MINUT 2023 (5), s. 211-226
ISSN 2719-3063

Piotr SŁANINA

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Rutyna zabija, czyli bądź kreatywny w rozwiązywaniu zadań

Streszczenie. Artykuł prezentuje wybrane zadania z programu kształcenia z matematyki na studiach, które można rozwiązywać wieloma sposobami. Jego celem jest propagowanie kreatywności w rozwiązywaniu nawet typowych zadań zamiast „uczenia się dla ocen".
Słowa kluczowe: potęgowanie liczb zespolonych, tożsamość Pascala, układ równań Cramera, rzut prostej na płaszczyznę, granica funkcji, całka trygonometryczna

1. Wstęp

O ile dorosły nie powinien mieć problemu z udzieleniem odpowiedzi na pytanie „ile wynosi 7 plus 9" (no dobrze, ściślej mówiąc, nie powinien mieć problemu), to dla kilkuletnich dzieci jest to nie lada wyzwanie.

Jeśli dotychczas dzieciak korzystał z palców przy dodawaniu, to wtedy pojawienie się liczb większych od dziesięciu komplikuje obliczenia. I tu pojawia się pole do popisu.

Jedne dzieci narysują siedem kresek, potem dziewięć, a następnie je policzą. Inne dzieci, lubiące liczyć na palcach, zdejmą skarpetki i korzystając z palców nóg, rozszerzą swoje zdolności do liczenia do dwudziestu. Możemy się spodziewać i bardziej zaawansowanych argumentacji: „Siedem plus dziewięć to jest tyle samo, co osiem plus osiem. Wiem, że to jest szesnaście, bo miałem takie ładne pudełko z kredkami. Były w nim dwa rzędy kredek, po osiem w każdym, a na pudełku było napisane szesnaście".

Na każdym poziomie zaawansowania matematyki, trafiając na zadanie, na które nie możemy znaleźć odpowiedzi, nie obawiajmy się poszukać nieszablonowych sposobów rozwiązywania.

Sama analiza zadania lub problemu, szczególnie w większym gronie, może być bardzo owocna. Nieraz zdarzało się w trakcie takich spotkań (w moim wypadku było to najczęściej Seminarium Algebry albo wieczory w czasie konferencji naukowych), że wprawdzie nie udawało nam się rozwiązać nurtującego nas problemu, ale przy okazji odkryliśmy wiele innych, ciekawych wątków, dotyczących dyskutowanej przez nas tematyki.

Nawet, jeśli sposób rozwiązania wydaje się nam oczywisty, nie powinniśmy się zamykać na nowe idee. Na poszczególnych etapach edukacji uczeń (student) powinien zrozumieć, że samo rozwiązanie zadania jest celem krótkofalowym – jego konsekwencją może być jedynie dobra ocena. Na dłuższą metę otwarcie się na różne podejścia do tematu powinno przynieść korzyści w przyszłości.

Autor korespondencyjny: P. Słanina (piotr.slanina@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 08.08.2023.

Przy pomocy zadań z wybranych z działów matematyki pokażemy, jak różne mogą być metody rozwiązywania. Nie ma w nich teoretycznego przygotowania – czytelnik powinien już orientować się w teorii dotyczącej tych zadań. Aby nieco rozszerzyć grono odbiorców, przywołamy również parę własności, z których będziemy korzystać.

Artykuł kierowany jest do studentów kierunków posiadających w programie kształcenia matematykę na typowym, akademickim poziomie. Potrzebna będzie znajomość podstaw liczb zespolonych, dwumianu Newtona, układów równań liniowych, geometrii analitycznej, granic funkcji czy całki nieoznaczonej. Dlatego ten artykuł należy traktować jaki uzupełnienie zwykłego kursu matematyki.

2. Sposoby rozwiązywania wybranych zadań

2.1. Równanie kwadratowe

Zaczniemy od czegoś na poziomie szkoły średniej:

Zadanie 1. *Rozwiąż równanie* $x^2 - 12x + 20 = 0$.

Na początek standardowy sposób, jaki wybierze prawie każdy uczeń:
Sposób 1. $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 64$, $x_1 = \frac{12-8}{2} = 2$, $x_2 = \frac{12+8}{2} = 10.\Box$

Rozwiązanie tego równania kwadratowego uczeń w skrócie mógłby opisać „Delta, potem iks jeden, iks dwa i koniec". To oczywiście w dużym uproszeniu racja, ale... wcale nie konieczność.

Aby rozwiązać to równanie, można też pogrupować wyrażenia:
Sposób 2. $0 = x^2 - 12x + 20 = x^2 - 2x - 10x + 20 = x(x-2) - 10(x-2) = (x-10)(x-2)$, a stąd $x_1 = 2$ i $x_2 = 10.\Box$

Kolejny sposób to wykorzystanie wzoru skróconego mnożenia:
Sposób 3. $x^2 - 12x + 20 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2 \cdot 6x + 36 = 16 \;\Leftrightarrow\; (x-6)^2 = 16 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x - 6 = 4 \;\vee x - 6 = -4 \;\Leftrightarrow x_1 = 10$ i $x_2 = 2.\Box$

Znajomość wzorów Viete'a też może być przydatna w rozwiązaniu tego równania. Jeśli miejscami zerowymi trójmianu kwadratowego są liczby całkowite (oczywiście, tego nie wiemy przed rozwiązaniem), to można przy pewnej wprawie odgadnąć miejsca zerowe.

Przypomnijmy, że jeżeli rozwiązaniami równania kwadratowego $x^2 + bx + c = 0$ są x_1 i x_2, to

$$x_1 + x_2 = -b, \quad x_1 x_2 = c.$$

Sposób 4. Czy potrafię wskazać dwie liczby, których suma wynosi 12 a iloczyn 20 ... tak, to $x_1 = 10$ i $x_2 = 2$ – oto rozwiązanie! $\Box$

Innych rozwiązań nie ma - równanie kwadratowe nie może mieć więcej niż dwa rozwiązania. Osobiście najczęściej najczęściej korzystam z ostatniego sposobu rozwiązywania, o ile spodziewam się całkowitych rozwiązań. Przy pewnej wprawie ten sposób może być najszybszy dla równań kwadratowych z całkowitymi rozwiązaniami.

Widać więc, że nawet rozwiązanie prostego zadania nie musi przebiegać utartymi schematami.

Ćwiczenie 1. *Rozwiąż każdym z powyższych sposobów następujące równania:*

$$1.\ x^2 - 8x + 15 = 0, \quad 2.\ x^2 - 2x - 8 = 0, \quad 3.\ x^2 + 3x - 18 = 0.$$

Odp. 1. $x \in \{3, 5\}$; 2. $x \in \{-2, 4\}$; 3. $x \in \{-6, 3\}$.

2.2. Potęgowanie liczb zespolonych

Przyjrzyjmy się dość typowemu potęgowaniu liczby zespolonej.

Zadanie 2. *Oblicz*[1] $(\sqrt{3} - i)^{2023}$.

Najpierw pokażemy rozwiązanie „pierwszego wyboru” wśród studentów, wykorzystujące wzór de Moivre’a. Niektóre etapy rozwiązania można przeprowadzić na różne sposoby.
Sposób 1. Najpierw możemy zamienić liczbę $z = \sqrt{3} - i$ na postać trygonometryczną lub wykładniczą. Ponieważ druga z nich praktycznie nie prowadzi do innych sposobów rozwiązywania, więc będziemy się posługiwać znaną powszechniej wśród studentów postacią trygonometryczną.
$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$.
Argument liczby z można wyznaczyć na różne sposoby.

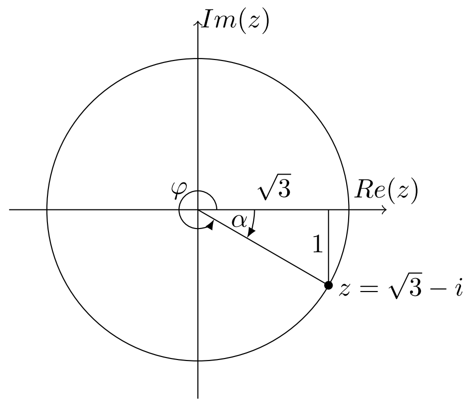
1. Z definicji argumentu:

   dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, z definicji argumentu φ,

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \varphi \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi \in \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}.$$

   Stąd możemy wybrać najwygodniejszy do obliczeń argument $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

2. Z interpretacji geometrycznej liczby zespolonej wynika, że jeżeli liczbę zespoloną $z = x + yi$ zinterpretujemy jako punkt (x, y) na płaszczyźnie (zwanej zespoloną), to jej argument jest równy kątowi pomiędzy osią $Re(z)$ oraz odcinkiem Oz. Na rysunku 1 argumentem liczby $z = \sqrt{3} - i$ jest kąt φ.



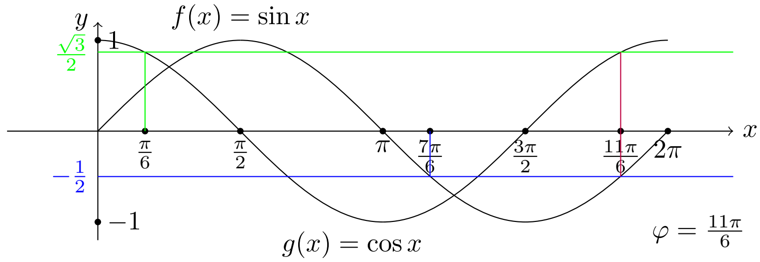
Rysunek 1

Używając elementarnej trygonometrii mamy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \ (np.\ \varphi = -\frac{\pi}{6}).$$

[1] W podrozdziale 2.2 polecenie „oblicz” dla potęgowania liczb zespolonych oznacza „przedstaw rozwiązanie w postaci algebraicznej”.

3. Korzystając z wykresów funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ znajdujemy wartość φ, dla której $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$ (rysunek 2). Jest to $\varphi = \frac{11\pi}{6}$.



Rysunek 2

4. Można jeszcze inaczej:

$$z = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right),$$

co doprowadza nas od razu do postaci trygonometrycznej.

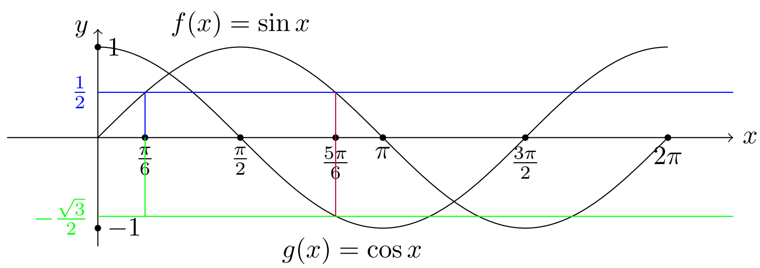
Dalej, korzystając ze wzoru de Moivre'a i rozkładu $\frac{2023}{6} = 336 + \frac{7}{6}$,

$$z^{2023} = 2^{2023}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\cdot 2023\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\cdot 2023\right)\right) = 2^{2023}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2^{2023}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Zamiana na postać algebraiczną może również być przeprowadzona różnymi sposobami:

1. Ponownie korzystając z wykresów funkcji trygonometrycznych (rysunek 3):



Rysunek 3

$$z = 2^{2023}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2^{2022}(-\sqrt{3} + i).$$

2. Przy pomocy wzorów redukcyjnych (wiedząc, że w przedziale $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ funkcja $g(x) = \cos x$ przyjmuje wartości ujemne, a $f(x) = \sin x$ – dodatnie), wyliczamy:

$$z = 2^{2023}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2^{2023}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2^{2023}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2^{2023}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2^{2022}(-\sqrt{3} + i).\square$$

Istnieje sposób znacznie szybszy, nie wymagający nawet znajomości podstaw liczb zespolonych (poza $i^2 = -1$). Jest on efektywny w przypadku potęgowania liczb, których argument jest wielokrotnością liczb $\frac{\pi}{4}$ lub $\frac{\pi}{6}$, jak to ma często miejsce w zadaniach dla studentów. Opiera się na wykorzystaniu faktu, że takie liczby, podniesione do 2 lub 3 potęgi, są iloczynem stałej oraz 1 lub i.

Sposób 2.

$$(\sqrt{3} - i)^{2023} = ((\sqrt{3} - i)^3)^{674}(\sqrt{3} - i) = (3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i)^{674}(\sqrt{3} - i) =$$

$$= ((-2^3 i)^2)^{337}(\sqrt{3} - i) = (-2^6)^{337}(\sqrt{3} - i) = -2^{2022}(\sqrt{3} - i) = 2^{2022}(-\sqrt{3} + i).\square$$

W mojej dwudziestokilkuletniej pracy nauczyciela akademickiego tylko dwa razy studenci rozwiązali tym sposobem zadanie z potęgowaniem liczb zespolonych w trakcie kolokwium.

Jednym z nich był dobry (choć nie wyjątkowy) student, który swoje początkowe etapy edukacji przechodził we Francji. Być może to miało wpływ na nieszablonowe podejście do rozwiązania tego zadania.

Ćwiczenie 2. *Obliczyć każdym z powyższych sposobów:*

$$1.\ (-4 - 4i)^{715}, \quad 2.\ (-\sqrt{3} + 3i)^{291}, \quad 3.\ (\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}i)^{190}.$$

Odp. 1. $2^{1787}(1 - i)$; 2. $\left(2\sqrt{3}\right)^{291}$; 3. $2^{189}\sqrt{2}(-1 - i)$.

2.3. Tożsamość Pascala

Poniżej mamy jedną z najbardziej znanych tożsamości z dwumianem Newtona.

Zadanie 3. *Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych n, k, takich, że $0 \leqslant k < n$,*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Na początek pokażemy najpopularniejszy dowód, przeprowadzony przy pomocy bezpośrednich przekształceń:

Sposób 1.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.\square$$

Tożsamość Pascala możemy też dowieść opisowo:

Sposób 2. Niech X będzie $n+1$-elementowym zbiorem i niech $x \in X$. Obliczymy dwoma sposobami, na ile sposobów można wybrać $k+1$ elementów (bez zwracania) ze zbioru X.

Z jednej strony, jest to oczywiście $\binom{n+1}{k+1}$.

Z drugiej strony, jeśli wśród wybranych elementów nie ma x, to daje $\binom{n}{k+1}$ możliwości. Jeżeli wśród wybranych elementów jest x, to pozostaje jeszcze wybrać k elementów ze zbioru $X \setminus \{x\}$. Można to uczynić na $\binom{n}{k}$ sposobów. Stąd

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \square$$

Kolejne rozwiązanie jest dość podobne do poprzedniego, jednak tutaj będzie bardziej algebraiczne podejście.

Sposób 3. Wyznaczmy na dwa różne sposoby wartość współczynnika przy $x^{k+1}y^{n-k}$ w wyrażeniu $(x+y)^{n+1}$.

Z jednej strony jest on równy $\binom{n+1}{k+1}$. Z drugiej strony, w $(x+y)^n$ współczynnik przy $x^k y^{n-k}$ jest równy $\binom{n}{k}$, a przy $x^{k+1}y^{n-k-1}$ jest równy $\binom{n}{k+1}$. Wtedy w $(x+y)^n(x+y)$, współczynnik przy $x^{k+1}y^{n-k}$ jest równy sumie współczynników z $x^k y^{n-k} \cdot x$ oraz $x^{k+1}y^{n-k-1} \cdot y$, czyli $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.$\square$

Ćwiczenie 3. *Używając różnych sposobów, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, udowodnij tożsamość*

$$2 \cdot \left(\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} \right) = \binom{2n+2}{n+1}$$

2.4. Rozwiązywanie układów równań Cramera

Rozwiązywaniu układów równań liniowych poświęcane były całe książki. Dla poszczególnych odmian układów równań liniowych zostało opracowanych wiele sposobów ich rozwiązywania. Algorytmy rozwiązywania tych układów, tworzone pod kątem minimalizacji liczby obliczeń w przypadku ogromnej liczby równań i niewiadomych, są również bardzo zaawansowane i stanowią istotny dział metod numerycznych.

Ponieważ głównymi adresatami tego artykułu są studenci różnych wydziałów, ograniczymy się tu jedynie do najpopularniejszych sposobów rozwiązywania układu Cramera.

Zadanie 4. *Rozwiąż układ równań*

$$\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

Wyznacznik macierzy współczynników układu jest równy

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 - 6 - (-2 + 6 - 8) = -2 \neq 0.$$

Stąd mamy do czynienia z układem Cramera.

Najprostszą metodą, znaną już w szkołach, jest metoda podstawiania:

Sposób 1.

$$\begin{cases} x-2y-z=3 \\ 2x+2y+2z=4 \\ x+3y+2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+z+3 \\ 4y+2z+6+2y+2z=4 \\ 2y+z+3+3y+2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+z+3 \\ 6y+4z=-2 \\ 5y+3z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+z+3 \\ z=-\frac{1}{2}-\frac{3y}{2} \\ 5y-\frac{3}{2}-\frac{9y}{2}=-1 \end{cases},$$

a stąd $y=1$, $z=-2$ i $x=3$.$\square$

Możemy też skorzystać z metody Cramera. Przypomnijmy, że jeżeli A_j oznacza macierz, utworzoną z macierzy współczynników A przez zastąpienie j-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych, to

$$x=\frac{detA_1}{detA},\quad y=\frac{detA_2}{detA},\quad z=\frac{detA_3}{detA}.$$

Sposób 2.

$$detA_1=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=12-12-8-(-4+18-16)=-6,$$

$$detA_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=8-4+6-(-4+4+12)=-2,$$

$$detA_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=4+18-8-(6+12-8)=4.$$

Stąd $x=\frac{-6}{-2}=3$, $y=\frac{-2}{-2}=1$ i $z=\frac{4}{-2}=-2$.$\square$

Kolejny sposób rozwiązania opiera się na potraktowaniu układu równań liniowych jako równania macierzowego $AX=B$, gdzie A jest macierzą współczynników, B – macierzą wyrazów wolnych a X – macierzą niewiadomych. Wtedy $X=A^{-1}B$.

Sposób 3. Najpierw wyznaczymy A^{-1} ze wzoru $A^{-1}=\frac{1}{detA}A_D^T$.

$$A_D=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A_D^T=\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix},\quad A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 1 \\ 1 & -1.5 & 2 \\ -2 & 2.5 & -3 \end{bmatrix},$$

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 1 \\ 1 & -1.5 & 2 \\ -2 & 2.5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},\quad \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}.\square$$

Mamy jeszcze w odwodzie metodę Gaussa – nie zawsze najszybszą, ale skuteczną dla każdego układu równań liniowych.

Sposób 4. Dokonywać będziemy przekształceń elementarnych na wierszach macierzy uzupełnionej układu:

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2w_1 \\ -w_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -w_3 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} +2w_2 \\ \\ -5w_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \cdot(-0.5) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} -w_3 \\ -w_3 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

i ponownie mamy $x = 3$, $y = 1$ i $z = -2$.□

Ćwiczenie 4. *Wykorzystując zaprezentowane metody, rozwiąż następujące układy równań:*

$$1. \left\{\begin{array}{l} 2x + 4y - z = 14 \\ 3x + 7y + 4z = 1 \\ x + 3y + 4z = -9 \end{array}\right. , \quad 2. \left\{\begin{array}{l} 2z + 3v = 2 \\ 2y + z + v = 2 \\ x + 3y + z = 4 \\ x + 3y = 6 \end{array}\right. .$$

Odp. 1. $x = 1, y = 2, z = -4$; 2. $x = 3, y = 1, z = -2, v = 2$.

2.5. Rzut prostej na płaszczyznę

Zadania z planimetrii, stereometrii czy geometrii analitycznej często nie mają „głównego” sposobu rozumowania, prowadzącego do rozwiązania. Jednym z takich zadań jest wyznaczanie rzutu prostej na płaszczyznę.

Zadanie 5. *Wyznacz rzut prostej*

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}$$

na płaszczyznę $x + y - 3z - 5 = 0$.

Wektorem kierunkowym danej prostej (nazwijmy ją l) jest $\vec{k} = [1, -2, 2]$, a wektorem normalnym danej płaszczyzny (nazwijmy ją Π) jest $\vec{n} = [1, 1, -3]$.

Ponieważ $\vec{k} \circ \vec{n} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = -7 \neq 0$, więc $l \nparallel \Pi$. Z kolei $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{2}{-3}$, więc $l \not\perp \Pi$. Stąd rzutem prostej l na płaszczyznę Π będzie prosta - nazwijmy ją l'.

Punkt wspólny płaszczyzny Π i prostej l oznaczmy przez P – wyznaczymy jego współrzędne:

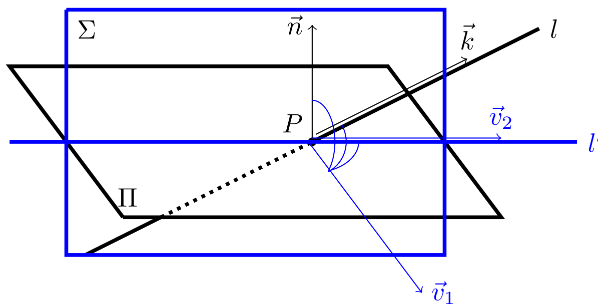
$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + 2t \\ x + y - 3z - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + 2t \\ (1 + t) + (3 - 2t) - 3(2 + 2t) - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + 2t \\ -7t = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -1 \\ x = 0 \\ y = 5 \\ z = 0 \end{array}\right. .$$

Stąd $P(0, 5, 0)$.

Na rysunkach, towarzyszących rozwiązaniom Zadania 5, kolorem czarnym będą oznaczane dane, a kolor niebieski odpowiadać będzie prostym, płaszczyznom, punktom i wektorom, wyznaczanym w czasie rozwiązywania. Ponadto każdy niebieski łuk będzie oznaczać kąt prosty.

Dalej rozwiązywanie tego zadania może pójść w różnych kierunkach.

Sposób 1. Najpierw wyznaczymy wektor kierunkowy $\vec{v}_2$ prostej l'. Wtedy będzie można wstawić $\vec{v}_2$ oraz P do równania prostej l' w postaci parametrycznej czy kanonicznej (patrz rysunek 4).



Rysunek 4

Najpierw wyznaczymy wektor normalny $\vec{v}_1$ płaszczyzny Σ, zawierającej prostą l i prostopadłą do płaszczyzny Π. Zauważmy, że zawiera ona w sobie szukany rzut l'.

$$\vec{v}_1 = \vec{k} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = [4, 5, 3]\,.$$

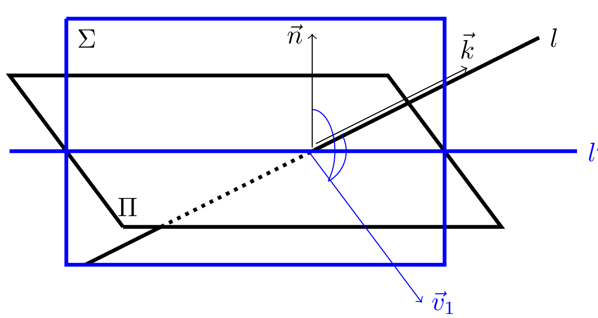
Wektor kierunkowy $\vec{v}_2$ prostej l' jest wtedy prostopadły do wektorów $\vec{n}$ oraz $\vec{v}_1$. Stąd

$$\vec{v}_2 = \vec{n} \times \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = [18, -15, 1]\,.$$

Rozwiązaniem jest prosta $\begin{cases} x = 18t \\ y = 5 - 15t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \square.$

Nieco mniej obliczeń przeprowadzimy, jeśli zadowoli nas rozwiązanie w postaci krawędziowej.

Sposób 2. Wystarczy wyznaczyć równanie płaszczyzny Σ (patrz rysunek 5)



Rysunek 5

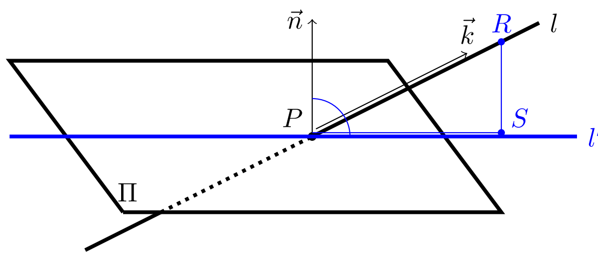
Z poprzedniego rozwiązania wiemy już, że wektor kierunkowy płaszczyzny Σ wynosi $\vec{v_1} = [4,5,3]$. Współrzędne punktu P nie są potrzebne w tym rozwiązaniu - do płaszczyzny Σ należy punkt $R(1,3,2)$ z równania prostej l. Płaszczyzna Σ dana jest więc równaniem $4(x-1)+5(y-3)+3(z-2)=0$, czyli $4x+5y+3z-25=0$.

Szukany rzut jest częścią wspólną płaszczyzn Σ i Π więc rozwiązanie w postaci krawędziowej ma postać $\begin{cases} x+y-3z-5=0 \\ 4x+5y+3z-25=0 \end{cases}$.□

W pracach studentów pojawiały się także inne rozwiązania. Niekoniecznie optymalne, ale warte uwagi ze względu na użytą kreatywność.

W poniższym rozwiązaniu, główną ideą jest znalezienie wektora kierunkowego rzutu l' w postaci $\vec{PS}$, gdzie S zawiera się w płaszczyźnie Π oraz $\vec{RS} \parallel \vec{n}$.

Sposób 3. Kolejne rozwiązanie sprowadza się do wyznaczenia takiego punktu S, zawartego w płaszczyźnie Π, dla którego $\vec{RS} \parallel \vec{n}$ (patrz rysunek 6). Wtedy $\vec{PS}$ będzie wektorem kierunkowym szukanego rzutu.



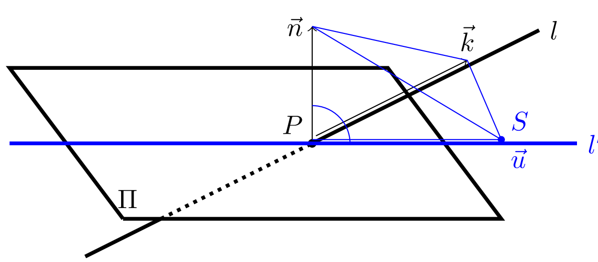
Rysunek 6

Dowolny punkt płaszczyzny Π ma współrzędne $S(5-y+3z, y, z)$ (bo $x+y-3z-5=0$), gdzie $y,z \in \mathbb{R}$. Stąd $\vec{RS} = [4-y+3z, y-3, z-2]$ i warunek $\vec{RS} \parallel \vec{n}$ jest równoważny $\frac{4-y+3z}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-3}$. Z drugiego równania, $z = 11-3y$, a wtedy pierwsze równanie przybiera postać $4-y+33-9y = y-3$, więc $y = \frac{40}{11}$, $z = 11 - \frac{120}{11} = \frac{1}{11}$. Stąd $S(5-\frac{40}{11}+\frac{3}{11}, \frac{40}{11}, \frac{1}{11}) = (\frac{18}{11}, \frac{40}{11}, \frac{1}{11})$.

$\vec{PS} = \left[\frac{18}{11}, \frac{40}{11}-5, \frac{1}{11}\right] = \left[\frac{18}{11}, -\frac{15}{11}, \frac{1}{11}\right]$. Możemy już zapisać rozwiązanie, wstawiając do równania prostej dowolny z punktów P, S (oba należą do rzutu l') oraz wektor $\vec{PS}$: $\begin{cases} x = \frac{18}{11} + \frac{18}{11}t \\ y = \frac{40}{11} - \frac{15}{11}t \\ z = \frac{1}{11} + \frac{1}{11}t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.□

I jeszcze jedno rozwiązanie.

Sposób 4. Spośród wektorów $\vec{u}$, zawartych w płaszczyźnie Π, wyznaczymy taki, który będzie równoległy do płaszczyzny, równoległej do wektorów $\vec{n}$ oraz $\vec{k}$ (patrz rysunek 7).



Rysunek 7

Niech $S(5-y+3z,y,z)$ ponownie będzie dowolnym punktem płaszczyzny Π. Wtedy $\vec{u}=\vec{PS}=[5-y+3z,y-5,z]$.

Aby wektory $\vec{n}$, $\vec{k}$, $\vec{u}$ zawierały się w jednej płaszczyźnie, ich iloczyn mieszany musi być równy zero:

$$0=\vec{n}\vec{k}\vec{u}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5-y+3z & y-5 & z \end{vmatrix}=-2z-3y+15+10-2y+6z-30+6y-18z-2y+10-z=-15z-y+5.$$

Wstawiając $y=-15z+5$ do wektora $\vec{u}$, mamy $\vec{u}=[5-(-15z+5)+3z,-15z+5-5,z]=[18z,-15z,z]$ i dla dowolnego niezerowego z, $\vec{u}$ będzie wektorem kierunkowym rzutu l'. Wstawiając np. $z=-1$, możemy zapisać rozwiązanie: $\begin{cases} x=-18t \\ y=5+15t \\ z=-t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.$\square$

W uzyskanych rozwiązaniach pojawiły się trzy różne (?) wyniki – czy co możliwe? Oczywiście, że nie!

Ćwiczenie 5. *Udowodnij, że równania*

$$\begin{cases} x=-18t \\ y=5+15t \\ z=-t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}\ ,\qquad \begin{cases} x+y-3z-5=0 \\ 4x+5y+3z-25=0 \end{cases}\qquad i\qquad \begin{cases} x=\frac{18}{11}+\frac{18}{11}t \\ y=\frac{40}{11}-\frac{15}{11}t \\ z=\frac{1}{11}+\frac{1}{11}t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

są równaniami tej samej prostej.

Wskazówka do powyższego ćwiczenia: jeżeli dwie proste przechodzą przez punkty A i B, gdzie $A\neq B$, to są równe. A może lepiej niech moja wskazówka nie prowadzi Was w jakimś konkretnym kierunku, może sami wymyślicie inne sposoby sprawdzenia, czy dwie dane proste są sobie równe?

Ćwiczenie 6. *Używając różnych sposobów, wyznacz rzut prostej* $\frac{x-4}{2}=1-y=2z$ *na płaszczyznę* $x+3y+2z-2=0$.

Odp. $\begin{cases} x+y-2z-5=0 \\ x+3y+2z-2=0 \end{cases}$.

2.6. Granica funkcji

Zobaczmy, jak różne sposoby rozwiązywania można wykorzystać do obliczania pewnych granic.

Zadanie 6. *Oblicz*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right).$$

Sposób 1. Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika, twierdzenie de l'Hospitala staje się przydatne:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos x + 4\cos x - 4x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x} = \frac{1}{6}.\Box$$

W powyższym rozwiązaniu, po dwukrotnym zastosowaniu twierdzenia de l'Hospitala, można podzielić licznik i mianownik przez $\sin x$, aby skorzystać z własności $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Używając tego przekształcenia możemy uznać, że otrzymujemy kolejny sposób rozwiązania tego zadania:

Sposób 2.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2 + \frac{4\cos x}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)} - x^2} = \frac{1}{2 + \frac{4\cdot 1}{1} - 0^2} = \frac{1}{6}.\Box$$

Do obliczenia granicy można również wykorzystać rozwinięcie funkcji $f(x) = \sin x$ w szereg Taylora:
Sposób 3. $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$. Stąd:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots)}{x^2(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{7!} - \cdots}{x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{120} - \cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + \frac{x^4}{7!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots} = \frac{1}{6}.\Box$$

Uwaga: nieskończone sumy w liczniku i mianowniku ostatniego ułamka są rozwinięciem w szereg Taylora ciągłych funkcji. Stąd mogliśmy wywnioskować, że

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{120} + \frac{x^4}{7!} - \frac{x^6}{9!} + \cdots\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right) = 0.$$

Wszystkie dotychczasowe rozwiązania zadania 6 wykorzystywały pewne elementy rachunku różniczkowego – czy to było twierdzenie de l'Hospitala, czy rozwinięcie funkcji w szereg Taylora. Tę granicę można również obliczyć bez korzystania z nich, bazując między innymi na wzorze $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. Rozwiązanie będzie nieco karkołomne, ale kto upartemu zabroni?

Sposób 4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3}\right)}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\cdot\left(\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{3}\right)}{9\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2\sin\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3 - 4\sin^2\frac{x}{3}} + \frac{\frac{4}{27}\cdot\frac{\sin^3\frac{x}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^3}}{\frac{\sin x}{x}}\right).$$

Niech $g = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2\sin x}$. Traktując początek i koniec powyższego wyrażenia jako równanie i zakładając, że szukana granica istnieje, po wyliczeniu granic w równaniu mamy:

$$g = \frac{1}{3}g\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{27} \Leftrightarrow \frac{8}{9}g = \frac{4}{27} \Leftrightarrow g = \frac{1}{6}.\Box$$

Teraz proponujemy znaleźć różne sposoby obliczenia następujących granic:

Ćwiczenie 7. *Obliczyć granice:*

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}, \quad 2.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right).$$

Odp. 1. 1; 2. 0.

2.7. Całka trygonometryczna

Całkowanie najprostszych funkcji elementarnych jest dość schematyczne. Nawet jeśli nie możemy zastosować bezpośrednio gotowych wzorów, to i tak całki często są „stworzone” do obliczenia ich jednym sposobem (inne sposoby byłyby wysoce nieefektywne lub niemożliwe do zastosowania). W ten schemat wpisują się m. in. całki, będące iloczynem wielomianu oraz którejś z funkcji $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, wykładniczej lub logarytmicznej – całki tego typu można całkować przez części, na przykład:

$$\int (x^3 - x)\cos x dx, \quad \int (2x^2+1)3^x dx, \quad \int (49x^6 - 4x^3)\ln x dx.$$

Z kolei całki, w których argument x występuje tylko w postaci $f(x)$ oraz pojawia się w nich jeszcze tylko $f'(x)dx$, nadają się do całkowania przez podstawienie, na przykład:

$$\int (\sin^4 x - 3\sin^2 x)\cos x dx, \quad \int \frac{dx}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}, \quad \int 4^{e^x} e^x dx.$$

Piękno (dla wielu przekleństwo) całek polega na tym, że całkowanie względnie prosto wyglądającej funkcji może nie być łatwe. Wtedy jednak w grę może wejść więcej sposobów rozwiązywania.

Zadanie 7. *Oblicz*

$$\int \frac{dx}{\cos x}.$$

W pierwszym i drugim rozwiązaniu skorzystamy z następującej całki:

$$\int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{1-t+1+t}{(1-t)(1+t)}dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) dt = \ln|t+1| - \ln|t-1| + c = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c.$$

Pierwszy sposób to skorzystanie z podstawienia uniwersalnego.

Sposób 1. Jeśli $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, to

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Mamy więc

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + c.\square$$

Kolejny sposób to typowe podstawienie.

Sposób 2.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x} = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + c.\square$$

Ponieważ

$$\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x - (1+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x},$$

możemy wykorzystać jeszcze inne podstawienie w kolejnym rozwiązaniu:
Sposób 3.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\frac{1+\sin x}{\cos x}}{\frac{1+\sin x}{\cos x}} dx = \int \frac{\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{1+\sin x}{\cos x}} dx = \left| \begin{array}{c} t = \frac{1+\sin x}{\cos x} \\ dt = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c =$$

$$= \ln \left| \frac{1+\sin x}{\cos x} \right| + c. \square$$

I jeszcze jedno rozwiązanie, tym razem z wykorzystaniem tożsamości: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ oraz $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$:
Sposób 4.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \int \frac{dx}{2 \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \cos^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \\ dt = \frac{dx}{2 \cos^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c. \square$$

Pojawiły się różnie zapisane wyniki w różnych rozwiązaniach. Podobnie jak w zadaniu 5, tutaj też zachęcam do sprawdzenia poprawności obliczeń – sprowadzi się to do sprawdzenia pewnych tożsamości trygonometrycznych.

Ćwiczenie 8. *Dla* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$, *udowodnij tożsamości:*

$$\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right)^2 = \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \left(\frac{1+\sin x}{\cos x} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Ćwiczenie 9. *Wykorzystując jak najwięcej różnych sposobów, oblicz:*

$$1. \int \frac{dx}{\sin x}, \qquad 2. \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

Odp. 1. $\ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c$; 2. $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + c$.

3. Podsumowanie

Wszystkie zadania z pracy zostały rozwiązane co najmniej trzema sposobami. Przeglądając program kształcenia z matematyki na typowym kierunku studiów technicznych, znajdziemy znacznie więcej zadań, które można rozwiązywać chociażby dwoma sposobami. Przykładowo, w podstawowym kursie z macierzy pojawiają się następujące zadania:

1. Obliczanie wyznacznika „dużych" macierzy kwadratowych (rozwinięcie Laplace'a lub doprowadzenie za pomocą przekształceń elementarnych do wyznacznika macierzy diagonalnej czy blokowej, czy też

łączenie obu sposobów), na przykład oblicz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Odp. -14.

2. Obliczanie rzędu macierzy (z definicji poszukując największego niezerowego minora lub doprowadzając macierz do postaci schodkowej przy wykorzystaniu przekształceń elementarnych), na przykład oblicz rząd macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odp. 3.

3. Wyznaczanie macierzy odwrotnej (ze wzoru $A^{-1} = \frac{1}{detA} A_D^T$ lub za pomocą przekształceń elementarnych), na przykład wyznacz macierz odwrotną do

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Odp. $\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

4. Rozwiązanie równania macierzowego (poprzez wyznaczenie niewiadomej macierzy X za pomocą przekształceń algebraicznych lub za pomocą metody przewidywań), na przykład niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rozwiąż równanie $AXB = C$ z niewiadomą macierzą X.

Odp. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Bardziej dociekliwy czytelnik z pewnością znajdzie i w innych działach matematyki zadania, które może rozwiązać różnymi sposobami.

Praca dydaktyczna na uczelni różni się nieco od dydaktyki w szkołach. Większa autonomia jest sporym udogodnieniem. Począwszy od ustalania treści zajęć, czy nawet sporej grupy przedmiotów, skończywszy na względnie swobodnym ustalaniu szczegółów zasad zaliczania przedmiotów. Wprawdzie ukierunkowanie w ostatnich latach edukacji na zaliczanie efektów kształcenia nieco zawęziły pole do popisu, ale ma też niewątpliwe zalety, między innymi ułatwienie dokładnego porównywania przebytych etapów studiowania na poszczególnych uczelniach.

Obecnie ocenianie matury „pod klucz” powoduje często przygotowywanie uczniów nie tyle pod kątem opanowania i zrozumienia przedmiotu, co wbicia się w schemat gwarantujący możliwie jak najwyższą ocenę.

Dopiero w trakcie studiów okazuje się, kto się uczył „tylko” dla ocen bardzo dobrych, a kto dobrze rokuje na przyszłość w danej dziedzinie. Tacy wyjątkowi studenci różnią się się od przeciętnych nie tyle umiejętnością rozwiązywania większej liczby zadań, co kreatywnością przy rozwiązywaniu. Moi studenci, którzy mieli ten błysk, polegający na nieszablonowym (niekoniecznie optymalnym) podejściu do rozwiązywania zadań, dzisiaj bardzo dobrze rozwijają się w wybranych przez nich dziedzinach. Kilku z nich w młodym wieku uzyskało habilitacje z matematyki. Dlatego, nawet jeśli nie ma to wpływu na ocenę, warto zachęcać studentów do kreatywnego podejścia w pozornie oczywistych sytuacjach. Rozwiązanie jednego zadania wieloma sposobami też może mieć większy wpływ na rozwój niż „przebiegnięcie” przez kilka sztampowych zadań tylko dlatego, że podobne mają pojawić się na kolokwium czy egzaminie.

Kreatywność kosztem schematycznego podejścia do tematu – aby to się udało, musi się zmienić jeden nawyk, nabyty z powodu nieodpowiednich bodźców, zarówno szkolnych, jak i pozaszkolnych: to uczenie się dla ocen. Jeśli uczeń czy student nie zrozumie tego, to nadal problemem będzie nie tylko tłumienie kreatywności, ale także uczenie się „na ocenę”, ściąganie czy nagminne w czasie pandemii, wspomaganie zewnętrzne. Oczywiście, liczba godzin przeznaczonych na matematykę może nie być wystarczająca, ale wykładowca, wpływając na studenta, choćby odpowiednio przygotowanym sposobem oceniania, może ułatwić studentowi wybór kreatywnej drogi rozwoju.