MINUT 2023 (5), s. 183–194
ISSN 2719-3063

Katarzyna ADRIANOWCZ

Katedra Zastosowań Matematyki i Metod Sztucznej Inteligencji, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Macierze odwrotne. Część 1 – definicje, własności, wyznaczanie macierzy odwrotnych z definicji

Streszczenie. Artykuł przeznaczony jest dla studentów kierunków inżynierskich potrzebujących bazowej wiedzy z algebry liniowej i omawia pojęcie macierzy odwrotnej bez odwoływania się do przestrzeni liniowych. Definicja macierzy odwrotnej została dokładnie omówiona i zilustrowana przykładami. Podano najważniejsze własności i twierdzenia wraz z wyjaśnieniami i dowodami. Pokazano, jak wykorzystać definicję macierzy odwrotnej do jej wyznaczania. Oprócz przykładów rozwiązanych krok po kroku podane zostały zadania do samodzielnego rozwiązania wraz z odpowiedziami.

Słowa kluczowe: macierz, macierz odwracalna, macierz odwrotna, odwracanie macierzy.

1. Definicja macierzy odwrotnej oraz co z niej wynika, a co nie

W pracy do zapisu macierzy stosowane są wielkie litery pisane czcionką bold oraz nawiasy kwadratowe. Małymi literami oznaczane są elementy macierzy.

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ – oznacza macierz kwadratową stopnia } n.$$

Elementami macierzy mogą być zarówno liczby rzeczywiste, jak i zespolone.

Zakładamy, że Czytelnik zna podstawowe pojęcia związane z macierzami i wyznacznikami, potrafi wykonywać działania na macierzach (mnożenie macierzy jest szczególnie ważne) oraz obliczać wyznaczniki. Potrzebną wiedzę Czytelnik może znaleźć w podręcznikach algebry liniowej na przykład [4], [3]. Natomiast w książce [2] podane są bardziej zaawansowane wiadomości, w których macierze odwrotne omawiane są w kontekście przestrzeni liniowych.

Autor korespondencyjny: K.Adrianowicz (katarzyna.adrianowicz@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 08.08.2023.

Definicja 1. *Jeżeli dla macierzy kwadratowej* $\mathbf{A}$*, stopnia* n*, istnieje macierz* $\mathbf{B}$*, która spełnia zależność*

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I}_n, \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{I}_n$ *oznacza macierz jednostkową stopnia* n*, to macierz* $\mathbf{A}$ *nazywamy* ***odwracalną****, a macierz* $\mathbf{B}$ *nazywamy* ***macierzą odwrotną*** *do macierzy* $\mathbf{A}$ *i oznaczamy* $\mathbf{A}^{-1}$*.*

Zatem, jeżeli macierz $\mathbf{A}$ jest odwracalna, to istnieje $\mathbf{A}^{-1}$ i zachodzi $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I}$.

Poniżej podajemy kilka istotnych uwag dotyczących powyższej definicji.

1. Z podanej definicji wynika, że **tylko** macierze **kwadratowe** mogą mieć odwrotne.
2. Z definicji nie można wnioskować, że jeżeli macierz jest kwadratowa, to ma odwrotną!
   Wiadomo skądinąd (uściśli to podane później twierdzenie 2), że są takie macierze kwadratowe, które odwrotnych nie mają.
3. Macierz $\mathbf{A}^{-1}$ jest macierzą kwadratową tego samego stopnia co macierz $\mathbf{A}$. W przeciwnym razie mnożenie $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ nie byłoby wykonalne.
4. Zapis $\mathbf{A}^{-1}$ jest jedynie sposobem oznaczania macierzy odwrotnej. Pomimo że wygląda jak potęgowanie **nie oznacza** podnoszenia do potęgi!
5. Jeżeli macierz $\mathbf{B}$ jest macierzą odwrotną do $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}$) to równocześnie $\mathbf{A}$ jest odwrotną do $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{A}$). Macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są wzajemnie odwrotne.

Podana definicja pozwala na łatwe sprawdzenie, czy jedna ze znanych macierzy jest odwrotną do drugiej.

Przykład 1. Sprawdźmy, czy macierz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&0&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ jest odwrotna do $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&0&-1&1\\-1&0&2&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$.

W tym celu wystarczy wykonać mnożenie:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&0&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&-1&1\\-1&0&2&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\mathbf{I}_4,$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&-1&1\\-1&0&2&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&0&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\mathbf{I}_4.$$

Dostaliśmy macierze jednostkowe, więc spełniony jest warunek (1) definicji, czyli macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą odwrotną do $\mathbf{B}$ tzn. $\mathbf{A}=\mathbf{B}^{-1}$.

Przykład 2. Sprawdźmy, czy macierze $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ są wzajemnie odwrotne.

Obliczając iloczyn $\mathbf{A_1} \cdot \mathbf{B_1}$, otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{4} & \frac{5}{2} \\ -\frac{19}{12} & -1 \end{bmatrix}.$$

Nie trzeba obliczać drugiego iloczynu $\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A}_1$, bo już $\mathbf{A_1} \cdot \mathbf{B_1}$ nie spełnia warunku (1) . Wystarczyło obliczyć jeden element macierzy $\mathbf{A_1} \cdot \mathbf{B_1}$, aby przekonać się, że nie będzie to macierz jednostkowa, czyli ani macierz $\mathbf{A}_1$ nie jest odwrotna do $\mathbf{B}_1$, ani $\mathbf{B}_1$ nie jest odwrotna do $\mathbf{A}_1$.

Z definicji macierzy odwrotnej nie da się wywnioskować, ile macierzy $\mathbf{B}$ może spełniać warunek (1). Jednak poniższe twierdzenie uściśla – taka macierz, jeśli istnieje, to jest tylko jedna.

Twierdzenie 1. *Jeżeli dwie macierze $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ są odwrotne do macierzy $\mathbf{A}$, to są identyczne $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$.*

Dowód. Skoro $\mathbf{B}_1$ jest odwrotna do $\mathbf{A}$, to $\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, gdzie $\mathbf{I}$ to macierz jednostkowa tego samego stopnia co pozostałe. Mnożąc obie strony tej równości z prawej strony przez macierz $\mathbf{B}_2$, otrzymujemy

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad | \cdot \mathbf{B}_2,$$

$$(\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{B}_2,$$

$$\mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_2) = \mathbf{B}_2.$$

Ponieważ $\mathbf{B}_2$ jako odwrotna do $\mathbf{A}$ spełnia $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_2 = \mathbf{I}$, więc

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2.$$

□

W uwagach do definicji znalazło się stwierdzenie 2 mówiące, że są takie macierze kwadratowe, które nie mają odwrotnych.

Przykład 3. Macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ nie jest macierzą odwracalną – nie ma odwrotnej.

Niech $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ oznacza dowolną macierz stopnia trzeciego.

Ponieważ w macierzy $\mathbf{A}$ druga kolumna składa się z samych zer, to w iloczynie macierzy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ druga kolumna też będzie składać się z samych zer (nie ma potrzeby wyliczania pozostałych elementów):

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & 0 & . \\ . & 0 & . \\ . & 0 & . \end{bmatrix}.$$

To znaczy, że $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \neq I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Czyli dla żadnej macierzy stopnia trzeciego nie jest spełniony warunek (1) definicji i macierz $\mathbf{A}$ nie jest odwracalna.

Jak sprawdzić, czy rozważana macierz ma odwrotną, w inny sposób niż próbując ją wyliczyć? Wygodnym i łatwym sposobem jest wykorzystanie poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Macierz kwadratowa* $\mathbf{A}$ *jest macierzą odwracalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest macierzą nieosobliwą, czyli ma wyznacznik* $\det \mathbf{A}$ *różny od zera.*

Dowód. Łatwo wykazać, że z odwracalności macierzy wynika jej nieosobliwość.
Skoro macierz $\mathbf{A}$ jest odwracalna, to $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Wiadomo, że $\det \mathbf{I} = 1$, więc $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = 1 \neq 0$. Na podstawie twierdzenia Cauchy'ego[1] $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} \neq 0$, czyli $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Do udowodnienia, że każda nieosobliwa macierz jest odwracalna, można wykorzystać przekształcenia elementarne lub dopełnienia algebraiczne. Oba te pojęcia omawiane są w drugiej części pracy. Tam również znajdzie się uzasadnienie prawdziwości podanego twierdzenia. Dowód w oparciu o przekształcenia elementarne można znaleźć w pracy [1] na str. 95, a dowód wykorzystujący dopełnienia algebraiczne w [2] na str. 240. □

Matematycznie, można powiedzieć, że **warunkiem koniecznym** do tego, aby macierz była odwracalna jest, aby była kwadratowa. Natomiast **warunkiem wystarczającym** jest, aby była nieosobliwa.

Przykład 4. Sprawdzić, które z podanych macierzy są odwracalne:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Już na pierwszy rzut oka widać, że macierz $\mathbf{A}_4$ nie jest kwadratowa, więc nie spełnia warunku koniecznego, czyli nie może być odwracalna.
Pozostałe macierze są kwadratowe, czyli spełniają warunek konieczny. Aby sprawdzić, czy spełniają również warunek wystarczający, trzeba obliczyć ich wyznaczniki.

Krótki kurs obliczania wyznaczników podany jest w [5].

Macierze $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ nie są odwracalne, ponieważ $\det \mathbf{A}_1 = 0$ i $\det \mathbf{A}_2 = 0$. $\det \mathbf{A}_3 = 3^4$, więc macierz $\mathbf{A}_3$ jest odwracalna i istnieje $\mathbf{A}_3^{-1}$. Osobnym problemem jest znalezienie macierzy $\mathbf{A}_3^{-1}$.

Istnieje kilka sposobów wyliczania macierzy odwrotnych. W tej pracy omawiamy wyznaczanie macierzy odwrotnych z definicji.

[1] Dla macierzy kwadratowych $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ tego samego stopnia zachodzi $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

2. Wyznaczanie macierzy odwrotnej z definicji

Mając daną macierz $\mathbf{A}$, znamy jej stopień i jej wszystkie elementy. Szukana macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$, zgodnie z definicją, ma ten sam stopień co $\mathbf{A}$ i spełnia równość (1). Możemy potraktować elementy macierzy $\mathbf{A}^{-1}$ jako niewiadome, a zależność (1) przekształcić w układ równań i rozwiązać go.

Przyjrzyjmy się, jak to działa, rozwiązując przykład.

Przykład 5. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ponieważ macierz $\mathbf{A}$ jest stopnia drugiego, to szukana macierz $\mathbf{A}^{-1}$ też będzie miała wymiar 2×2. Będzie się składać z czterech elementów, które traktujemy jako niewiadome $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$.

Aby $\mathbf{A}^{-1}$ była odwrotną do $\mathbf{A}$ musi spełniać warunek (1) definicji

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_2, \tag{2}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Po wymnożeniu macierzy po lewej stronie otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 2x + 3z & 2y + 3t \\ -x + 2z & -y + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Równość macierzy oznacza, że ich elementy są identyczne (równe), czyli

$$\begin{cases} 2x + 3z = 1 \\ 2y + 3t = 0 \\ -x + 2z = 0 \\ -y + 2t = 1 \end{cases}.$$

W ten sposób wyjściowe równanie macierzowe (3) zamieniliśmy na układ równań liniowych, łatwy do rozwiązania.

Ten układ można rozdzielić na dwa niezależne układy:

$$\textbf{a)} \begin{cases} 2x + 3z = 1 \\ -x + 2z = 0 \end{cases} \qquad \textbf{b)} \begin{cases} 2y + 3t = 0 \\ -y + 2t = 1 \end{cases}.$$

Każdy z nich da się rozwiązać, stosując dowolną znaną metodę – podstawiania, przeciwnych współczynników lub wyznacznikową. Po wyznaczeniu wartości poszukiwanych niewiadomych

$$\textbf{a)} \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ z = \frac{1}{7} \end{cases} \qquad \textbf{b)} \begin{cases} y = -\frac{3}{7} \\ t = \frac{2}{7} \end{cases}$$

można zbudować z nich macierz

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}.$$

Ostatnim krokiem przy wyznaczaniu macierzy odwrotnej powinno być zawsze[2] **sprawdzenie**, czy rzeczywiście otrzymana macierz spełnia (2).

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{2}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathbf{I}_2,\qquad \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{2}{7}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathbf{I}_2.$$

Sprawdzenie[3] wypadło pozytywnie, macierz odwrotna została znaleziona.

Zobaczmy, jak wygląda stosowanie definicji do wyznaczania macierzy odwrotnej dla macierzy stopnia trzeciego.

Przykład 6. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\3&-2&-1\end{bmatrix}$.

Szukamy macierzy trzeciego stopnia: $\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$.

Równanie macierzowe, wynikające z definicji

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{I}_3,$$

$$\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&2\\3&-2&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

jest równoważne równaniu

$$\begin{bmatrix}2a-d+g&2b-e+h&2c-f+i\\d+2g&e+2h&f+2i\\3a-2d-g&3b-2e-h&3c-2f-i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Wynika z niego układ dziewięciu równań liniowych o dziewięciu niewiadomych, który można rozdzielić na trzy część:

$$\textbf{a)}\begin{cases}2a-d+g=1\\d+2g=0\\3a-2d-g=0\end{cases}\qquad\textbf{b)}\begin{cases}2b-e+h=0\\e+2h=1\\3b-2e-h=0\end{cases}\qquad\textbf{c)}\begin{cases}2c-f+i=0\\f+2i=0\\3c-2f-i=1\end{cases}.$$

Rozwiązujemy te układy równań, wyliczając wszystkie dziewięć niewiadomych:

$$\textbf{a)}\begin{cases}a=-1\\d=-2\\g=1\end{cases}\qquad\textbf{b)}\begin{cases}b=1\\e=\frac{5}{3}\\h=-\frac{1}{3}\end{cases}\qquad\textbf{c)}\begin{cases}c=1\\f=\frac{4}{3}\\i=-\frac{2}{3}\end{cases}.$$

[2] Zgodnie z zasadą: każdy może się pomylić, ale inżynierem nie powinien zostać ktoś, kto nie weryfikuje swoich obliczeń.
[3] Mając pewność, że macierz jest odwracalna wystarczy sprawdzić tylko jedną z równości $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$ lub $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I}$.

Z wyliczonych elementów budujemy macierz $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ i po wykonaniu sprawdzenia:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mamy pewność, że znaleziona macierz jest macierzą odwrotną do $\mathbf{B}$.

Przykład 7. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zgodnie z definicją mamy $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

Po wykonaniu mnożenia

$$\begin{bmatrix} 2a+2d+g & 2b+2e+h & 2c+2f+i \\ a+d-2g & b+e-2h & c+f-2i \\ a+d & b+e & c+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

musimy wyliczyć dziewięć niewiadomych z następujących równań:

$$\textbf{a)} \begin{cases} 2a+2d+g=1 \\ a+d-2g=0 \\ a+d=0 \end{cases} \qquad \textbf{b)} \begin{cases} 2b+2e+h=0 \\ b+e-2h=1 \\ b+e=0 \end{cases} \qquad \textbf{c)} \begin{cases} 2c+2f+i=0 \\ c+f-2i=0 \\ c+f=1 \end{cases} .$$

Skupmy się na pierwszym układzie. Podstawiając $d = -a$ (wyznaczone z trzeciego równania) do pierwszego i do drugiego równania otrzymujemy

$$\begin{cases} 2a-2a+g=1 \\ a-a-2g=0 \\ d=-a \end{cases} .$$

Z pierwszego równania wynika, że $g = 1$, a z drugiego, że $g = 0$ – SPRZECZNOŚĆ.

Z otrzymanej sprzeczności jednoznacznie wynika, że badana macierz nie jest odwracalna, nie ma macierzy odwrotnej!

Mogliśmy oszczędzić sobie pracy, gdybyśmy na początku zadania sprawdzili, czy spełniony jest warunek wystarczający istnienia macierzy odwrotnej, czyli czy podana macierz jest nieosobliwa (ma wyznacznik różny od zera). W tym przykładzie macierz $\mathbf{C}$ jest osobliwa, bo $\det \mathbf{C} = 0$.

W przypadku macierzy stopnia czwartego (lub wyższych) wyznaczanie macierzy odwrotnej przebiega bardzo podobnie. Różni się jedynie liczbą równań liniowych, które trzeba rozwiązać. W przypadku macierzy stopnia czwartego jest to szesnaście równań z szesnastoma niewiadomymi. Dla macierzy stopnia piątego – 25 równań i niewiadomych.

Przy stosowaniu definicji do wyznaczania macierzy odwrotnej do macierzy stopnia n, należy rozwiązać układ mający n^2 równań liniowych i tyle samo niewiadomych.

3. Własności macierzy odwrotnych

W tym rozdziale przytaczamy kilka własności macierzy odwrotnych, które mogą ułatwiać ich obliczanie w szczególnych przypadkach.

Twierdzenie 3. *Dla nieosobliwej macierzy kwadratowej stopnia drugiego* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *macierz odwrotna ma postać*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Dowód. Z założenia, że macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa wynika, że jest odwracalna i $\det \mathbf{A} \neq 0$.
Wyznacznik $\det \mathbf{A} = ad - bc$, zatem:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ad}{ad-bc} - \frac{bc}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} + \frac{ba}{ad-bc} \\ \frac{cd}{ad-bc} - \frac{dc}{ad-bc} & -\frac{cb}{ad-bc} = \frac{da}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

oraz

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ad}{ad-bc} - \frac{cb}{ad-bc} & \frac{bd}{ad-bc} - \frac{bd}{ad-bc} \\ -\frac{ac}{ad-bc} + \frac{ca}{ad-bc} & -\frac{bc}{ad-bc} + \frac{ad}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iloczyny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ i $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ są macierzami jednostkowymi, więc macierz $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ spełnia definicję macierzy odwrotnej. □

Twierdzenie 3 pozwala błyskawicznie wyznaczać macierze odwrotne do macierzy stopnia drugiego.

Przykład 8. Znaleźć macierz odwrotną do $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Wyznacznik $\det \mathbf{A} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -1$.
Wystarczy podstawić elementy danej macierzy do wzoru (4):

$$\mathbf{A}^{-1} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzenie

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dowodzi, że obliczenia są poprawne.

Twierdzenie 4. *Jeżeli macierz* $\mathbf{A}$ *jest odwracalna, to* $\mathbf{A}^{-1}$ *też jest odwracalna i* $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

Dowód. Ponieważ prawdziwe są zależności

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}, \qquad \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{I},$$

więc macierz $\mathbf{A}^{-1}$ jest odwracalna i $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$. □

Twierdzenie 5. *Jeżeli* $\mathbf{A}$ *jest macierzą odwracalną, a* k *jest liczbą różną od zera, to* $k\mathbf{A}$ *jest macierzą odwracalną i* $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$.

Dowód. Niech $\mathbf{A}$ jest macierzą odwracalną i $k \neq 0$. Wtedy

$$(k\mathbf{A}) \cdot \left(\frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}\right) = k \cdot \frac{1}{k} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = 1 \cdot \mathbf{I}. = \mathbf{I} \quad \text{oraz}$$

$$\left(\frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}\right) \cdot (k\mathbf{A}) = \frac{1}{k} \cdot k \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = 1 \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I},$$

czyli spełnione są warunki definicji macierzy odwrotnej. □

Przykład 9. Wiedząc, że $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, znaleźć macierz odwrotną do $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Wystarczy zauważyć, że

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} = \sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

i na mocy powyższego twierdzenia

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Czytelnik zechce sam sprawdzić, że warunki z definicji są spełnione.

Przykład 10. Znaleźć macierz $\mathbf{X}$ wiedząc, że $3\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{B}$, gdy $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ jest macierzą z przykładu 6.

Wykorzystując twierdzenia 4 i 5 możemy przekształcić równanie $3\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{B}$:

$$\mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{3}\mathbf{B},$$

$$\mathbf{X} \overset{tw.4}{=} (\mathbf{X}^{-1})^{-1} = \left(\frac{1}{3}\mathbf{B}\right)^{-1} \overset{tw.5}{=} 3\mathbf{B}^{-1}.$$

Macierz $\mathbf{B}^{-1}$ została wyliczona w przykładzie 6, stąd

$$\mathbf{X} = 3\mathbf{B}^{-1} = 3\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 6. *Jeżeli macierze* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia i obie są odwracalne, to ich iloczyn* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ *też jest macierzą odwracalną i* $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że spełniony jest warunek (1) z definicji:

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{-1})\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I},$$

$$(\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1})\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

□

Powyższe twierdzenie 6 można uogólnić – iloczyn skończonej lub przeliczalnej liczby macierzy odwracalnych tego samego stopnia jest macierzą odwracalną, a macierz odwrotna do takiego iloczynu jest iloczynem macierzy odwrotnych pomnożonych w odwrotnej kolejności:

$$(\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2\cdot\ldots\cdot\mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{A}_1^{-1}.$$

Twierdzenie 7. *Jeżeli w macierzy diagonalnej* $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix}$ *wszystkie elementy* $d_1, d_2, \ldots d_n$ *na przekątnej głównej są różne od zera, to*

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_n \quad \text{oraz} \quad \mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{I}_n.$$

□

Przykład 11. Macierz odwrotna do macierzy $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ to $\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

4. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Wyznacz macierze odwrotne do macierzy:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, **b)** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, **c)** $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{6} \end{bmatrix}$.

d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, **e)** $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2i & 2+i \\ 2-i & -3i \end{bmatrix}$, **f)** $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2x & 3x \\ 4x & 5x \end{bmatrix}$.

Zadanie 2. Wyznacz macierze odwrotne do macierzy:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, **b)** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **c)** $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3. Wyznacz macierz $\mathbf{X}$, jeżeli wiadomo że:

a) $\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, **b)** $(\frac{1}{2}\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, **c)** $4\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

5. Odpowiedzi

Odpowiedź 1.

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, **b)** $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, **c)** $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5\sqrt{2}} \\ \frac{2}{5\sqrt{3}} & \frac{3\sqrt{2}}{10\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

d) $\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, **e)** $\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} -3i & -2-i \\ -2+i & 2i \end{bmatrix}$, **f)** $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2x} & \frac{3}{2x} \\ \frac{2}{x} & -\frac{1}{x} \end{bmatrix}$.

Odpowiedź 2.

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, **b)** $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, **c)** $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -4 \end{bmatrix}$.

Odpowiedź 3.

a) $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, **b)** $\mathbf{X} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{X} = \left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right)^{-1} = 4\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{4}{3} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Literatura

1. H. Anton, *Elementary Linear Algebra (Applications Version)* (9th ed.), Wiley International 2005.
2. M. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1976.
3. R. Grzymkowski, *Matematyka dla studentów wyższych uczelni technicznych*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 1999.
4. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.
5. K. Sawicz, *Obliczanie wyznaczników*, MINUT 2021 (3), s. 142-152.