

Elwira MATEJA-LOSA¹

¹Katedra Metod Matematycznych w Technice i Informatyce, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23,
44-100 Gliwice

Dynamika systemowa - wprowadzenie do metody

Streszczenie. Celem artykułu jest wprowadzenie Czytelnika w zagadnienia dynamiki systemowej (system dynamics) poprzez przedstawienie jej podstawowych założeń, kluczowych pojęć oraz wybranych zastosowań. Opracowanie skierowane jest do osób rozpoczynających poznawanie tej metody i pokazuje, w jaki sposób myślenie systemowe może wspierać analizę oraz lepsze zrozumienie złożonych procesów zachodzących w demografii, gospodarce, ekologii i wielu innych obszarach życia społeczno-gospodarczego.

Słowa kluczowe: dynamika systemowa, modelowanie symulacyjne, pętle sprzężeń zwrotnych, opóźnienia systemowe, granice wzrostu, VensimPLE.

1. Wstęp

Artykuł wprowadza w zagadnienie dynamiki systemowej (ang. system dynamics), prezentując jej podstawowe założenia, kluczowe pojęcia oraz praktyczne zastosowania [1,2,6]. Celem autorki jest zaciekawienie Czytelnika tą metodą poprzez wyjaśnienie jej fundamentów oraz pokazanie, jak narzędzia dynamiki systemowej sprawdzają się zarówno w analizie codziennych decyzji, jak i w zarządzaniu złożonymi projektami. W czym dokładnie może pomóc dynamika systemowa? Metoda ta pozwala zrozumieć mechanizmy stojące za powszechnymi problemami: wyjaśnia m.in., dlaczego wdrożenie jednego rozwiązania potrafi wygenerować serię nowych trudności lub dlaczego systemy – mimo ogromnych nakładów pracy – wykazują opór wobec zmian i wracają do punktu wyjścia. Tekst dowodzi, że klucz do zrozumienia tych zjawisk tkwi w samej strukturze systemu, w którym funkcjonujemy. Choć wnioski mogą brzmieć zniechęcająco, dynamika systemowa oferuje dzięki nim ogromne korzyści. Po pierwsze, chroni przed marnowaniem energii, ponieważ zamiast wdrażać pozornie oczywiste, lecz nieskuteczne poprawki, uczy wskazywania tzw. punktów dźwigni, czyli miejsc, w których niewielka interwencja wywołuje trwałą, pożądaną zmianę. Po drugie, zmienia perspektywę z obwiniania ludzi na strukturę systemu, czyli powiązania między jego elementami. Po trzecie, przekształca porażki w cenne lekcje. Każda interwencja, która nie przynosi spodziewanego efektu, staje się cenną lekcją, dostarczającą wiedzy, o tym jak działa system, jakie pętle sprzężeń są dominujące. Dynamika systemowa uczy też cierpliwości, uświadamiając, że systemy reagują

z opóźnieniami, co pozwala uniknąć chaotycznych reakcji i zyskać spokój niezbędny do wprowadzania głębokich, długofalowych rozwiązań.

Warto poznać dynamikę systemową, aby rozwinąć umiejętność myślenia systemowego – pozwala ona na holistyczne spojrzenie na problem, zamiast skupiania się jedynie na jego izolowanych fragmentach. Dzięki temu można przestać walczyć z systemem, a zacząć projektować go tak, aby pracował na naszą korzyść.

2. Wprowadzenie

Świat to nie zbiór odizolowanych części, ale sieć powiązań.

Definicja 1. *Myślenie liniowe (linearne) to proces myślowy, który przebiega krok po kroku, w uporządkowany, logiczny i sekwencyjny sposób. Cechami charakterystycznymi myślenia liniowego są:*

- **Sekwencyjność** – myśli składają się w liniową sekwencję, a każda kolejna wynika bezpośrednio z poprzedniej.
- **Logika przyczynowo-skutkowa** – opiera się na zasadzie: „Jeśli A, to B. Jeśli B, to C”.
- **Struktura i porządek** – dążenie do uporządkowania informacji w logiczne schematy.
- **Skupienie na jednym wątku** – analiza jednego problemu na raz, bez rozpraszania się wieloma pomysłami równolegle.
- **Metoda małych kroków** – wypracowywanie rozwiązań etapami następującymi bezpośrednio po sobie.

Osoba myśląca liniowo skupia się na jednym zagadnieniu, przechodząc z punktu A do punktu B, a później do C, aby dotrzeć do celu. Dobrym przykładem jest podążanie za instrukcją składania modeli lub pieczenie ciasta według przepisu – pominięcie jakiegokolwiek kroku powoduje błąd w całym procesie. Kolejnym przykładem może być rozwiązywanie równania matematycznego, gdzie wykonujemy kolejno konkretne, logiczne operacje. Zaletami myślenia liniowego są:

- Wysoka skuteczność w zadaniach strukturalnych – jest niezastąpione w naukach ścisłych, inżynierii, programowaniu i wykonywaniu procedur.
- Jasność i precyzja – prowadzi do klarownych i dobrze uzasadnionych wniosków.
- Dobra organizacja – umożliwia efektywne planowanie i realizację projektów.
- Łatwość komunikacji – proces myślowy jest prosty do wytłumaczenia i naśladowania przez innych.

Proces myślenia liniowego ma jednak również swoje wady:

- Brak elastyczności – trudność w dostosowaniu się do nieprzewidzianych zmian lub nowych informacji, które wychodzą poza przyjęty schemat.
- Ograniczenie kreatywności – blokowanie niestandardowego, innowacyjnego podejścia, które wymaga wyjścia poza ustaloną kolejność.

- Problemy ze złożonymi systemami – myślenie to zawodzi w przypadku problemów, gdzie wiele czynników wpływa na siebie nawzajem w sposób nieliniowy (np. dynamika rynków finansowych).
- Ryzyko „pułapki logicznej” – może prowadzić do poprawnego, ale trywialnego rozwiązania, podczas gdy lepsze wyjście leży poza linearnym schematem.

Myślenie liniowe jest fundamentalnym i bardzo użytecznym narzędziem tam, gdzie potrzebna jest logika i porządek. Jednak w prawdziwym świecie, pełnym złożoności, nieprzewidywalności oraz sprzężeń zwrotnych, należy stosować myślenie systemowe.

Definicja 2. *Myślenie systemowe to podejście skoncentrowane na całościowym rozumieniu zjawisk jako systemów.*

Termin „system” ma wiele definicji w zależności od kontekstu (np. w informatyce, biologii czy filozofii), ale jego rdzeń pozostaje spójny.

Definicja 3. *System to zbiór wzajemnie oddziałujących lub powiązanych ze sobą elementów (fizycznych lub abstrakcyjnych), które współpracują w celu osiągnięcia wspólnego celu, tworząc przy tym spójną całość.*

Kluczowe cechy systemu to:

- Elementy składowe – części, z których składa się system.
- Relacje (powiązania) – wzajemne oddziaływania między elementami.
- Struktura – sposób zorganizowania elementów i relacji w systemie.
- Cel – określony wynik lub funkcja, do której dąży system jako całość.
- Granice – oddzielają system od otoczenia, które może na niego wpływać.

Przykładami systemów są: układ trawienny (zbiór narządów współpracujących w procesie trawienia), system komputerowy (sprzęt i oprogramowanie działające razem), system wartości (hierarchiczny zbiór zasad jednostki lub grupy) oraz system prawny (zbiór przepisów obowiązujących w państwie). Systemem jest także szkoła, układ słoneczny, ekosystem jeziora, firma czy gospodarka kraju.

W zależności od interakcji z otoczeniem systemy dzieli się zazwyczaj na:

- Otwarte – wymieniają materię, energię lub informacje z otoczeniem (np. organizm żywy).
- Zamknięte – wymieniają energię, ale nie materię (np. zamknięta butelka z gorącą wodą).
- Izolowane – nie wymieniają niczego z otoczeniem (przypadek czysto teoretyczny).

Dynamika systemowa dostarcza narzędzi oraz sposobu myślenia, które pozwalają zrozumieć, jak te połączone elementy tworzą złożone zachowania w czasie.

3. Podstawowe elementy dynamiki systemowej

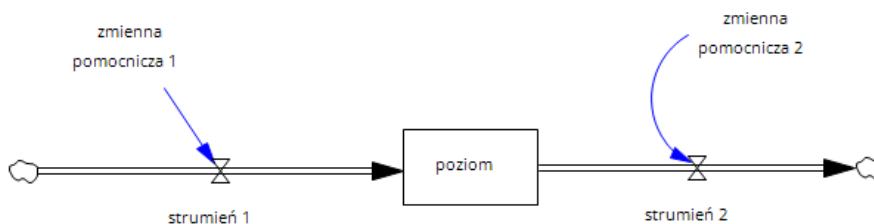
3.1. Podstawowe równanie stanu: akumulacja i przepływy

Podstawą metody dynamiki systemowej (ang. system dynamics – SD) jest przekonanie, że struktura systemu determinuje jego zachowanie w czasie. Struktura ta jest definiowana przez sieć nieliniowych sprzężeń zwrotnych pomiędzy elementami – składowymi systemu. Aby uchwycić dynamikę tych zależności, metodologia dynamiki systemowej opiera się na solidnych fundamentach matematycznych, wykorzystując przede wszystkim aparat równań różniczkowych i różnicowych. Artykuł ten ma na celu przybliżenie kluczowych aspektów matematycznych leżących u podstaw modelowania metodą dynamiki systemowej – od fundamentalnego równania stanu, aż po reprezentację diagramów przyczynowo-skutkowych i przepływów w postaci równań algebraicznych.

Sercem każdego modelu dynamiki systemowej jest koncepcja poziomów (ang. stocks lub levels) i przepływów (ang. flows lub rates).

- **Poziomy** reprezentują akumulacje (zasoby) w systemie. Przykładem może być liczba ludności danej populacji, ilość wody w basenie, zapas towaru w magazynie czy kapitał na koncie bankowym.
- **Przepływy** określają tempo zmian tych poziomów w czasie i bezpośrednio modyfikują stan zasobów. Przykładem przepływu jest kran dolewający wodę do wanny, miesięczna pensja (wpływ) i codzienne wydatki (odpływ) czy też produkcja (wpływ) i sprzedaż towaru (odpływ).

W dynamice systemowej ważną rolę pełnią oznaczenia graficzne, będące czymś więcej niż tylko schematami, są swoistym językiem wizualnym, który pozwala uchwycić strukturę złożonych systemów. Dzięki nim skomplikowane zależności można przełożyć na czytelną formę graficzną. Ułatwia to nie tylko zrozumienie problemu i wypracowanie skutecznych rozwiązań, ale też wyjaśnienie zachodzących w systemie procesów osobom, które nie są zaznajomione z tą dziedziną. W praktyce wyróżnia się dwa główne typy reprezentacji graficznej. Pierwszy to **diagram pętli przyczynowo-skutkowych (Causal Loop Diagram – CLD)**. Na rysunkach 2, 3, 4, 6, 9 przedstawiono diagramy pętli przyczynowo-skutkowych. Drugim, bardziej szczegółowym ujęciem są **diagramy zasobów i strumieni (Stock and Flow Diagram – SFD)**. W ich strukturze prostokąty reprezentują zasoby (poziomy), a strumienie wizualizuje się jako strzałki z zaworami o odpowiednio przypisanej nazwie. Chmury oznaczają źródła oraz ujścia usytuowane poza granicami modelu. Z kolei pojedyncze strzałki pełnią funkcję łączы informacyjnych, obrazując wpływ poszczególnych zmiennych na strumień lub inne elementy systemu. Diagramy zasobów i strumieni zilustrowano na rysunkach 1, 5, 7, 10.



Rysunek 1. Diagram zasobów i strumieni (SFD) wykonany w VensimPLE

W modelach dynamiki systemowej stosujemy tzw. **nazwy mnemotechniczne** (nazywane też słowami kluczowymi lub akronimami). Są to słowa lub skróty ułatwiające zapamiętywanie, utworzone z pierwszych liter kluczowych pojęć.

Matematycznie każdy poziom jest całą napływających i wypływających z niego strumieni. Fundamentalne równanie różniczkowe (zwane równaniem stanu) opisujące zmianę poziomu $L(t)$ w czasie ma postać:

$$\frac{dL(t)}{dt} = \text{Przepływ_Wejściowy}(t) - \text{Przepływ_Wyjściowy}(t), \quad (1)$$

gdzie:

- $L(t)$ to wartość poziomu w czasie t ,
- $\frac{dL(t)}{dt}$ oznacza pochodną poziomu względem czasu, czyli tempo jego zmian,
- $\text{Przepływ_Wejściowy}(t)$ i $\text{Przepływ_Wyjściowy}(t)$ to funkcje czasu opisujące intensywność wpływu i odpływu.

W postaci całkowej wartość poziomu w dowolnym momencie t wyraża się wzorem:

$$L(t) = L(t_0) + \int_{t_0}^t [\text{Przepływ_Wejściowy}(\tau) - \text{Przepływ_Wyjściowy}(\tau)] d\tau, \quad (2)$$

gdzie $L(t_0)$ jest warunkiem początkowym (wartością początkową poziomu, np. 1000 zł na koncie czy 500 sztuk towaru w magazynie). W praktyce komputerowej programy do symulacji metodą dynamiki systemowej rozwiązują to równanie numerycznie, stosując metody całkowania przybliżonego, takie jak metoda Eulera lub Rungego-Kutty, z dyskretnym krokiem czasowym dt .

3.2. Równania zmiennych pomocniczych oraz pętle sprzężeń zwrotnych

Podstawowe równanie stanu (poziomu) jest uzupełniane przez równania zmiennych pomocniczych (ang. auxiliary equations), które definiują przepływy oraz zmienne pośrednie. Przepływy (strumienie) są funkcjami poziomów, stałych, innych zmiennych pomocniczych oraz zmiennych zewnętrznych (egzogenicznych). W ten sposób w systemie powstają pętle sprzężeń zwrotnych, które stanowią najważniejszą koncepcję w metodzie dynamiki systemowej. Sprzężenia zwrotne to zamknięte cykle przyczynowo-skutkowe, w których zmiana jednego elementu wpływa na kolejne, by ostatecznie powrócić do punktu wyjścia i zmodyfikować stan początkowy.

Definicja 4. Zmienne egzogeniczne (zewnętrzne) to czynniki w modelu (np. ekonomicznym lub statystycznym), które wpływają na inne zmienne wewnątrz systemu, ale same nie podlegają ich wpływowi (pochodzą spoza analizowanego systemu).

Zmienne egzogeniczne stanowią dane wejściowe do modelu, które są ustalane poza nim. Model przyjmuje je jako „fakt” lub z góry daną wartość i bada, jak te zewnętrzne siły kształtują elementy, które chcemy wyjaśnić, czyli zmienne endogeniczne. Wartość zmiennych egzogenicznych jest niezależna od mechanizmów modelu – stanowią one przyczynę, a nie skutek zachodzących zmian.

W procesie budowy jakiegokolwiek modelu przyczynowego kluczowe jest jasne zdefiniowanie, które czynniki traktujemy jako zewnętrzne, niezależne siły napędowe (egzogeniczne), a które jako wewnętrzne wyniki działania systemu (endogeniczne). Klasycznym przykładem z ekonomii jest funkcja popytu, gdzie

zmiennymi egzogenicznymi są: dochód konsumentów, ceny dóbr substytucyjnych, gusta klientów. Z kolei dla funkcji podaży będą to ceny surowców, technologia oraz warunki pogodowe.

Definicja 5. Zmienne endogeniczne (wewnętrzne) to czynniki w modelu, które są wyjaśniane i określone wewnątrz samego systemu. Są one skutkiem działania innych zmiennych, zwykle wpływają na siebie wzajemnie i tworzą w ten sposób sieć zależności (pętle sprzężeń zwrotnych).

Można powiedzieć, że zmienne endogeniczne to wyniki działania modelu. Sam model jest projektowany po to, aby zrozumieć, co decyduje o ich wartości. W modelach ekonomicznych, statystycznych czy socjologicznych zmienne te stanowią serce całej analizy. Reagują one na zmiany czynników zewnętrznych oraz na siebie nawzajem. Warto wyobrazić sobie zmienne endogeniczne jako „bohaterów” naszego modelu – to ich historię próbujemy opowiedzieć za pomocą sił zewnętrznych (zmiennych egzogenicznych) i ich wzajemnych relacji. Przykładem zmiennych endogenicznych w modelu ekonomicznym rynku może być cena równowagi, ilość sprzedanego produktu czy ostateczny zysk firmy.

Definicja 6. Sprzężenie zwrotne to sytuacja, w której skutek oddziałuje na swoją przyczynę, tworząc zamkniętą pętlę przyczynowo-skutkową. W dynamice systemowej jest to fundamentalny mechanizm napędzający zachowanie systemów w czasie.

Rozróżniamy dwa podstawowe rodzaje pętli sprzężeń zwrotnych:

- **pętle wzmacniające** (dodatnie pętle sprzężeń zwrotnych),
- **pętle równoważące** (ujemne pętle sprzężeń zwrotnych).

Cechami charakterystycznymi **dodatniej (wzmacniającej) pętli** są:

- Samospełniający się mechanizm – wzrost jednego elementu prowadzi do dalszego wzrostu, a spadek do pogłębienia spadku.
- Efekt kuli śnieżnej – pętla działa jak „błędne koło” (w przypadku negatywnych zjawisk) lub „dobra passa” (w przypadku pozytywnych; np. zasada „bogaci się bogacą”).
- Niestabilność – powoduje wykładniczy wzrost systemu lub jego całkowite załamanie.

Oznaczenia stosowane w diagramach dynamiki systemowej:

- Strzałka od A do B oznacza relację przyczynowo-skutkową: „A wpływa na B”.
- Znak „+” przy strzałce (lub relacja dodatnia) oznacza zmianę w tym samym kierunku. Jeśli A rośnie, to B również rośnie. Jeśli A maleje, to B maleje.
- Znak „-” przy strzałce (lub relacja ujemna) oznacza zmianę w przeciwnym kierunku. Jeśli A rośnie, to B maleje. Jeśli A maleje, to B rośnie.

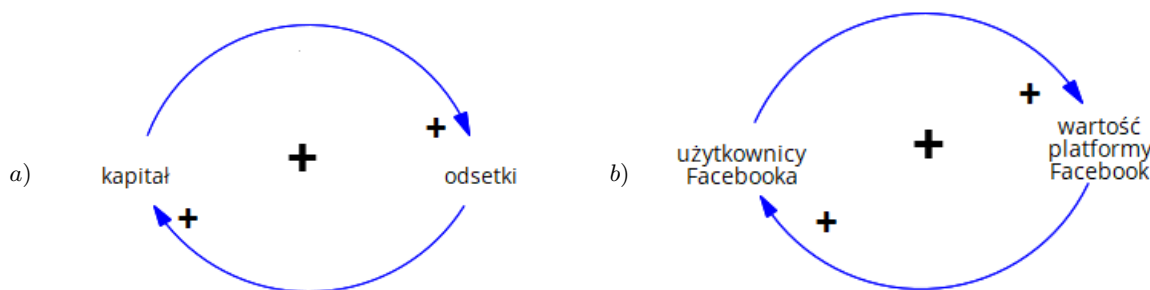
Na rysunku 2 przedstawiono dwa przykłady wzmacniających pętli sprzężeń zwrotnych. Pierwsza z nich opisuje mechanizm kapitalizacji: wyższy kapitał generuje większe odsetki, te z kolei powiększają kapitał początkowy, co w kolejnym okresie skutkuje jeszcze wyższymi odsetkami. Druga pętla ilustruje tzw. efekt sieciowy na przykładzie platformy Facebook: im więcej użytkowników posiada platforma, tym większa jest jej wartość dla odbiorców, a wyższa wartość przyciąga kolejnych użytkowników, co stale napędza

rozwój systemu.

Z kolei cechami charakterystycznymi ujemnej (równoważącej) pętli sprzężenia zwrotnego są:

- Dążenie do stanu równowagi lub określonego celu.
- Działanie na zasadzie hamulca lub regulatora (np. termostatu).
- Stabilizowanie całego systemu.

Na rysunku 3 przedstawiono dwa przykłady równoważących pętli sprzężeń. Pierwsza z nich opisuje proces regulacji temperatury: gdy temperatura w pomieszczeniu spada, system grzewczy włącza się i powoduje jej wzrost. Z kolei osiągnięcie wyższej temperatury skutkuje automatycznym wyłączeniem ogrzewania. Druga pętla ilustruje klasyczny mechanizm ekologiczny z natury (model drapieżnik–ofiara): wzrost liczby królików wywołuje przyrost populacji lisów, które polują na te gryzonie. Większa liczba drapieżników prowadzi jednak do spadku liczby ofiar, co z kolei – z powodu braku pożywienia – skutkuje zmniejszeniem populacji lisów. Mniejsza presja ze strony drapieżników pozwala następnie na ponowne odrodzenie się populacji królików.



Rysunek 2. (a) Pętla wzmacniająca (kapitał – odsetki) (b) Pętla wzmacniająca (użytkownicy Facebooka)

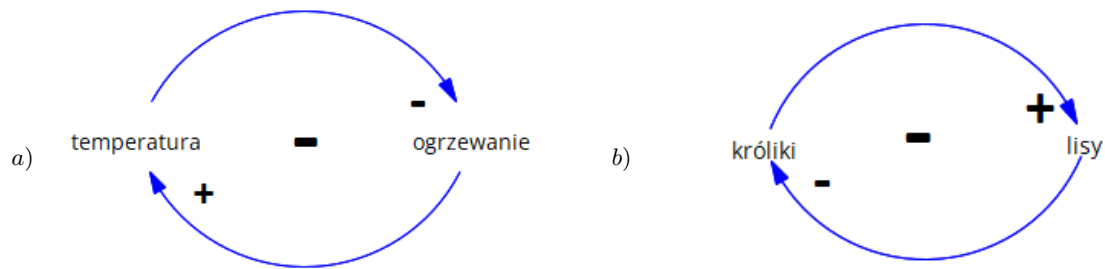
W modelach rzeczywistych rzadko występują pojedyncze pętli sprzężeń zwrotnych – najczęściej mamy do czynienia z ich współzależną siecią. Rozważmy ekosystem jeziora, w którym równolegle oddziałują na siebie pętla wzmacniająca (proces eutrofizacji) oraz pętla równoważąca co przedstawia rysunek 3.

Pętla wzmacniająca (dodatnia) działa w następujący sposób:

nawozy spływające do jeziora → więcej glonów → więcej martwej materii → więcej bakterii
zużywających tlen → mniej tlenu → więcej martwych ryb → więcej materii organicznej →

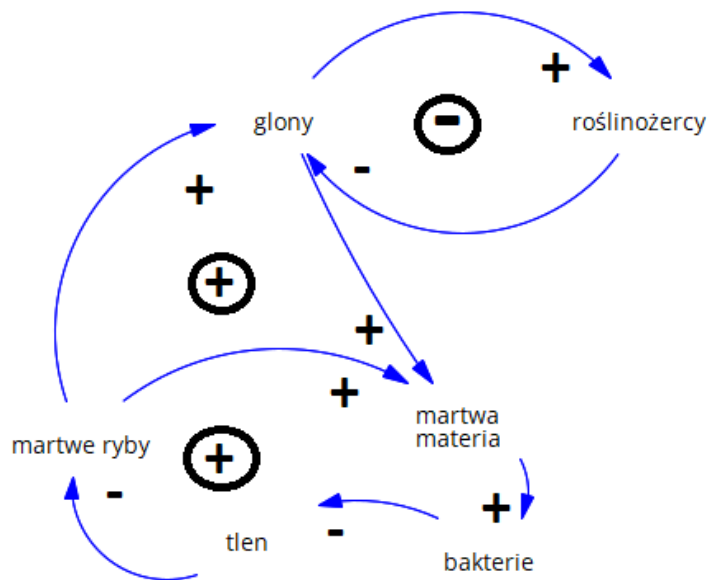
Z kolei pętla równoważąca (ujemna) stabilizuje ten sam system poprzez relację:

wzrost glonów → więcej roślinożerców → mniej glonów → mniej roślinożerców →



Rysunek 3. (a) Pętla równoważąca (temperatura – ogrzewanie) (b) Pętla równoważąca (króliki – lisy)

Definicja 7. Eutrofizacja (przeżyźnienie) to proces wzbogacania zbiorników wodnych w składniki odżywcze (głównie azot i fosfor). Prowadzi ona do masowego rozwoju glonów i sinic, a w konsekwencji do wyczerpania tlenu w wodzie i powstawania tzw. „martwych stref”, w których zamiera większość organizmów żywych.



Rysunek 4. Pętle sprzężeń dla przykładu jeziora

Podsumowując, warto zapamiętać cztery kluczowe zasady rządzące dynamiką systemową:

- Systemy jako sieci pętli – rzeczywiste obiekty rzadko są sterowane przez pojedyncze sprzężenie zwrotne; najczęściej stanowią one gęstą sieć połączonych zależności.

- Dominacja pętli – w zależności od czasu oraz zmieniających się warunków zewnętrznych, kontrolę nad zachowaniem systemu przejmują inne pętle sprzężeń.
- Synergia zachowań – ostateczne zachowanie systemu w czasie nie jest sumą pojedynczych części, lecz bezpośrednim wynikiem interakcji wszystkich istniejących sprzężeń.
- Świadomość interwencji – jakiegokolwiek działania naprawcze lub decyzyjne wprowadzane do systemu muszą bezwzględnie uwzględniać efekty sprzężeń zwrotnych, aby uniknąć efektów ubocznych.

KLUCZOWY WNIOSEK:

Aby dogłębnie zrozumieć zachowanie dowolnego systemu w czasie, należy w pierwszej kolejności stworzyć jego schemat strukturalny (np. diagram przyczynowo-skutkowy), odwzorować główne pętle sprzężeń zwrotnych oraz zidentyfikować, które z nich wykazują dominację w analizowanym momencie.

3.3. Zaawansowane mechanizmy sprzężeń: nieliniowość i opóźnienia

Nieliniowość to jeden z najważniejszych i najciekawszych aspektów dynamiki systemowej.

Definicja 8. *Nieliniowość oznacza, że relacje przyczynowo-skutkowe w systemie nie są proporcjonalne, a ich przebiegu nie da się opisać linią prostą. W efekcie mała zmiana może wywołać ogromny skutek, a duża zmiana – znikomy efekt. Przykładem takiego zachowania jest „kropla, która przelewa czarę goryczy” lub nagłe załamanie populacji danego gatunku po przekroczeniu krytycznego punktu (progu tolerancji systemu). Skutek nie jest tu prostą sumą przyczyn.*

Definicja 9. *Opóźnienia (ang. delays) to przerwy czasowe między podjęciem działania a wystąpieniem jego widocznego skutku. W systemach tworzą one tzw. „martwy czas”, w którym system kontynuuje swoje dotychczasowe zachowanie, nie reagując na już wdrożone decyzje. Opóźnienia mają fundamentalny wpływ na stabilność i sterowalność każdego systemu.*

W dynamice systemowej rozróżniamy trzy główne rodzaje opóźnień:

- **Materialne (fizyczne)** – wynikają z fizycznych i technologicznych ograniczeń procesów. Przykłady: czas budowy fabryki (1–3 lata), czas dojrzewania winnicy do pełnej produkcji (7–10 lat), czas transportu ropy naftowej tankowcami (tygodnie) lub dystrybucji produktów lotniczych, a także czas potrzebny na rekonwalescencję po chorobie (dni lub tygodnie).
- **Informacyjne** – wynikają z czasu potrzebnego na zebranie, przetworzenie i przesłanie danych. Przykłady: opóźnienie w raportowaniu wskaźników makroekonomicznych (kwartał, rok) czy opóźnienie w zauważeniu i zinterpretowaniu nowych trendów rynkowych przez analityków.
- **Decyzyjne** – wynikają z procedur administracyjnych, biurokracji oraz oporów psychologicznych ludzi odpowiedzialnych za system, np.: czas, jaki upływa od dostrzeżenia problemu do podjęcia fizycznego działania w korporacji (miesiące), czy też opór zarządu przed zmianą strategii mimo posiadania nowych, alarmujących danych.

W diagramach pętli przyczynowych w metodzie dynamiki systemowej opóźnienie oznacza się w następujący sposób:

Przyczyna → [OPÓŹNIENIE/DELAY] → Skutek

Zadanie dla Czytelnika:

Warto w tym miejscu przerwać lekturę i zastanowić się nad własnymi przykładami pętli sprzężeń zwrotnych z życia codziennego lub gospodarki. Spróbuj:

1. Zidentyfikować ich typ (Czy jest to pętla wzmacniająca, czy równoważąca?).
2. Wskazać miejsca, w których wewnątrz tych pętli naturalnie występują opóźnienia, i uzupełnić schemat o element [DELAY].

W metodzie dynamiki systemowej stosuje się opóźnienia różnego rzędu. Opóźnienie pierwszego rzędu (ang. First-Order Delay) modeluje proces, w którym stan systemu dostosowuje się wykładniczo do zmieniających się warunków, wykazując charakterystyczny czas odpowiedzi (inercję). Kluczowe z punktu widzenia zachowania systemu są bezpośrednie skutki występowania tych opóźnień. W ich wyniku można spodziewać się następujących reakcji strukturalnych:

- Opóźniona reakcja połączona z przereagowaniem – system początkowo nie wykazuje zmian, po czym reaguje zbyt gwałtownie. Klasycznym przykładem jest cykl budowlany: zauważalny wzrost popytu na mieszkania skłania deweloperów do uruchomienia nowych inwestycji. Na tym etapie pojawia się jednak opóźnienie związane z zakupem działek, procedurami administracyjnymi i samym procesem budowy (trwającym od dwóch do trzech lat). W tym czasie, ze względu na brak natychmiastowych skutków, rozpoczynanych jest wiele równoległych inwestycji. Gdy wszystkie budowy kończą się w zbliżonym czasie, na rynku pojawia się gwałtowna nadpodaż mieszkań, co w efekcie prowadzi do krachu.
- Cykliczne „przestrzeliwanie” celu – system nieustannie przekracza zadany punkt równowagi. Zjawisko to idealnie obrazuje proces sterowania temperaturą za pomocą termostatu. Gdy temperatura spada poniżej ustawionego poziomu, termostat włącza ogrzewanie. Ze względu na opóźnienie termiczne układu (czas potrzebny na nagrzanie medium i powietrza), temperatura początkowo nadal spada, mimo działającego grzejnika. Gdy system w końcu reaguje, następuje gwałtowny wzrost temperatury powyżej punktu docelowego. Termostat wyłącza grzanie, lecz z powodu bezwładności temperatura przez pewien czas wciąż rośnie, po czym proces zaczyna się powtarzać w drugą stronę.
- Efekt byczego bicia (ang. bullwhip effect) – zjawisko polegające na sukcesywnym wzmacnianiu się wahań popytu w miarę przesuwania się w górę łańcucha dostaw. Nawet minimalne zmiany w popycie konsumentów końcowych generują coraz większe i bardziej nieproporcjonalne zamówienia u dystrybutorów, hurtowników i producentów. Skutkuje to naprzemiennym gromadzeniem nadmiernych zapasów lub powstawaniem drastycznych niedoborów w poszczególnych ogniwach, co potęgowane jest przez nieefektywny przepływ informacji.

Ze względu na fundamentalne znaczenie opóźnień w strukturach dynamicznych, poniżej przedstawiono kolejne praktyczne przykłady systemów gospodarczych i społecznych wraz z analizą występujących w nich opóźnień.

Przykład 1. System ochrony zdrowia – kształcenie kadr medycznych.

W odpowiedzi na dotkliwy niedobór personelu lekarskiego zapada decyzja o zwiększeniu limitów przyjęć na studia medyczne. Ponieważ jednak pełny proces edukacyjny (studia wraz ze stażem podyplomowym)

trwa 6 lat, nowi lekarze trafiają na rynek pracy dopiero po tym okresie. Masowe zakończenie studiów przez powiększone roczniki może wywołać lokalną nadpodaż kadr. W reakcji na tę sytuację decydenci podejmują decyzję o ograniczeniu miejsc na uczelniach. Ze względu na kolejne 6-letnie opóźnienie, system po pewnym czasie znów wygeneruje niedobór, a cały cykl wejdzie w fazę oscylacji.

Przykład 2. Inwestycje w moce produkcyjne pod wpływem wzrostu popytu.

Przedsiębiorstwo odnotowuje znaczący i trwały wzrost popytu na swoje wyroby, co wymusza podjęcie decyzji o budowie nowej fabryki. Faza projektowa i wykonawcza zajmuje 3 lata. Po tym czasie nowa fabryka zostaje uruchomiona, jednak w międzyczasie rynek zdążył się już nasycić lub trend uległ odwróceniu. W efekcie nadmiarowe moce produkcyjne generują wysokie koszty stałe i straty. Po 2 latach strat zarząd podejmuje decyzję o likwidacji zakładu. W momencie, gdy fabryka zostaje fizycznie zamknięta, popyt na rynku ponownie zaczyna rosnąć, pozostawiając firmę bez możliwości produkcyjnych.

Przykład 3. Polityka monetarna państwa i procesy inflacyjne.

Gdy następuje gwałtowny wzrost inflacji, bank centralny decyduje się na podniesienie stóp procentowych. Reakcja mechanizmów rynkowych na impulsy monetarne jest jednak odłożona w czasie i wynosi zazwyczaj od 9 do 18 miesięcy. Ponieważ w pierwszych miesiącach po decyzji inflacja nadal rośnie, bank (nie widząc natychmiastowych efektów) kontynuuje zacieśnianie polityki i podnosi stopy jeszcze bardziej. Gdy skumulowane efekty podwyżek w końcu uderzają w rynek, gospodarka gwałtownie zwalnia, co prowadzi do głębokiej recesji. Bank reaguje ponownym, tym razem radykalnym obniżaniem stóp, jednak ze względu na opóźnienie transmisji monetarnej, gospodarka przez dłuższy czas pozostaje w stanie kryzysu.

Skutki zarządcze opóźnień w systemach to:

- „Inwestycje są zbyt małe!” – syndrom ten pojawia się, gdy efekty wcześniejszych nakładów kapitałowych jeszcze się nie pojawiły lub nie zostały zauważone z powodu naturalnych opóźnień w systemie.
- „Nasze działania nie przynoszą skutku!” – przekonanie to prowadzi do przedwczesnego porzucania właściwej strategii, zanim miała ona szansę zadziałać.
- „Przereagowaliśmy!” – spóźniona refleksja, która pojawia się, gdy skumulowane i opóźnione efekty wcześniejszych decyzji uderzają w system z pełną siłą.

W kontekście zarządzania opóźnieniami warto zwrócić uwagę na pułapkę błędnych wskaźników, polegającą na:

- mierzeniu nakładów (wejścia do systemu) zamiast realnych efektów (wyjścia z systemu),
- ocenianiu sytuacji wyłącznie na podstawie danych bieżących, z pominięciem długoterminowych trendów.

Rodzi się zatem zasadne pytanie: czy istnieją skuteczne metody radzenia sobie z opóźnieniami w systemach, a jeśli tak – jak one wyglądają?

Strategie radzenia sobie z opóźnieniami w systemach:

- „Mapowanie” opóźnień – precyzyjne identyfikowanie punktów bezwładności w systemie i uwzględnianie ich w strukturze modeli symulacyjnych.
- Wskaźniki wyprzedzające (ang. leading indicators) – identyfikacja i monitorowanie wskaźników pośredniczących, które reagują natychmiastowo i pozwalają przewidzieć przyszły stan systemu.

- Symulacje komputerowe – testowanie alternatywnych scenariuszy decyzyjnych w bezpiecznym środowisku modelowym uwzględniającym opóźnienia.
- Zarządzanie buforami (ang. buffer management) – celowe utrzymywanie zapasów lub zasobów buforowych, które pełnią funkcję stabilizatora systemu w okresach martwych.
- Sterowanie adaptacyjne (ang. adaptive control) – wdrożenie systemów sterowania, które automatycznie i elastycznie dostosowują swoje parametry w czasie rzeczywistym. Pozwala to zachować optymalną wydajność procesu pomimo zmian w jego dynamice czy występowania zakłóceń. Mechanizm ten opiera się na ciągłym dostrajaniu struktur zarządczych na podstawie rzeczywistych danych wejściowych.

Kluczowa zasada dynamiki systemowej

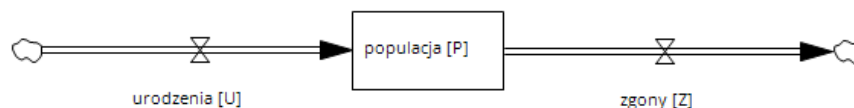
W systemach charakteryzujących się dużymi opóźnieniami sukcesu nie odnosi ten, kto sprawnie reaguje na bieżące kryzysy, lecz ten, kto potrafi trafnie antycypować problemy, które ujawnią się dopiero za kilka lat.

4. Przykłady

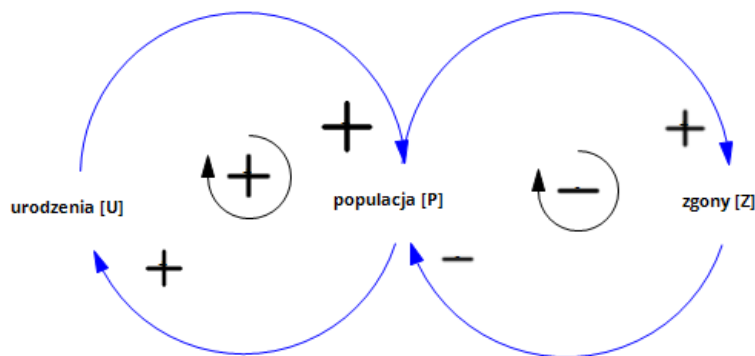
4.1. Prosty model populacji (Model 1)

W tej części rozważymy klasyczny i często omawiany w dynamice systemowej model wzrostu populacji mieszkańców hipotetycznego miasta. Będziemy go stopniowo modyfikować i rozszerzać o dodatkowe elementy, co pozwoli zobrazować czytelnikowi sam proces modelowania metodą dynamiki systemowej. Analizę rozpoczniemy od najprostszego wariantu (rysunek 5) z jednym poziomem o nazwie „populacja” – oznaczonym w modelu literą P oraz dwoma strumieniami przepływu:

- strumieniem wejściowym (zasilającym) o nazwie „urodzenia”, oznaczonym jako U ,
- strumieniem wyjściowym (wypływającym) o nazwie „zgony”, oznaczonym jako Z .



Rysunek 5. Diagram zasobów i strumieni dla Modelu 1



Rysunek 6. Struktura sprzężeń zwrotnych w Modelu 1. Widoczna pętla wzmacniająca (+), generująca wzrost oraz pętla równoważąca (-), stabilizująca system.

Podstawowe równanie stanu dla tego modelu w dynamice systemowej ma postać:

$$\frac{dP}{dt} = U - Z, \quad (3)$$

gdzie:

- P – populacja (liczba mieszkańców),
- U – urodzenia (liczba urodzeń na jednostkę czasu),
- Z – zgony (liczba zgonów na jednostkę czasu).

Jest to klasyczne równanie bilansu zasobów, które można opisać regułą: *zmiana poziomu = wpływ-odpływ*. Najczęściej zakłada się, że liczba urodzeń i zgonów jest wprost proporcjonalna do całkowitej liczby mieszkańców. Równanie modelu odpowiadające strumieniowi wejściowemu o nazwie „urodzenia” przyjmuje postać:

$$U = a * P, \quad (4)$$

gdzie:

- a – współczynnik urodzeń.

Równanie modelu odpowiadające strumieniowi wyjściowemu o nazwie „zgony” ma postać:

$$Z = b * P, \quad (5)$$

gdzie:

- b – współczynnik umieralności (śmiertelności).

Podstawiając zależności (4) i (5) do równania stanu (3), otrzymujemy:

$$\frac{dP}{dt} = a * P - b * P, \quad (6)$$

$$\frac{dP}{dt} = (a - b) * P. \quad (7)$$

Z analizy struktury matematycznej równania (7) wynikają trzy scenariusze:

- Jeśli $a > b$, to $\frac{dP}{dt} > 0$ – populacja wykazuje wzrost.
- Jeśli $a < b$, to $\frac{dP}{dt} < 0$ – populacja maleje.
- Jeśli $a = b$, to $\frac{dP}{dt} = 0$ – populacja utrzymuje się na stałym poziomie (stan równowagi).

Rozwiązanie analityczne równania (7), które jest równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych, dane jest znanym wzorem na wzrost wykładniczy:

$$P(t) = P(t_0) * e^{(a-b)t}, \quad (8)$$

gdzie $P(t_0)$ oznacza początkową wielkość populacji.

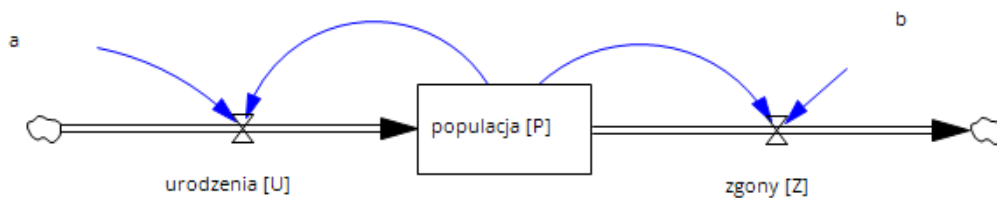
Przykład 4. Przyjmijmy jako warunek początkowy populację wynoszącą 10 000 osób, okres symulacji 10 lat oraz parametry stałe $a = 0,03$ i $b = 0,01$ (wartości te można dowolnie modyfikować w zależności od potrzeb badawczych). Podstawiając dane do wzoru (8), otrzymujemy:

$$P(10) = 10000 * e^{0,02*10} = 10000 * e^{0,2},$$

$$P(10) \approx 12214.$$

Omawiany model zaimplementowany w środowisku symulacyjnym Vensim PLE [7] przedstawia rysunek 7. Otrzymane wyniki numeryczne zebrano w tabeli 1 oraz zilustrowano na rysunku 8 (warto pamiętać, że w programie Vensim PLE, podobnie jak w większości specjalistycznego oprogramowania anglojęzycznego, jako separatora dziesiętnego używa się kropki „.” zamiast przecinka „,”).

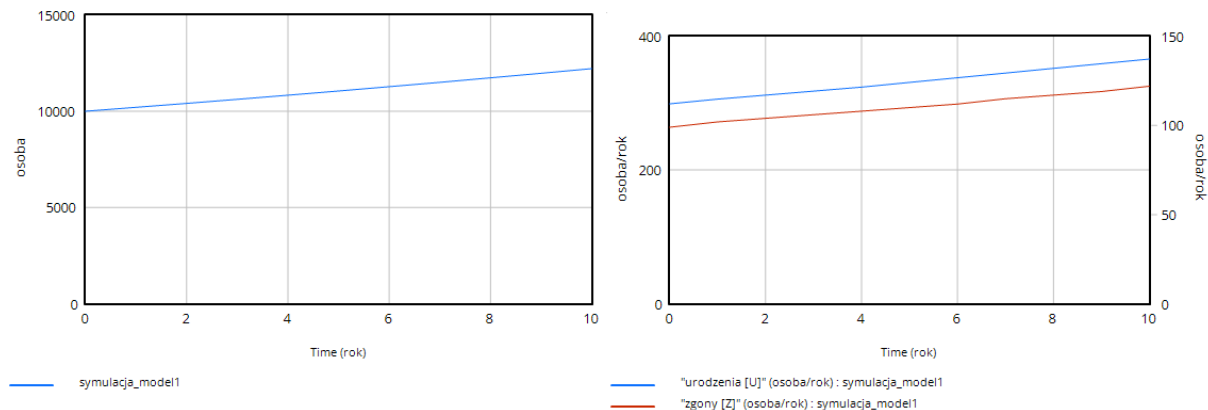
Wyniki symulacji komputerowej idealnie odzwierciedlają nasze wyliczenia analityczne. Główną zaletą modelowania symulacyjnego jest jednak fakt, że możemy niemal natychmiast rozciągnąć horyzont czasowy analizy na dowolną długość (np. 100 lat) oraz dynamicznie testować zachowanie systemu dla różnych wartości stałych a, b , czy poziomu początkowego $P(t_0)$.



Rysunek 7. Diagram zasobu i strumieni dla Modelu 1 w środowisku VensimPLE

Tabela 1. Wyniki symulacji dla Modelu 1 VensimPLE

Time (Year)	populacja [P]	urodzenia [U]	zgony [Z]
0	10000	300	100
1	10202	306.06	102.02
2	10408.1	312.243	104.081
3	10618.4	318.551	106.184
4	10832.9	324.986	108.329
5	11051.7	331.551	110.517
6	11275	338.249	112.75
7	11502.7	345.082	115.027
8	11735.1	352.053	117.351
9	11972.2	359.165	119.722
10	12214	366.421	122.14

Rysunek 8. Wykresy przedstawiające wyniki symulacji dla zmiennych P , U , Z dla Modelu 1

Uwaga 1. W niniejszym opracowaniu celowo pomijamy szczegółowe zagadnienia techniczne związane z optymalnym doбором kroku symulacji (dt), walidacją jednostek miar, wyborem komercyjnych pakietów oprogramowania dedykowanych metodzie dynamiki systemowej oraz analizą zaawansowanych algorytmów całkowania numerycznego. Nadrzędnym celem publikacji jest bowiem przejrzysta prezentacja podstaw samej metody, wprowadzenie Czytelnika w jej główne założenia filozoficzne oraz wykształcenie intuicji modelowania systemowego.

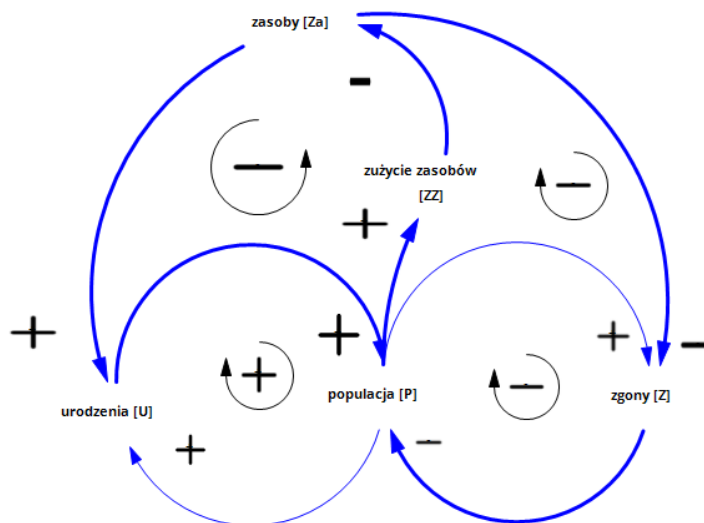
4.2. Wzbogacony model populacji (Model 2)

Prosty model wykładniczy zakłada nieograniczony wzrost, co jest mało realistyczne. W naturze nic nie rośnie w nieskończoność – zawsze pojawiają się naturalne mechanizmy regulujące, które prowadzą układ do stanu równowagi. W dynamice systemowej do odwzorowania tego zjawiska często stosuje się tzw. model logistyczny, który uwzględnia ujemne sprzężenie zwrotne ograniczające wzrost.

Rozbudujmy nasz Model 1 o dodatkowe pętle, uwzględniając koncepcję ograniczonych zasobów. Przez zasoby możemy rozumieć m.in.: zasoby naturalne, żywność, wodę, energię, powierzchnię mieszkaniową, dostępność świadczeń czy infrastrukturę miejską. Wszystkie te czynniki mają bezpośredni wpływ na po-

pulację. Choć w zaawansowanych symulacjach można uwzględnić każdy z tych zasobów osobno, w naszym Modelu 2 dokonamy ich agregacji i ujmimy je wspólnie w jeden poziom o nazwie „zasoby” [Za].

Definicja 10. *Agregacja polega na grupowaniu szczegółowych zmiennych lub procesów w większe, bardziej ogólne kategorie. Jest to kluczowy krok podczas tworzenia i upraszczania modeli, umożliwiający zastąpienie wielu drobnych elementów systemu jednym, skumulowanym wskaźnikiem.*



Rysunek 9. Struktura sprzężeń zwrotnych w modelu 2. Widoczna pętla wzmacniająca (+), generująca wzrost oraz pętle równoważące (-), stabilizujące system.

W strukturze przyczynowo-skutkowej Modelu 2 (rysunek 9) pojawiają się dwie pętle równoważące (oznaczone grubszymi strzałkami):

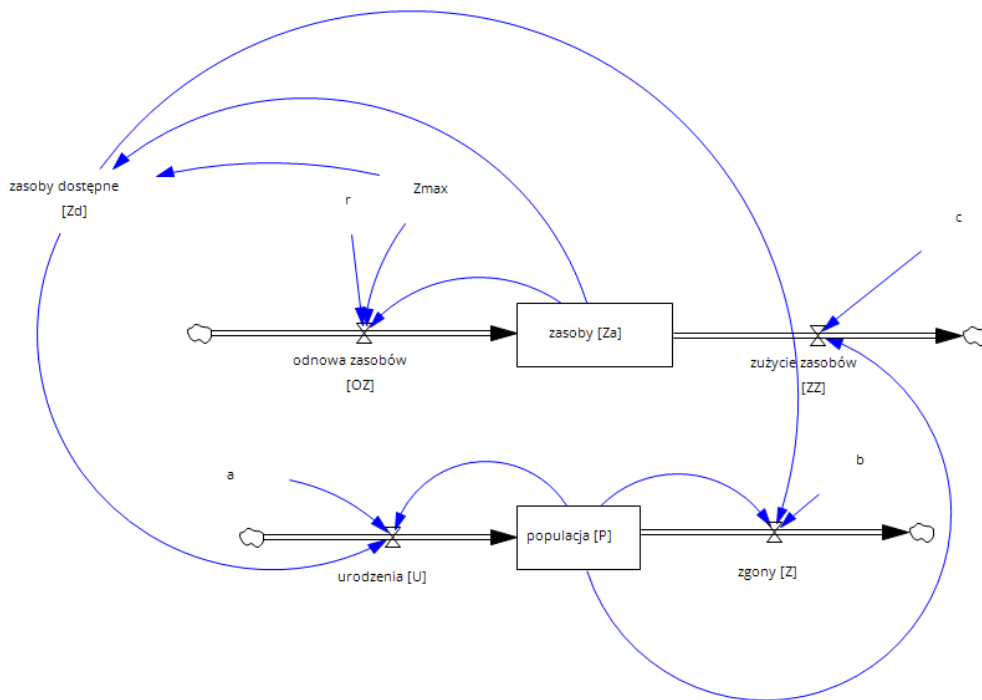
1. Pierwsza pętla równoważąca przedstawia wpływ zasobów [Za] na urodzenia [U]:

większa populacja generuje większe zużycie zasobów → większe zużycie zasobów zmniejsza ich dostępność → mniejsza ilość dostępnych zasobów ogranicza liczbę urodzeń → mniejsza liczba urodzeń hamuje dalszy przyrost populacji

2. Druga pętla równoważąca reguluje system poprzez śmiertelność:

większa populacja generuje większe zużycie zasobów → większe zużycie zasobów zmniejsza ich dostępność → deficyt zasobów wywołuje wzrost śmiertelności (więcej zgonów [Z]) → większa liczba zgonów zmniejsza liczebność populacji

Graficzną reprezentację modelu przygotowanego w programie VensimPLE przedstawia rysunek 10. Przypomnijmy, że w metodzie dynamiki systemowej poziomy (stany) umieszcza się w prostokątach, strumienie (przepływy) obrazowane są jako strzałki z zaworami („kranikami”), symbole chmurek oznaczają źródła lub ujścia zasobów znajdujące się poza granicami modelu, natomiast cienkie strzałki wskazują relacje informacyjne (wskazują, które zmienne są argumentami w równaniach innych zmiennych).



Rysunek 10. Diagram zasobów i strumienia dla Modelu 2 w środowisku VensimPLE

Równania matematyczne Modelu 2:

- Równania poziomów (stanów):

$$\frac{dP}{dt} = U - Z,$$

$$\frac{dZa}{dt} = OZ - ZZ.$$

- Równania strumieni (przepływów):

$$U = a * P * Zd,$$

$$Z = b * P * (2 - Zd),$$

$$OZ = r * (Zmax - Za),$$

$$ZZ = c * P.$$

- Zmienne pomocnicze:

$$Zd = \frac{Za}{Z_{max}}.$$

- Stałe i parametry modelu:

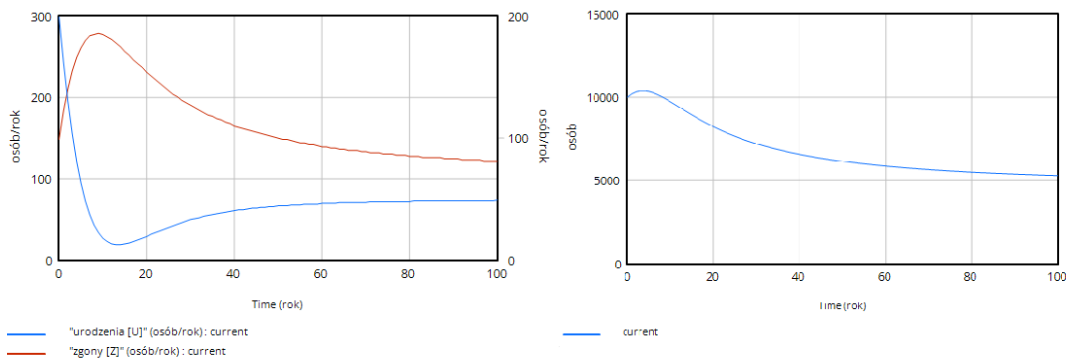
$$a, \quad b, \quad c, \quad r, \quad Z_{max}.$$

W strukturze Modelu 2 przyjęto następujące założenia:

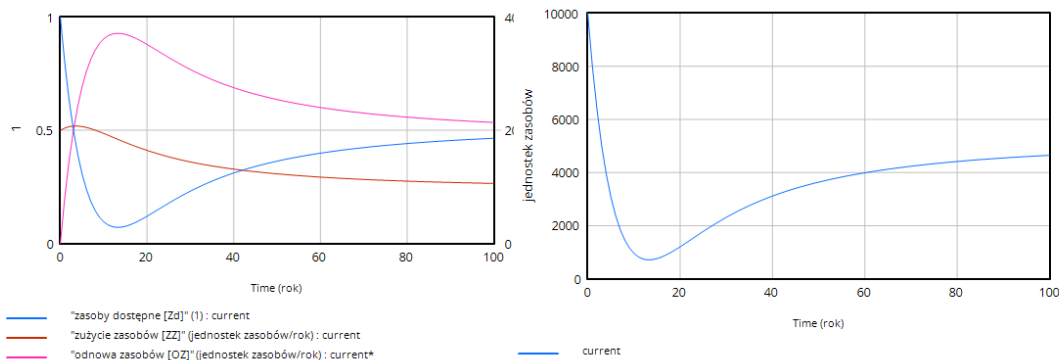
- Zasoby $[Za]$ mają zdolność do częściowego odnawiania się, co opisuje strumień „odnowa zasobów” $[OZ]$. Zmienna Z_{max} oznacza maksymalną pojemność środowiska (zasobów) i stanowi jednocześnie warunek początkowy dla poziomu $[Za]$. Parametr r reprezentuje tempo odnowy – im mniej zasobów pozostaje w systemie, tym szybciej się one regenerują.
- Zasoby $[Za]$ są konsumowane przez mieszkańców, co odzwierciedla strumień „zużycie zasobów” $[ZZ]$. Jest on regulowany przez wielkość populacji P oraz stałą c , określającą jednostkowe tempo zużycia zasobów przez jednego mieszkańca.
- Wprowadzono zmienną pomocniczą „dostępne zasoby” $[Zd]$, stanowiącą bezwymiarowy stosunek bieżących zasobów $[Za]$ do ich wartości maksymalnej Z_{max} . Jeżeli $Za = Z_{max}$, zasoby przestają się odnawiać, a wskaźnik $Zd = 1$. Zmienna ta przyjmuje wartości z przedziału $0 \leq Zd \leq 1$.
- Wskaźnik dostępności zasobów $[Zd]$ modyfikuje strumień urodzeń $[U]$ (gdzie a to bazowy współczynnik urodzeń) – spadek zasobów liniowo ogranicza liczbę nowych urodzeń.
- Niedobór zasobów stymuluje wzrost śmiertelności. Konstrukcja równania zgonów $b \cdot P \cdot (2 - Zd)$ sprawia, że gdy zasoby spadają do zera ($Zd = 0$), śmiertelność wzrasta dwukrotnie w stosunku do wartości bazowej b .

Symulację Modelu 2 przeprowadzono dla następujących warunków początkowych i parametrów:

$P(t_0) = 10\,000$ osób, $Za(t_0) = 10\,000$ jednostek, okres analizy = 100 lat, $Z_{max} = 10\,000$, $a = 0,03$, $b = 0,01$, $c = 0,2$, $r = 0,2$.



Rysunek 11. Wykresy przedstawiające wyniki symulacji dla zmiennych U , Z , P dla Modelu 2



Rysunek 12. Wykresy przedstawiające wyniki symulacji dla zmiennych Zd , ZZ , OZ , Za dla Modelu 2

Wyniki symulacji przedstawiono na rysunkach 11 i 12 oraz w tabelach 2 i 3.

Z przebiegu symulacji wynikają następujące wnioski:

- Do 8-go roku symulacji: Populacja rośnie powoli, jednak strumień urodzeń wykazuje już tendencję spadkową. Przyrost liczby mieszkańców generuje coraz większą presję na środowisko i gwałtowny wzrost zużycia zasobów, co z kolei stymuluje strumień zgonów.
- Po 8 roku symulacji: System przekracza swój punkt krytyczny. Populacja zaczyna sukcesywnie maleć i po 100 latach osiąga poziom około połowy wartości początkowej, pomimo faktu, że w końcowej fazie strumień urodzeń powoli się stabilizuje, a liczba zgonów spada.
- Stan zasobów: Zasoby $[Za]$ po 100 latach również ulegają redukcji o połowę w stosunku do stanu wyjściowego.

Podsumowanie i dalsza rozbudowa modeli

Modele 1 i 2 to uproszczone struktury dydaktyczne wprowadzające Czytelnika w środowisko dynamiki systemowej. Choć Model 2 składa się zaledwie z 2 poziomów, 4 strumieni, 1 zmiennej pomocniczej oraz 3 pętli sprzężeń (2 równoważących i 1 wzmacniającej), z powodzeniem odwzorowuje fundamentalne zachowania nieliniowe: ograniczenia środowiskowe, opór systemowy oraz dążenie do nowej równowagi. Struktura ta stanowi klasyczny przykład archetypu systemowego o nazwie „granice wzrostu” (ang. Limits to Growth), opisanego pierwotnie przez J. Forrestera oraz zespół D. Meadows w słynnych raportach dla Klubu Rzymskiego (modele World1, World2 i World3) [3–5].

Model 2 można w ramach samodzielnych badań rozbudować o kolejne elementy:

- Struktura demograficzna: podział poziomu populacji na kohorty wiekowe (np. dzieci, dorośli w wieku produkcyjnym/rozrodczym, seniorzy).
- Dekompozycja zasobów: rozbięcie zagregowanego poziomu zasobów na niezależne podsystemy (np. rynek mieszkaniowy, zasoby wodne, infrastruktura).
- Migracje: wprowadzenie strumieni wejściowych i wyjściowych odpowiedzialnych za imigrację oraz emigrację.

Włączenie tych czynników przekształca strukturę w pełnoprawny model demograficzno-gospodarczy, umożliwiający zaawansowaną analizę scenariuszową w takich obszarach jak: wyczerpywanie się zasobów naturalnych, transformacje polityki migracyjnej, fluktuacje płac, wydolność ochrony zdrowia, starzenie się społeczeństwa czy strukturalne zmiany na rynku pracy.

5. Podsumowanie

Celem niniejszego opracowania było przeprowadzenie Czytelnika przez proces modelowania strukturalnego za pomocą metody dynamiki systemowej – od wprowadzenia fundamentalnych pojęć teoretycznych, aż po implementację i analizę nieliniowego modelu logistycznego w programie VensimPLE. Wymiar dydaktyczny tego tematu polega przede wszystkim na wykształceniu u Czytelnika umiejętności myślenia sieciowego oraz holistycznej percepcji złożonych systemów społeczno-gospodarczych, co pozwala mu zrozumieć, dlaczego intuicyjne decyzje zarządcze w warunkach inercji bardzo często prowadzą do błędnych diagnoz lub nieoczekiwanego przereagowania. Głównym atutem stosowania symulacji komputerowych w tym obszarze jest możliwość natychmiastowego, bezkosztowego eksperymentowania na dynamicznych modelach matematycznych, co pozwala na błyskawiczne testowanie alternatywnych scenariuszy w długim horyzoncie czasowym oraz obserwowanie, jak zmiana warunków początkowych wpływa na stabilność całego układu. W ramach dalszego rozwoju przedstawioną strukturę można z powodzeniem rozbudować do postaci pełnoprawnego modelu demograficzno-ekonomicznego (opartego na klasycznym archetypie granic wzrostu) poprzez podział populacji na kohorty wiekowe, dekompozycję zasobów na niezależne podsystemy oraz wprowadzenie strumieni migracyjnych, co umożliwi realizację zaawansowanych analiz.

Literatura

1. J. W. Forrester, *World Dynamics*, Wright-Allen Press, Michigan 1971.
2. E. Kasperska, A. Kasperski, E. Mateja-Losa *Podstawy teoretyczne zastosowania symulacji komputerowej w nauczaniu ekonomii i matematyki* Politechnika Śląska, Gliwice, 2016.
3. D. H. Meadows , D. L. Meadows : *Granice wzrostu*, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1973.
4. D. H. Meadows , D. L. Meadows , J. Randders, *Przekroczenie granic: globalne załamanie czy bezpieczna przyszłość?* Centrum Uniwersalizmu przy Uniwersytecie Warszawskim: Polskie Towarzystwo Współpracy z Klubem Rzymskim. Warszawa, 1995.
5. D. L. Meadows, D. H. Meadows, J. Randers, *Limits to Growth: The 30-Year Update*, Chelsea Green Publishing Company, Vermont, 2004.
6. <https://systemdynamics.org/>[widziano 20.06.2026 r.].
7. <https://vensim.com/>[widziano 20.06.2026 r.].

Tabela 2. Wyniki symulacji model 2 VensimPLE

Time rok	urodzenia [U]	populacja [P]	zgony [Z]	odnowa zasobów [OZ]	zasoby [Za]	zużycie zasobów [ZZ]
0	299	10000	99	0	10000	2000
1	244	10200	122	400	8000	2040
2	196	10322	140	728	6360	2064.4
3	156	10378	155	995.28	5023.6	2075.6
4	122	10379	166	1211.34	3943.28	2075.8
5	95	10335	174	1384.24	3078.82	2067
6	73	10256	180	1520.79	2396.06	2051.2
7	56	10149	184	1626.87	1865.65	2029.8
8	43	10021	185	1707.46	1462.72	2004.2
9	34	9879	186	1766.81	1165.97	1975.8
10	27	9727	185	1808.6	956.979	1945.4
11	23	9569	183	1835.96	820.184	1913.8
12	20	9409	181	1851.53	742.347	1881.8
13	19	9248	178	1857.58	712.077	1849.6
14	19	9089	175	1855.99	720.062	1817.8
15	20	8933	171	1848.35	758.25	1786.6
16	21	8782	168	1836	820	1756.4
17	23	8635	164	1820.08	899.6	1727
18	25	8494	161	1801.46	992.68	1698.8
19	27	8358	158	1780.93	1095.34	1671.6
20	29	8227	154	1759.07	1204.68	1645.4
21	32	8102	151	1736.33	1318.34	1620.4
22	34	7983	148	1713.15	1434.27	1596.6
23	36	7869	145	1689.84	1550.82	1573.8
24	38	7760	142	1666.63	1666.85	1552
25	40	7656	139	1643.7	1781.48	1531.2
26	42	7557	136	1621.2	1893.99	1511.4
27	44	7463	134	1599.24	2003.79	1492.6
28	46	7373	131	1577.91	2110.43	1474.6
29	48	7288	129	1557.25	2213.75	1457.6
30	50	7207	127	1537.32	2313.4	1441.4
31	51	7130	125	1518.14	2409.32	1426
32	52	7056	123	1499.71	2501.45	1411.2
33	54	6985	121	1482.01	2589.96	1397
34	55	6918	119	1465.01	2674.97	1383.6
35	56	6854	118	1448.72	2756.38	1370.8
36	57	6792	116	1433.14	2834.3	1358.4
37	58	6733	115	1418.19	2909.04	1346.6
38	59	6676	113	1403.87	2980.63	1335.2
39	60	6622	112	1390.14	3049.31	1324.4
40	61	6570	110	1376.99	3115.04	1314
41	62	6521	109	1364.39	3178.04	1304.2
42	62	6474	108	1352.35	3238.23	1294.8
43	63	6428	107	1340.84	3295.78	1285.6
44	64	6384	106	1329.79	3351.03	1276.8
45	64	6342	105	1319.2	3404.02	1268.4
46	65	6301	104	1309.04	3454.82	1260.2
47	65	6262	103	1299.27	3503.65	1252.4
48	66	6224	102	1289.9	3550.52	1244.8
49	66	6188	101	1280.88	3595.62	1237.6
50	67	6153	100	1272.22	3638.89	1230.6

Tabela 3. Wyniki symulacji model 2 VensimPLE

Time rok	urodzenia [U]	populacja [P]	zgony [Z]	odnowa zasobów [OZ]	zasoby [Za]	zużycie zasobów [ZZ]
51	67	6120	99	1263.9	3680.52	1224
52	67	6088	99	1255.92	3720.41	1217.6
53	68	6056	98	1248.25	3758.73	1211.2
54	68	6026	97	1240.84	3795.78	1205.2
55	68	5997	96	1233.71	3831.43	1199.4
56	69	5969	96	1226.85	3865.74	1193.8
57	69	5942	95	1220.24	3898.79	1188.4
58	69	5916	95	1213.87	3930.63	1183.2
59	69	5890	94	1207.74	3961.31	1178
60	70	5865	93	1201.79	3991.05	1173
61	70	5842	93	1196.03	4019.84	1168.4
62	70	5819	92	1190.51	4047.47	1163.8
63	70	5797	92	1185.16	4074.18	1159.4
64	71	5775	91	1180.01	4099.94	1155
65	71	5755	91	1175.01	4124.95	1151
66	71	5735	90	1170.21	4148.96	1147
67	71	5716	90	1165.57	4172.17	1143.2
68	71	5697	90	1161.09	4194.54	1139.4
69	71	5678	89	1156.75	4216.23	1135.6
70	71	5660	89	1152.52	4237.38	1132
71	72	5642	88	1148.42	4257.91	1128.4
72	72	5626	88	1144.42	4277.92	1125.2
73	72	5610	88	1140.57	4297.14	1122
74	72	5594	87	1136.86	4315.71	1118.8
75	72	5579	87	1133.25	4333.77	1115.8
76	72	5564	87	1129.76	4351.22	1112.8
77	72	5549	86	1126.37	4368.17	1109.8
78	72	5535	86	1123.05	4384.74	1107
79	72	5521	86	1119.84	4400.79	1104.2
80	72	5507	85	1116.71	4416.43	1101.4
81	73	5494	85	1113.65	4431.75	1098.8
82	73	5482	85	1110.68	4446.6	1096.4
83	73	5470	84	1107.82	4460.88	1094
84	73	5459	84	1105.06	4474.7	1091.8
85	73	5448	84	1102.41	4487.96	1089.6
86	73	5437	84	1099.85	4500.77	1087.4
87	73	5426	84	1097.36	4513.22	1085.2
88	73	5415	83	1094.93	4525.37	1083
89	73	5405	83	1092.54	4537.3	1081
90	73	5395	83	1090.23	4548.84	1079
91	73	5385	83	1087.99	4560.07	1077
92	73	5375	82	1085.79	4571.06	1075
93	73	5366	82	1083.63	4581.85	1073.2
94	73	5357	82	1081.54	4592.28	1071.4
95	73	5348	82	1079.52	4602.42	1069.6
96	73	5339	82	1077.53	4612.34	1067.8
97	73	5330	81	1075.59	4622.07	1066
98	73	5322	81	1073.67	4631.66	1064.4
99	73	5314	81	1071.82	4640.92	1062.8
100	74	5306	81	1070.01	4649.94	1061.2