagę, że od zbioru możemy odjąć tylko zbiór, stąd w zapisie mamy zbiór jednoelementowy $\{(0,0)\}$.

[3] Ta umiejętność bywa przydatna np. przy całkach wielokrotnych.

Przykład 1. Wyznaczyć i naszkicować dziedzinę funkcji

$$f(x,y)=\sqrt[3]{\log_2(x^2+1)-\arctan(xy)}\cdot\arcsin(x^2+y^2-1)-\frac{e^x\cdot\ln(y-x^2)}{1+\sqrt[4]{1-y}}.$$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór punktów (x,y), których współrzędne spełniają następującą koniunkcję pięciu warunków:

$$x^2+1>0 \quad\wedge\quad -1\le x^2+y^2-1\le 1 \quad\wedge\quad y-x^2>0 \quad\wedge\quad 1-y\ge 0 \quad\wedge\quad 1+\sqrt[4]{1-y}\ne 0.$$

Pierwszy warunek napisaliśmy, ponieważ we wzorze funkcji mamy $\log_2(x^2+1)$*; drugi, bo mamy* $\arcsin(x^2+y^2-1)$*; trzeci, bo mamy* $\ln(y-x^2)$*; czwarty, bo mamy* $\sqrt[4]{1-y}$*; piąty z powodu mianownika.*

Warunek 1.

$$x^2+1>0$$
$$x\in\mathbb{R}.$$

W tym warunku nie występuje y, więc $y\in\mathbb{R}$. Stąd pierwszy warunek jest spełniony przez każdą parę $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Interpretacja graficzna: cała płaszczyzna xOy.

Warunek 2.

$$-1\le x^2+y^2-1\le 1 \qquad \Big| +1$$
$$0\le x^2+y^2\le 2$$
$$x^2+y^2\le 2.$$

Jak to narysować? Rysujemy linią ciągłą (bo nierówność jest nieostra) krzywą $x^2+y^2=2$*. Jest to okrąg o środku* $(0,0)$ *i promieniu* $\sqrt{2}$*. Przy okazji warto zauważyć, że taki okrąg przechodzi przez punkty* $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$*. Okrąg podzielił płaszczyznę na dwa obszary. Wybieramy ten, który zawiera punkt* $(0,0)$*, bo* $0^2+0^2\le 2$*. Współrzędne punktów z drugiego obszaru nie spełniają podanego warunku.*
Interpretacja graficzna: koło o środku $(0,0)$ *i promieniu* $\sqrt{2}$.

Warunek 3.

$$y-x^2>0$$
$$y>x^2.$$

Jak to narysować? Rysujemy linią przerywaną (bo nierówność jest ostra) krzywą $y=x^2$*. Jest to parabola, która przechodzi przez punkty* $(1,1)$, $(-1,1)$, $(0,0)$*. Dzieli ona płaszczyznę na dwa obszary. Wybieramy ten, który zawiera punkt* $(0,1)$*, bo* $1>0^2$*. Współrzędne punktów z drugiego obszaru nie spełniają podanego warunku.*
Interpretacja graficzna: obszar leżący nad parabolą $y=x^2$.

Warunek 4.

$$1-y\ge 0$$
$$y\le 1$$

Jak to narysować? Rysujemy linią ciągłą (bo nierówność jest nieostra) prostą $y=1$*. Warunek* $y\le 1$ *spełniają punkty leżące na tej prostej oraz punkty leżące poniżej tej prostej.*
Interpretacja graficzna: półpłaszczyzna pod prostą $y=1$ *wraz z tą prostą.*

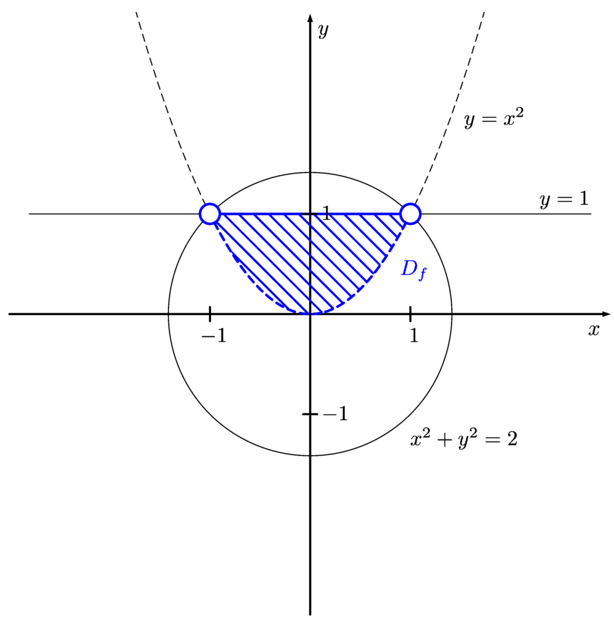
Warunek 5.

$$1+\sqrt[4]{1-y}\neq 0$$
$$\sqrt[4]{1-y}\neq -1$$
$$1-y\geq 0.$$

Wyjaśnienie: pierwiastek parzystego stopnia nigdy nie przyjmuje wartości -1, bo zawsze jest nieujemny. Musi być jednak określony, co sprawdziliśmy w warunku 4.

Interpretacja graficzna: zbiór z warunku 4.

Część wspólna pięciu zbiorów, które otrzymaliśmy na kolejnych etapach (tak naprawdę to trzech zbiorów, bo dwa z nich są równe, a cała płaszczyzna xOy nie wpływa na część wspólną), czyli dziedzina funkcji f, jest zaznaczona kolorem niebieskim na rys. 1.



Rysunek 1. Dziedzina funkcji z przykładu 1

Naszkicowaliśmy już dziedzinę funkcji f. Trzeba jeszcze napisać odpowiedź do zadania, czyli zapisać tę dziedzinę. Idąc po linii najmniejszego oporu, moglibyśmy napisać, że

$$D_f=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+1>0\ \wedge\ -1\leq x^2+y^2-1\leq 1\ \wedge\ y-x^2>0\ \wedge\ 1-y\geq 0\ \wedge\ 1+\sqrt[4]{1-y}\neq 0\Big\}.$$

Ten zapis dziedziny jest poprawny, ale wygląda na bardzo skomplikowany. Możemy skorzystać z naszych obliczeń i pominąć oczywiste warunki:

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 2\ \wedge\ y>x^2\ \wedge\ y\leq 1\right\}.$$

Teraz jest krócej (więc lepiej), ale nadal niewiele to nam mówi. Popatrzmy na rysunek. Widać na nim, że argumenty funkcji f mają odciętą $x\in(-1,1)$. Ponadto, jeśli ustalimy x z tego przedziału, to rzędna argumentu zmienia się od x^2 do 1.

Odp. $D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\in(-1,1)\ \wedge\ x^2<y\leq 1\right\}.$

Dygresja. Dziedzinę tej funkcji można zapisać też jako $D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon y\in(0,1]\ \wedge\ -\sqrt{y}<x<\sqrt{y}\right\}$. *Ten zapis też jest krótki i też pozwala nam od razu narysować dziedzinę.*

Przykład 2. Wyznaczyć i naszkicować dziedzinę funkcji

$$f(x,y) = \ln(5x - x^2 - 4) + \frac{e^{x-y} \cdot \sqrt{3+y-x}}{2\pi - \arccos\frac{x^2+y^2-5}{4}}.$$

Aby punkt (x, y) był argumentem funkcji f, jego współrzędne muszą spełniać następującą koniunkcję czterech warunków:

$$5x - x^2 - 4 > 0 \quad \wedge \quad 3 + y - x \geq 0 \quad \wedge \quad -1 \leq \frac{x^2+y^2-5}{4} \leq 1 \quad \wedge \quad 2\pi - \arccos\frac{x^2+y^2-5}{4} \neq 0.$$

Pierwszy warunek musi być spełniony, ponieważ we wzorze funkcji mamy $\ln(5x - x^2 - 4)$*; drugi, bo mamy* $\sqrt{3+y-x}$*; trzeci, bo mamy* $\arccos\frac{x^2+y^2-5}{4}$*; czwarty z powodu mianownika.*

Warunek 1.

$$\begin{aligned} 5x - x^2 - 4 &> 0 \\ x^2 - 5x + 4 &< 0 \\ (x-1)(x-4) &< 0 \\ x &\in (1,4) \\ 1 < x &< 4. \end{aligned}$$

Jak to narysować? Rysujemy liniami przerywanymi (bo nierówności są ostre) proste $x = 1$ *i* $x = 4$*. Dzielą one płaszczyznę na trzy obszary. Wybieramy ten, w którym leży np. punkt* $(2, 0)$*, bo* $1 < 2 < 4$*. Sprawdzamy, że współrzędne punktów leżących w pozostałych obszarach nie spełniają naszego warunku.*
Interpretacja graficzna: obszar między prostymi $x = 1$ *i* $x = 4$*, ale bez tych prostych.*

Warunek 2.

$$\begin{aligned} 3 + y - x &\geq 0 \\ y &\geq x - 3. \end{aligned}$$

Jak to narysować? Rysujemy linią ciągłą (bo nierówność jest nieostra) prostą $y = x - 3$*. Do narysowania prostej wystarczą dwa punkty, np.* $(0, -3)$ *i* $(3, 0)$*. Ta prosta dzieli płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny. Wybieramy tę półpłaszczyznę, w której leży punkt* $(0, 0)$*, bo* $0 \geq 0-3$*. Współrzędne punktów z drugiej półpłaszczyzny nie spełniają podanego warunku.*
Interpretacja graficzna: półpłaszczyzna nad prostą $y = x - 3$ *wraz z tą prostą.*

Warunek 3.

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{x^2+y^2-5}{4} &\leq 1 \qquad \Big| \cdot 4 \\ -4 \leq x^2 + y^2 - 5 &\leq 4 \qquad \Big| + 5 \\ 1 \leq x^2 + y^2 &\leq 9. \end{aligned}$$

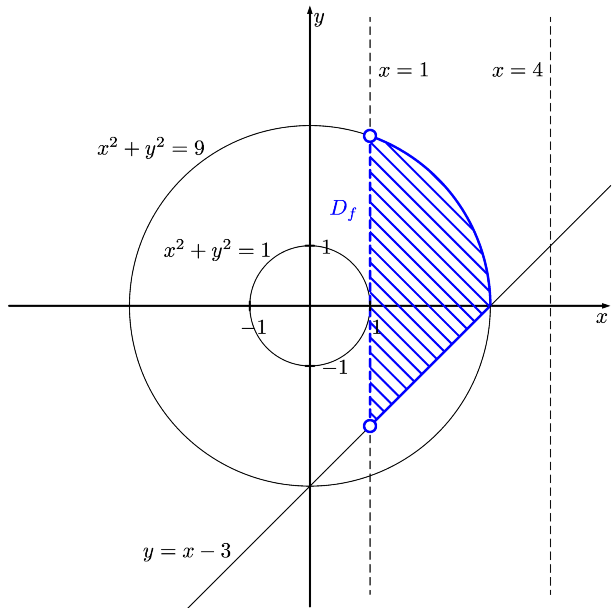
Jak to narysować? Rysujemy liniami ciągłymi (bo nierówności są nieostre) krzywe $x^2 + y^2 = 1$ *i* $x^2 + y^2 = 9$*. Są to okręgi o promieniach* 1 *i* 3*, oba o środku w punkcie* $(0, 0)$*, które dzielą płaszczyznę na trzy obszary. W każdym obszarze wybieramy po jednym punkcie i sprawdzamy, czy spełniony jest warunek* $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$*.*
Interpretacja graficzna: pierścień o środku $(0, 0)$ *i promieniach* 1 *oraz* 3*.*

Warunek 4.

$$2\pi - \arccos\frac{x^2+y^2-5}{4} \neq 0$$
$$2\pi \neq \arccos\frac{x^2+y^2-5}{4}$$
$$-1 \leq \frac{x^2+y^2-5}{4} \leq 1.$$

Wyjaśnienie: funkcja arccos *przyjmuje tylko wartości z przedziału* $[0,\pi]$*, więc zawsze jest różna od* 2π*. Musi być jednak określona, co sprawdziliśmy w warunku 3.*
Interpretacja graficzna: zbiór z warunku 3.

Wyznaczamy część wspólną otrzymanych zbiorów. Na rys. 2 zaznaczono ją kolorem niebieskim.



Rysunek 2. Dziedzina funkcji z przykładu 2

Rysunek wyszedł ładny, więc na jego podstawie możemy napisać odpowiedź. Zauważmy, że nie trzeba wypisywać wszystkich warunków, które mieliśmy na początku — np. warunek $x^2+y^2 \geq 1$ *jest zbędny. Ponadto warunek* $x < 4$ *możemy doprecyzować — widzimy na rysunku, że* $x \leq 3$.

Odp. $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in (1,3] \ \wedge \ x-3 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}\right\}$.

Alternatywne odpowiedzi:
$D_f = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \Big(y \in (-2,0) \ \wedge \ 1 < x \leq y+3\Big) \quad \vee \quad \Big(y \in [0,\sqrt{8}) \ \wedge \ 1 < x \leq \sqrt{9-y^2}\Big)\Big\}$,

$D_f = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in (-2,\sqrt{8}) \ \wedge \ 1 < x \leq \min\{y+3, \sqrt{9-y^2}\}\Big\}$.

Przykład 3. Wyznaczyć i naszkicować dziedzinę funkcji

$$f(x,y) = \arctan\left(1 - \sqrt[4]{2+y-x^2}\right) - \ln(3 - |4y+3|) + 2\mathrm{arcsin}\left(1 - \frac{2y}{x^3}\right).$$

Współrzędne punktu (x,y), który jest argumentem funkcji f, muszą spełniać następującą koniunkcję czterech warunków:

$$2+y-x^2 \geq 0 \quad \wedge \quad 3-|4y+3| > 0 \quad \wedge \quad x^3 \neq 0 \quad \wedge \quad -1 \leq 1 - \frac{2y}{x^3} \leq 1.$$

Pierwszy warunek musi być spełniony, ponieważ we wzorze funkcji mamy $\sqrt[4]{2+y-x^2}$*; drugi, bo mamy* $\ln(3-|4y+3|)$*; trzeci, bo mamy ułamek* $\frac{2y}{x^3}$*; czwarty, bo mamy* $\arcsin\left(1-\frac{2y}{x^3}\right)$.

Warunek 1.

$$\begin{aligned} 2+y-x^2 &\geq 0 \\ y &\geq x^2-2. \end{aligned}$$

Jak to narysować? Rysujemy linią ciągłą (bo nierówność jest nieostra) krzywą $y = x^2-2$*. Jest to parabola o wierzchołku* $(0,-2)$*, przechodzi przez punkty* $(1,-1)$ *i* $(-1,-1)$*. Dzieli ona płaszczyznę na dwa obszary. Wybieramy ten, w którym leży punkt* $(0,0)$*, bo* $0 \geq 0^2-2$*. Współrzędne punktów leżących w drugim obszarze nie spełniają naszego warunku.*
Interpretacja graficzna: obszar nad parabolą $y = x^2-2$ *wraz z tą parabolą.*

Warunek 2.

$$\begin{aligned} 3-|4y+3| &> 0 \\ |4y+3| &< 3 \\ -3 < 4y+3 &< 3 \quad \Big| -3 \\ -6 < 4y &< 0 \quad \Big| :4 \\ -\frac{3}{2} < y &< 0. \end{aligned}$$

Jak to narysować? Rysujemy liniami przerywanymi (bo nierówności są ostre) proste $y = -\frac{3}{2}$ *i* $y = 0$*. Dzielą one płaszczyznę na trzy obszary. Wybieramy w każdym obszarze jakiś punkt i sprawdzamy, czy nasz warunek jest spełniony.*
Interpretacja graficzna: obszar między prostymi $y = -\frac{3}{2}$ *i* $y = 0$.

Warunek 3.

$$\begin{aligned} x^3 &\neq 0 \\ x &\neq 0. \end{aligned}$$

Interpretacja graficzna: cała płaszczyzna z wyjątkiem prostej $x = 0$ *(czyli osi* Oy*).*

Warunek 4.

$$\begin{aligned} -1 \leq 1 - \frac{2y}{x^3} &\leq 1 \quad \Big| -1 \\ -2 \leq -\frac{2y}{x^3} &\leq 0 \quad \Big| :(-2) \\ 1 \geq \frac{y}{x^3} &\geq 0 \quad \Big| \cdot x^3 \end{aligned}$$

Uwaga. Tutaj ***wyjątkowo*** *możemy pomnożyć nierówność stronami przez x^3, bo umiemy określić znak tego wyrażenia. Z warunku 2 wiemy, że $y < 0$. Ułamek $\frac{y}{x^3}$ ma być większy lub równy 0, więc x^3 musi być ujemne.*

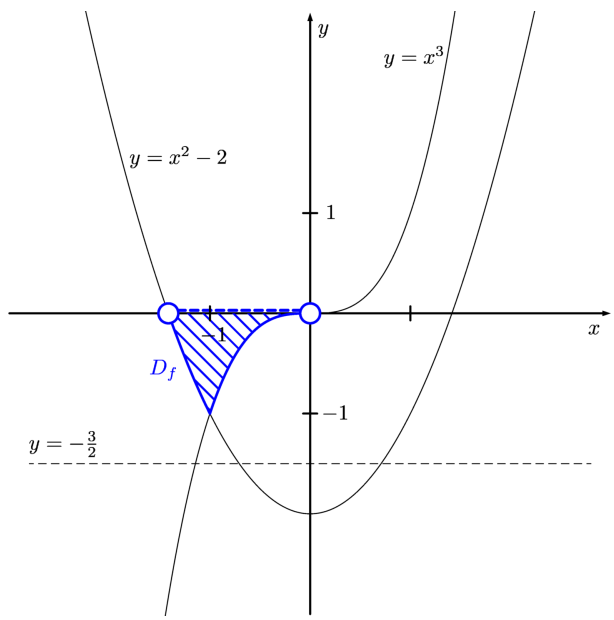
$$x^3 \le y \le 0, \quad \text{gdzie } x < 0,\ y < 0$$
$$x^3 \le y < 0, \quad \text{gdzie } x < 0.$$

Jak to narysować? Rysujemy linią ciągłą krzywą $y = x^3$. Dzieli ona III ćwiartkę (osie zaznaczamy linią przerywaną, bo $x, y < 0$) na dwa obszary. Wybieramy w każdym obszarze jakiś punkt i sprawdzamy, czy jest spełniony warunek $y \ge x^3$.
Interpretacja graficzna: obszar w III ćwiartce nad krzywą $y = x^3$.

Dygresja. Gdybyśmy nie zauważyli, że interesuje nas tylko III ćwiartka, to podwójną nierówność $1 \ge \frac{y}{x^3} \ge 0$ można rozwiązać dwoma sposobami:

- *rozważyć dwa przypadki ($x > 0$, $x < 0$) i mnożyć stronami przez x^3;*
- *narysować liniami ciągłymi krzywe $\frac{y}{x^3} = 1$ (czyli $y = x^3$ bez punktu $(0,0)$) i $\frac{y}{x^3} = 0$ (czyli $y = 0$ bez punktu $(0,0)$); płaszczyzna zostanie podzielona na cztery obszary; w każdym obszarze wybrać jeden punkt i sprawdzić, czy dla jego współrzędnych zachodzi warunek $1 \ge \frac{y}{x^3} \ge 0$.*

Na rys. 3 zaznaczono kolorem niebieskim dziedzinę funkcji f (tzn. część wspólną otrzymanych zbiorów).



Rysunek 3. Dziedzina funkcji z przykładu 3

Odp. $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [-1, 0) \ \wedge\ -\sqrt{y+2} \le x \le \sqrt[3]{y}\right\}.$

Alternatywne odpowiedzi:
$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \left(x \in (-\sqrt{2}, -1] \ \wedge\ x^2 - 2 \le y < 0\right) \quad \vee \quad \left(x \in (-1, 0) \ \wedge\ x^3 \le y < 0\right)\right\},$
$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in (-\sqrt{2}, 0) \ \wedge\ \max\{x^2 - 2, x^3\} \le y < 0\right\}.$

Przykład 4. Wyznaczyć i naszkicować dziedzinę funkcji

$$f(x,y) = \ln(\arccos xy) + \sqrt{x+1-y^2} \cdot \sqrt[6]{x^4-1}.$$

W tym przykładzie mamy cztery warunki:

$$\arccos xy > 0 \quad \wedge \quad -1 \leq xy \leq 1 \quad \wedge \quad x+1-y^2 \geq 0 \quad \wedge \quad x^4-1 \geq 0.$$

Pierwszy warunek musi być spełniony, ponieważ we wzorze funkcji mamy $\ln(\arccos xy)$*; drugi, bo mamy* $\arccos xy$*; trzeci, bo mamy* $\sqrt{x+1-y^2}$*; czwarty, bo mamy* $\sqrt[6]{x^4-1}$.

Warunki 1. i 2.

$$\begin{gathered} \arccos xy > 0 \quad \wedge \; -1 \leq xy \leq 1 \\ -1 \leq xy < 1. \end{gathered}$$

Dlaczego tak? Funkcja $\arccos$ *przyjmuje tylko wartości z przedziału* $[0, \pi]$*, przy czym wartość zero ma tylko dla argumentu* 1.
Jak to narysować? Rysujemy linią ciągłą krzywą $xy = -1$ *(czyli hiperbolę* $y = -\frac{1}{x}$*) oraz linią przerywaną krzywą* $xy = 1$ *(czyli hiperbolę* $y = \frac{1}{x}$*). Gałęzie tych hiperboli dzielą płaszczyznę na pięć obszarów. Wybieramy ten, w którym leży punkt* $(0,0)$*, bo tylko w tym obszarze* $-1 \leq 0 \cdot 0 < 1$*. Współrzędne punktów leżących w pozostałych czterech obszarach nie spełniają naszego warunku.*
Interpretacja graficzna: „środkowy" obszar między hiperbolami $y = -\frac{1}{x}$ *(wraz z tą hiperbolą) i* $y = \frac{1}{x}$ *(bez tej hiperboli).*

Warunek 3.

$$\begin{aligned} x+1-y^2 &\geq 0 \\ x &\geq y^2-1. \end{aligned}$$

Jak to narysować? Musimy narysować linią ciągłą krzywą $x = y^2 - 1$*. Jest to parabola*[4]*, która dzieli płaszczyznę na dwa obszary. Wybieramy ten, w którym leży punkt* $(0,0)$*, bo tylko w tym obszarze* $0 \geq 0^2 - 1$.
Interpretacja graficzna: obszar z prawej strony paraboli $x = y^2 - 1$ *wraz z tą parabolą.*

Warunek 4.

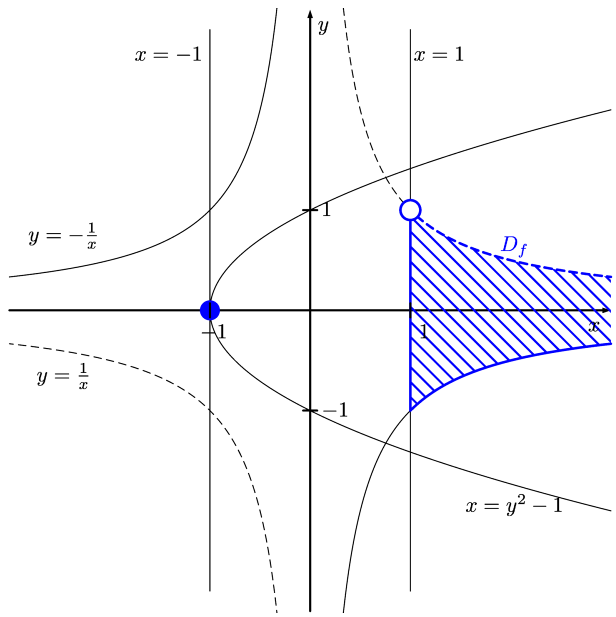
$$\begin{aligned} & x^4 - 1 \geq 0 \\ & (x^2-1)(x^2+1) \geq 0 \\ & (x-1)(x+1)(x^2+1) \geq 0 \\ & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ & x \leq -1 \; \vee \; x \geq 1. \end{aligned}$$

Jak to narysować? Rysujemy liniami ciągłymi proste $x = -1$ *i* $x = 1$*. Dzielą one płaszczyznę na trzy obszary. Rozważany warunek spełniają punkty na tych prostych oraz w obszarach po lewej i prawej stronie (punkty ze środkowego obszaru nie spełniają warunku).*
Interpretacja graficzna: płaszczyzna bez pasa między prostymi $x = -1$ *i* $x = 1$.

---

[4] Umiemy narysować parabolę $y = x^2 - 1$ (ma wierzchołek $(0,-1)$ i przechodzi przez punkty $(1,0)$ oraz $(-1,0)$. Jeśli we wzorze $y = x^2 - 1$ zamienimy rolami zmienne x i y, to otrzymamy interesujący nas wzór $x = y^2 - 1$. Zamiana rolami zmiennych odpowiada odbiciu krzywej względem prostej $y = x$, więc $x = y^2 - 1$ to parabola o wierzchołku $(-1,0)$, przechodząca przez punkty $(0,1)$ oraz $(0,-1)$.

Wyznaczamy część wspólną uzyskanych trzech zbiorów i mamy dziedzinę funkcji f (rys. 4). Zauważmy, że argumentem funkcji f jest także punkt $(-1, 0)$ — należy on do wszystkich trzech zbiorów.



Rysunek 4. Dziedzina funkcji z przykładu 4

Odp. $D_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [1, +\infty) \ \wedge \ -\frac{1}{x} \le y < \frac{1}{x}\big\} \cup \{(-1,0)\}$.

Przykład 5. Wyznaczyć i naszkicować dziedzinę funkcji

$$f(x,y) = \log_3(y^2 - 2x) + \sqrt{y - |x|} - 3\sqrt{\pi - 3\operatorname{arctan}(y\sqrt{3})}.$$

Tu mamy tylko trzy warunki:

$$y^2 - 2x > 0 \quad \wedge \quad y - |x| \ge 0 \quad \wedge \quad \pi - 3\operatorname{arctan}(y\sqrt{3}) \ge 0.$$

Pierwszy warunek musi być spełniony, ponieważ we wzorze funkcji mamy $\ln(y^2 - 2x)$*; drugi, bo mamy* $\sqrt{y - |x|}$*; trzeci, bo mamy* $\sqrt{\pi - 3\operatorname{arctan}(y\sqrt{3})}$.

Warunek 1.

$$\begin{aligned} y^2 - 2x &> 0 \\ y^2 &> 2x. \end{aligned}$$

Jak to narysować? Rysujemy linią przerywaną krzywą $y^2 = 2x$*. Jest to parabola*[5] *o wierzchołku* $(0,0)$*, przechodzi przez punkty* $(2,-2)$ *i* $(2,2)$*. Dzieli ona płaszczyznę na dwa obszary. Wybieramy ten, w którym leży punkt* $(-1,0)$*, bo* $0^2 > 2 \cdot (-1)$*. Współrzędne punktów leżących w drugim obszarze nie spełniają naszego warunku. Interpretacja graficzna: obszar z lewej strony paraboli* $y^2 = 2x$.

[5] Rysujemy najpierw parabolę $x^2 = 2y$ (czyli $y = \frac{1}{2}x^2$), a następnie znajdujemy jej obraz w symetrii względem prostej $y = x$.

Warunek 2.

$$\begin{aligned} y - |x| &\geq 0 \\ y &\geq |x|. \end{aligned}$$

Jak to narysować? Rysujemy linią ciągłą $y = |x|$. Krzywa ta dzieli płaszczyznę na dwa obszary. Wybieramy ten, w którym leży punkt $(0, 1)$, bo $1 \geq |0|$. Współrzędne punktów leżących w drugim obszarze nie spełniają naszego warunku.
Interpretacja graficzna: obszar nad krzywą $y = |x|$ wraz z tą krzywą.

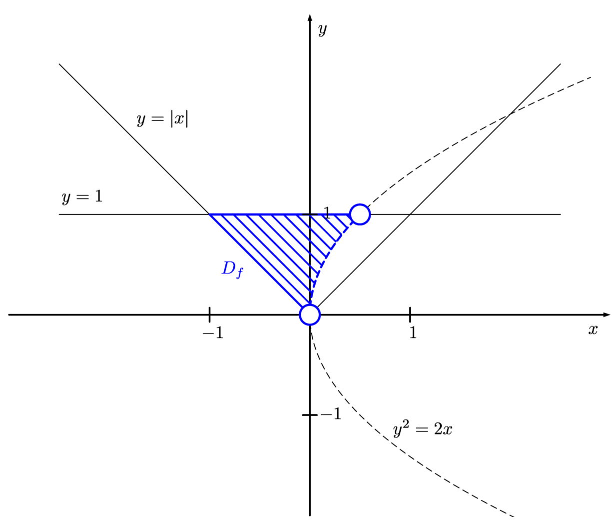
Warunek 3.

$$\begin{aligned} \pi - 3\arctan\left(y\sqrt{3}\right) &\geq 0 \\ 3\arctan\left(y\sqrt{3}\right) &\leq \pi \\ \arctan\left(y\sqrt{3}\right) &\leq \frac{\pi}{3} \\ \arctan\left(y\sqrt{3}\right) &\leq \arctan\sqrt{3} \\ y\sqrt{3} &\leq \sqrt{3} \qquad \text{(bo funkcja arctan jest rosnąca)} \\ y &\leq 1. \end{aligned}$$

Jak to narysować? Rysujemy linią ciągłą prostą $y = 1$. Sprawdzamy, w której półpłaszczyźnie leżą punkty o rzędnej mniejszej niż 1.
Interpretacja graficzna: półpłaszczyzna pod prostą $y = 1$ wraz z tą prostą.

Dygresja. Gdybyśmy mieli warunek $\operatorname{arccot}\left(y\sqrt{3}\right) \leq \frac{\pi}{3}$, otrzymalibyśmy górną półpłaszczyznę (funkcja arccot jest malejąca): $\operatorname{arccot}\left(y\sqrt{3}\right) \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \operatorname{arccot}\left(y\sqrt{3}\right) \leq \operatorname{arccot}\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow y\sqrt{3} \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{3}$.

Część wspólna otrzymanych trzech zbiorów jest dziedziną funkcji f. Zaznaczono ją na niebiesko na rys. 5.



Rysunek 5. Dziedzina funkcji z przykładu 5

Odp. $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in (0, 1] \ \wedge \ -y \leq x < \frac{1}{2}y^2\right\}$.

3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Poniżej zamieszczono propozycję czterech zadań do samodzielnego rozwiązania. Więcej zadań można znaleźć np. w [1].

Zadanie 1. Wyznaczyć i naszkicować dziedzinę funkcji określonej wzorem

$$f(x,y) = \sqrt[4]{y+x^2} \cdot \arcsin\left(1-x^2-y^2\right) - \frac{3\ln(x-x^2)}{e^{x-y^2}}.$$

Zadanie 2. Wyznaczyć i naszkicować dziedzinę funkcji określonej wzorem

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1-e^x} + \ln(y-x^2+1)}{\pi - \arccos\left(x-y\right)}.$$

Zadanie 3. Wyznaczyć i naszkicować dziedzinę funkcji określonej wzorem

$$f(x,y) = \arcsin\frac{y+x}{2} - \sqrt{x^2y} \cdot \ln(4-x^2-y^2).$$

Zadanie 4. Wyznaczyć i naszkicować dziedzinę funkcji określonej wzorem

$$f(x,y) = \ln(-xy) + \frac{\arccos 2y}{\sqrt{x-e^{|y|}}}.$$

Odpowiedzi

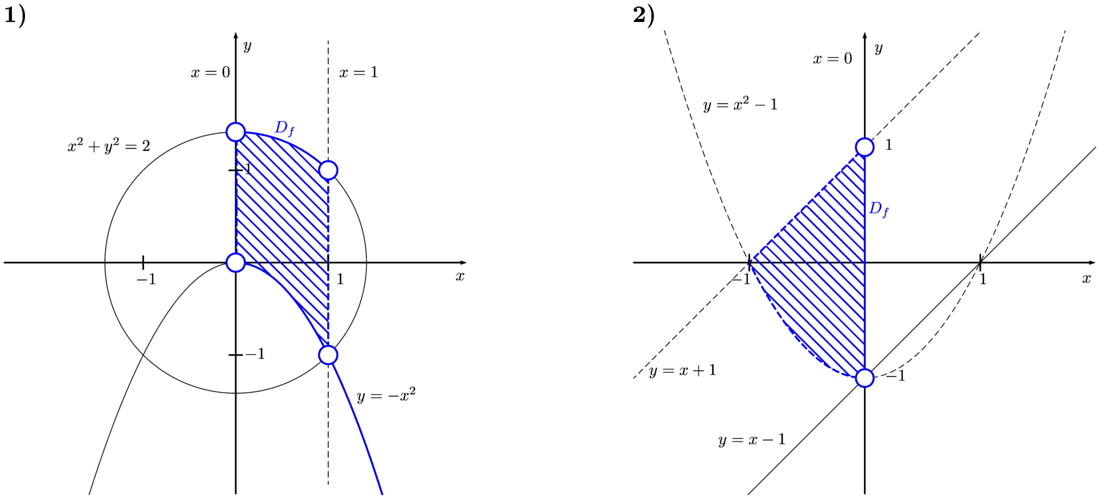
1. $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in (0,1) \,\wedge\, -x^2 \le y \le \sqrt{2-x^2}\right\}$

2. $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in (-1,0] \,\wedge\, x^2-1 < y < x+1\right\}$

3. $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [0,2) \,\wedge\, -\sqrt{4-y^2} < x \le 2-y\right\} \setminus \{(2,0)\}$

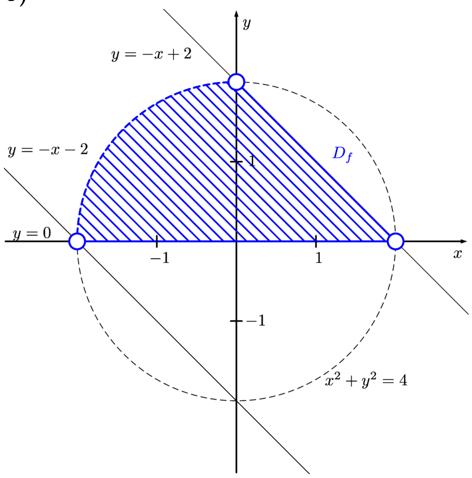
4. $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \,\wedge\, x > \frac{1}{e^y}\right\}$

1) **2)**

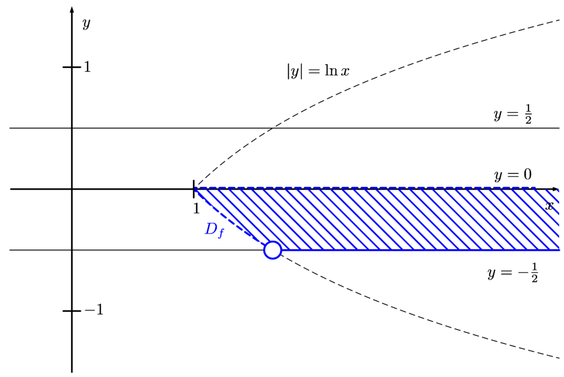


Rysunek 6. Dziedziny funkcji z zadań 1 (po lewej) i 2 (po prawej)

3)



4)



Rysunek 7. Dziedziny funkcji z zadań 3 (po lewej) i 4 (po prawej)

Literatura

1. E. Łobos, J. Macura, B. Sikora, *Calculus and linear algebra in exercises. Part 1*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2020, pp. 15–16.
2. A. Samulewicz, *Dziedzina funkcji jednej zmiennej*, MINUT 2021 (3), s. 31–41.