

Zuzanna GRABARZ¹

¹Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Liczba chromatyczna płaszczyzny

Streszczenie. Artykuł ma na celu przybliżenie problemu Hadwigera-Nelsona o kolorowaniu płaszczyzny. Opisana została historia tego problemu oraz przedstawiono szkic dowodów znanych ograniczeń. Na koniec wspomniano o pokrewnych problemach kolorowania płaszczyzny.

Słowa kluczowe: graf, teoria grafów, liczba chromatyczna.

Dawno, dawno temu, zły czarodziej zaklął piękną księżniczkę w jedną z głów straszliwego, wielogłowego, matematycznego smoka. Smok ten może zostać pokonany, gdy odetnie się mu wszystkie głowy, niebędące zaklętą księżniczką. Każda z jego głów ma swój unikatowy numer. Prawie wszystkie pierwotne głowy bestii odpadły lub zostały łatwo wyeliminowane już na samym początku. Pozostały cztery o numerach: 4, 5, 6 i 7. Zaklęcie, które ożywiło bestię i przemieniło księżniczkę, było „prostym” pytaniem: ile kolorów potrzeba, aby pokolorować płaszczyznę tak, że żadne dwa punkty w odległości 1 nie mają tego samego koloru? Głowa z numerem odpowiadającym na to pytanie jest księżniczką; reszty należy się pozbyć. Wielu dzielnych bohaterów zmagало się przez lata ze smokiem, jednak ich miecze się szczybiły, metal rdzewiał, a mężczy rycerze byli zmuszeni się wycofać. W tym czasie z niewyjaśnionych powodów wokół bestii zaczęły zbierać się inne, pomniejszych smoki, których zaklęcia z początku były podobne do oryginalnego. Niektórzy herosi przenieśli swoje zainteresowania na nie, inni zaś byli nadal skupieni na uratowaniu pięknej księżniczki.

Luźne tłumaczenie fragmentu historii Jaana Partsa przedstawiającej problem liczby chromatycznej płaszczyzny [7]. Pozostaje jednak pytanie, co dalej stało się ze smokiem?

1. Wstęp

Artykuł ten ma na celu zapoznanie Czytelników z jednym z najbardziej znanych, a dalej nierozwiązanych problemów kolorowania punktów płaszczyzny, czyli z *problemem Hadwigera-Nelsona*. Dotyczy on pytania zadanego w powyższej historyjce jako „zaklęcie”:

Ile potrzeba kolorów do pokolorowania płaszczyzny tak, aby żadne dwa punkty odległe od siebie o 1 nie miały tego samego koloru?

Najmniejszą liczbę kolorów, które wystarczą do powyższego pokolorowania, nazywamy liczbą chromatyczną płaszczyzny i oznaczamy przez χ .

Nasz problem możemy więc ująć teraz inaczej:

Jaka jest liczba chromatyczna płaszczyzny?

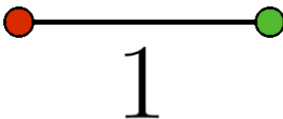
Zbiorem monochromatycznym nazywamy każdy zbiór punktów, którego wszystkie elementy mają ten sam kolor. Zatem nasz problem możemy ująć jeszcze inaczej:

Jaka jest najmniejsza liczba kolorów potrzebnych do pokolorowania płaszczyzny w taki sposób, że nie występują monochromatyczne odcinki długości 1?

Przez monochromatyczny odcinek długości 1 rozumiemy parę punktów, mających ten sam kolor, w odległości 1.

Techniki tutaj używane opierają się głównie na dwóch aspektach:

1. na znajdowaniu wzorów, które powielane w nieskończoność pokolorują całą płaszczyznę;
2. na rysowaniu schematów złożonych z kropek (wierzchołków) połączonych krawędzią, jeśli są odległe od siebie o 1, które nazywać będziemy grafami i kolorowaniu ich różnymi kolorami, jak na rysunku 1.



Rysunek 1. Niemonochromatyczny odcinek długości 1

2. Historia problemu

Jak wiele słynnych problemów matematycznych, także ten ma nieco skomplikowaną historię i wielu współtwórców. Okazuje się, że problem ten był powtarzany w listach, jak i słownie, wiele razy zanim został spisany po raz pierwszy. Część autorów nieświadomie publikowała w tym samym roku prace jemu poświęcone, robiąc jednakowe postępy, a jednocześnie podając jako autora problemu dwie różne osoby. Aż siedmiu osobom przypisane było autorstwo, a byli to: Edward Nelson, Leo Moser, Paul Erdős, Martin Gardner, Frank Harary, William T. Tutte oraz Hugo Hadwiger. Alexandrowi Soiferowi zawdzięczamy określenie pierwszego autora problemu. Od czerwca do września 1991 roku listownie oraz osobiście kontaktował się z każdym potencjalnym twórcą problemu. Polecamy zapoznanie się z całą historią w książce Soifera [10], w której umieszcza on również fragmenty listów oraz rozmów z zainteresowanymi.

Jak się okazało, Edward Nelson jako pierwszy sformułował problem liczby chromatycznej płaszczyzny w 1950 roku, jeszcze jako student Uniwersytetu w Chicago. Nazwał wówczas ów problem „drugim problemem czterech kolorów”¹, podał również ograniczenie dolne równe 4. Opowiedział następnie o swoich

¹ Twierdzenie o czterech barwach – każdą mapę można pokolorować za pomocą czterech kolorów tak, że żadne dwa państwa mające wspólną granicę nie mają tego samego koloru. Pytanie o to, czy cztery kolory wystarczą do pokolorowania dowolnej mapy zadał w 1852 roku Francis Guthrie. Problem ten został rozwiązany dopiero w 1976 roku przez Kennetha Apple'a i Wolfganga Hakena. Ich dowód opierał się na obliczeniach komputerowych, co wzbudziło niemałe kontrowersje wśród ówczesnych matematyków. Nadal nie mamy dowodu twierdzenia o czterech barwach niewykorzystującego komputerów.

rozważaniach starszemu koledze, Johnowi R. Isbellowi, który ustalił ograniczenie górne równe 7. Isbell przekazał problem paru osobom, między innymi Victorowi Klee, który przedstawił go Hugo Hadwigerowi. Mniej więcej w tym samym czasie dowiedział się o tym problemie Leo Moser. On zaś opowiedział o problemie Paulowi Erdősowi oraz Martinowi Gardnerowi.

Dopiero w 1960 roku Martin Gardner jako pierwszy opublikował ten problem w felietonie *Mathematical Games* [2], podając Leo Mosera jako źródło. W 1961 roku Hugo Hadwiger opublikował pracę, wskazując Nelsona jako autora problemu, w której udowodnił, że $4 \leq \chi \leq 7$ (w kolejnym rozdziale przedstawimy szkice jego dowodów). Najbardziej jednak znanym i powielanym dowodem na dolne ograniczenie równe 4 jest dowód Leo i Williama Moserów, opublikowany w tym samym roku co dowód Hadwigera, czyli w 1961. Od tego czasu zagadnienie ustalenia liczby chromatycznej płaszczyzny nazywane jest problemem Hadwigera-Nelsona.

Jak wiele pięknych problemów, ten również ma немало zwolenników. Soifer bardzo często nazywa go swoim ulubionym problemem w matematyce. Wraz z chęcią rozwiązania problemu pojawiły się także nagrody za jego rozwiązanie lub ulepszenie znanych ograniczeń. Ronald L. Graham zaproponował kilka nagród:

- W 2002 roku 1000 dolarów za odpowiedź na pytanie: czy możliwym jest pokolorowanie płaszczyzny czterema kolorami tak, że dwa punkty w odległości 1 od siebie nie mają jednakowego koloru?
- W 2003 roku 1000 dolarów za ustalenie dokładnej liczby chromatycznej płaszczyzny.
- W 2005 roku 100 dolarów za pokazanie, że $\chi \geq 5$.
- W 2006 roku 250 dolarów za pokazanie, że $\chi \leq 6$.

Graham, poza wyznaczaniem nagród finansowych za postępy lub rozwiązanie danych problemów matematycznych, zajmował się także wypłacaniem nagród za problemy Erdősa. Po jego śmierci w 2020 roku problemami Erdősa zajął się Steve Butler, zaś nagrody za rozwiązanie innych problemów Grahama, nieuwzględnione przez Erdősa, w tym problem Hadwigera-Nelsona, musimy uznać za historyczne.

Warto wspomnieć, że mimo iż Erdős nie ustalił nagrody za problem Hadwigera-Nelsona, to był nim żywo zainteresowany. Zapytany o zdanie na ten temat, stawiał hipotezę, iż $4 < \chi < 7$, to znaczy liczba chromatyczna płaszczyzny wynosi 5 lub 6.

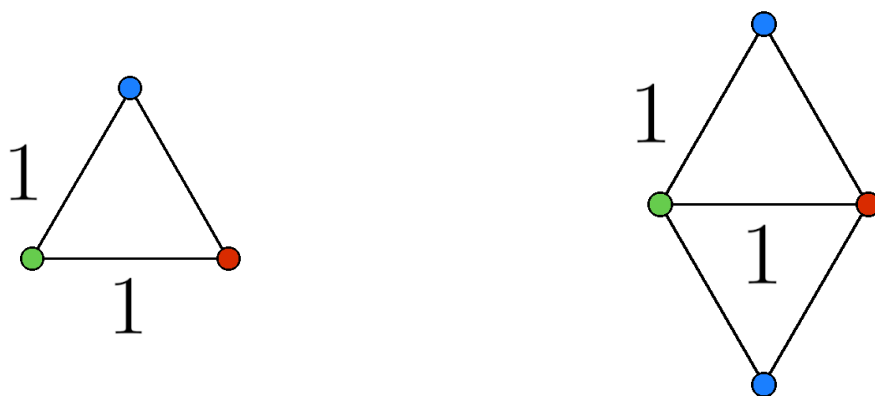
Przez prawie 70 lat, mimo wielu starań, nie było żadnego postępu. Aż do 2018 roku, kiedy to Aubrey de Grey opublikował artykuł, w którym dowodzi, iż $\chi \geq 5$. Z pomocą komputera podał konstrukcję grafu, który ma krawędzie długości 1 oraz nie można go pokolorować za pomocą 4 kolorów. Graham, po porozumieniu z Soiferem, spotkał się z de Greyem i wręczył mu czek na 1000 dolarów za postępek w problemie Hadwigera-Nelsona.

Problem pozostaje nierozwiązany, a najlepsze znane obecnie ograniczenia są następujące:

$$5 \leq \chi \leq 7.$$

3. Ograniczenia górne i dolne

Pokażemy teraz kolejno jak udowodnić wspomniane już wcześniej ograniczenia. Oczywiście zachęcamy Czytelnika do próby wykazania lub ulepszenia znanych ograniczeń już teraz, zanim podamy odpowiednie przykłady.

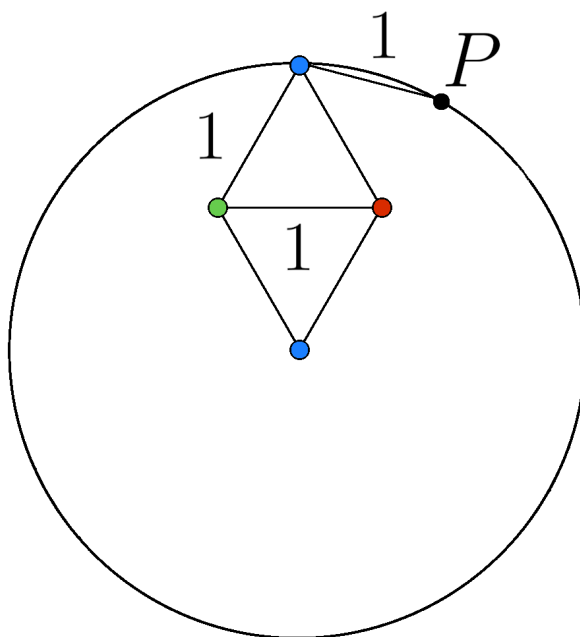


Rysunek 2. Po lewej trójkąt równoboczny z pokolorowanymi wierzchołkami oraz po prawej romb powstały z dwóch takich trójkątów równobocznych

3.1. Ograniczenia dolne

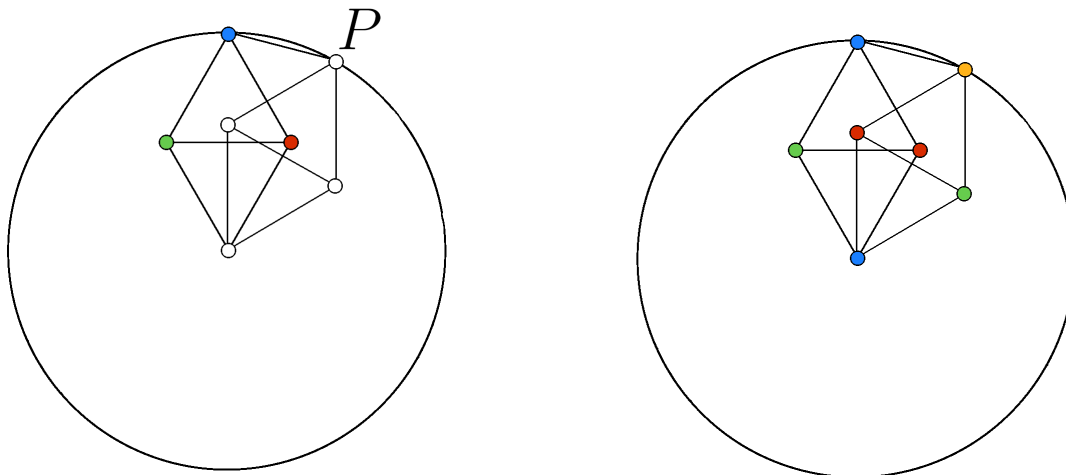
Zacznijmy najpierw od dolnych ograniczeń. Oczywiście nie jest możliwe pokolorowanie płaszczyzny dwoma kolorami. Rozważmy trójkąt równoboczny o boku długości 1, rysunek 2. Po położeniu go na płaszczyźnie widzimy, że niezależnie od wyboru kolorów dla dwóch wierzchołków trójkąta, trzeci musi być w innym kolorze, bowiem każdy wierzchołek jest połączony krawędzią z dwoma pozostałymi. Czy zatem wystarczą 3?

Według późniejszych relacji Isbella, Nelson już w 1950 roku wiedział, że trzy kolory nie są wystarczające, choć jego dowód nie został nigdy opublikowany. Przedstawimy trzy sposoby, aby pokazać, że liczba chromatyczna płaszczyzny nie może być mniejsza niż 4. W 1961 roku powstały dwie prace, Hugo Hadwigera oraz braci Williama i Leo Moserów, w których znajdowały się wspomniane wcześniej dowody.



Rysunek 3. Okrąg o promieniu $\sqrt{3}$ i środku w niebieskim wierzchołku rombu

Przedstawimy najpierw przebieg rozumowania Hugo Hadwigera. Załóżmy, że wystarczą nam trzy kolory do pokolorowania płaszczyzny. Wiemy już, że w trójkącie równobocznym o boku długości 1 wierzchołki muszą mieć trzy kolory. Niech będą to czerwony, niebieski i zielony. Do takiego trójkąta dorysowujemy drugi trójkąt równoboczny o boku 1 tak, że bok z wierzchołkami zielonym i czerwonym jest wspólny. Zatem trzeci wierzchołek, naprzeciwko niebieskiego, także musi mieć kolor niebieski, jak pokazano na rysunku 2. Odległość między niebieskimi wierzchołkami tak powstałego rombu wynosi $\sqrt{3}$. Rysujemy teraz okrąg o środku w jednym z niebieskich wierzchołków, a przechodzący przez drugi, czyli o promieniu $\sqrt{3}$, rysunek 3.



Rysunek 4. Po lewej dorysowany kolejny romb ze wspólnym wierzchołkiem w środku okręgu; po prawej poprawnie pokolorowana otrzymana figura

Na okręgu znajdujemy punkt P w odległości 1 od niebieskiego wierzchołka znajdującego się na tym okręgu. Taki punkt istnieje, ponieważ $1 < \sqrt{3}$.

Rysujemy drugi romb, taki sam jak poprzedni, ze wspólnym wierzchołkiem w środku okręgu oraz z wierzchołkiem przeciwnym do środka okręgu w punkcie P , rysunek 4. W tak skonstruowanej figurze punkt P powinien mieć kolor niebieski, jednak widzimy, że jest w odległości 1 od innego wierzchołka, więc nie może być niebieski. Dostaliśmy sprzeczność – nie może wystąpić monochromatyczny odcinek długości 1. Potrzebujemy zatem minimum 4 kolory.

Niezależnie od Hadwigera, bracia Moserowie zaprezentowali graf, nazywany wrzecionem Moserów, przedstawiony na rysunku 5. Widzimy, że jest to dokładnie ta sama figura, którą otrzymaliśmy powyżej.

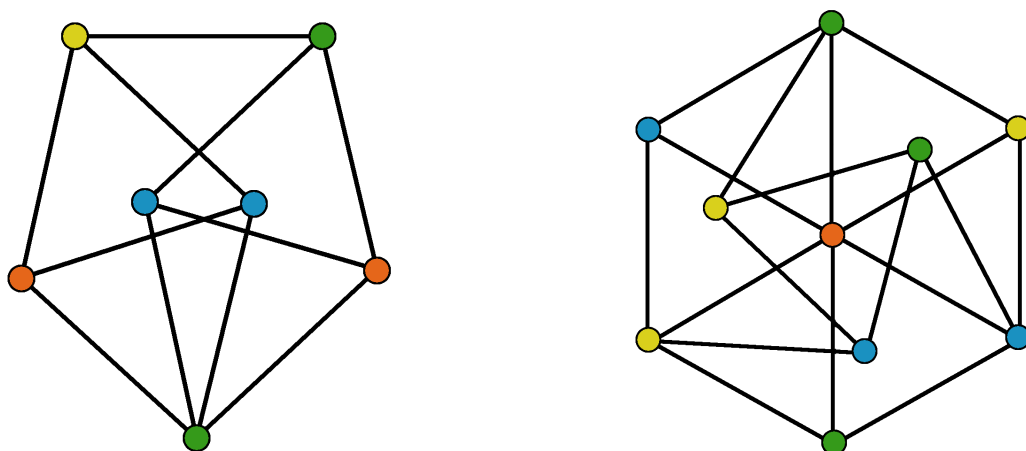
W roku 1991 Salomon Golomb skonstruował graf przedstawiony na rysunku 5. Każda z 18 krawędzi ma długość 1. Czytelnikowi zostawiamy argumentację, że taka figura ma sens geometryczny oraz że minimalna liczba kolorów, które należy użyć, wynosi 4. A może czytelnik może wymyślić inną figurę?

Wiemy już z poprzedniego rozdziału, że znanym nam największym ograniczeniem dolnym jest 5. Krótki opis tego, jak Aubrey de Grey to uzasadnił, przedstawimy poniżej.

3.2. Odkrycie A. de Greya

Poniżej zarysujemy konstrukcję de Greya. Czytelnikom zainteresowanym szczegółami całego dowodu polecamy lekturę [4]. Dodajmy tutaj, że praca de Greya była wspomagana komputerowo.

Dowód de Greya polega na skonstruowaniu grafu N , do pokolorowania którego potrzebnych jest 5 kolorów. Wykorzystuje do tego sześciokąty z rysunku 6 oraz wrzeciona Moserów.



Rysunek 5. Po lewej Wrzeciono Moserów (1961), po prawej Graf Golomba (1991)

Cała konstrukcja składa się z 4 etapów, w efekcie których powstaje graf N o 1581 wierzchołkach (początkowo miał 20425 wierzchołków.)

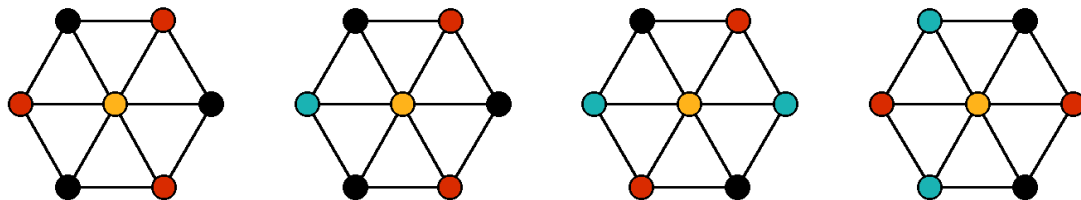
Zaczynamy od grafu G o 7 wierzchołkach i 12 krawędziach długości 1. Na rysunku 6 przedstawiamy cztery możliwości pokolorowania grafu G maksymalnie czterema kolorami. Dwa pierwsze z tych czterech kolorowań mają monochromatyczny zbiór 3 wierzchołków. Następnie konstruujemy kolejno grafy L , M , N , mające krawędzie długości 1.

Graf L składa się z 52 odpowiednio rozmieszczonych kopii grafu G . W swojej pracy de Grey pokazuje, że w każdym 4-kolorowaniu grafu L co najmniej jedna kopia G ma monochromatyczny zbiór 3 wierzchołków.

Do konstrukcji grafu M de Grey używa **dużej liczby** kopii wrzeciona Moserów 5 oraz jednej kopii grafu G . Graf M jest tak skonstruowany, aby w jego dowolnym kolorowaniu czterema kolorami kopia grafu G , będąca jego częścią, była pokolorowana na trzeci lub czwarty sposób z rysunku 6, czyli nie miała monochromatycznego zbioru trzech wierzchołków.

Konstruujemy graf N , będący pięćdziesięcioma dwoma kopiami grafu M , ułożonymi w taki sposób, że kopie grafu G zawarte w kopiach M tworzą graf L . Gdyby graf N był 4-kolorowalny, to również graf L byłby 4-kolorowalny. Z wcześniej udowodnionej własności grafu L musiałyby istnieć kopia grafu G z monochromatycznym zbiorem trzech wierzchołków, co przeczy własności grafu M . Graf N ma zatem liczbę chromatyczną równą 5.

Na końcu de Grey iteracyjnie usuwa „zbędne” wierzchołki w grafie N , czyli takie, których usunięcie nie zmniejszy liczby chromatycznej grafu N .



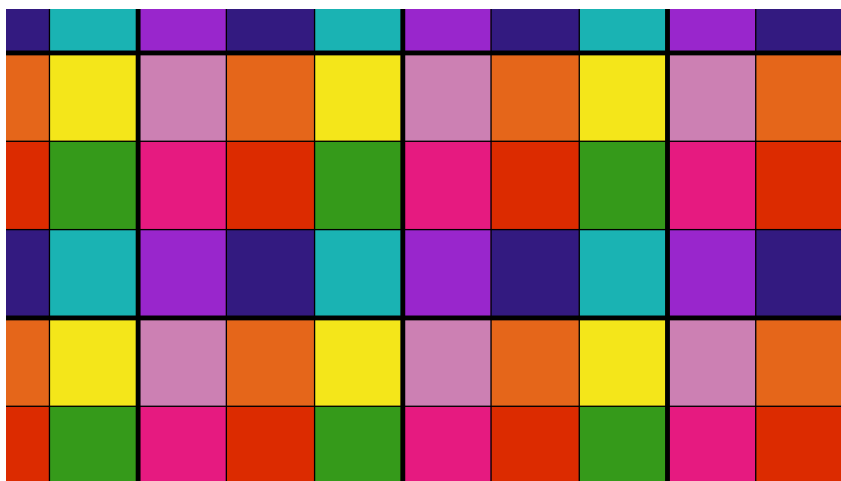
Rysunek 6. Cztery możliwości kolorowania grafu G mając maksymalnie 4 kolory

De Grey w swoim artykule bardzo dokładnie opisuje każdy element swojej konstrukcji, zachęcając innych do ulepszenia swoich wyników. Rzeczywiście, krótko po jego wydaniu stworzono kilka grafów o mniejszej liczbie wierzchołków. Najmniejszym znanym grafem o krawędziach długości 1 i liczbie chromatycznej równej 5 jest graf Jaana Partsa, zaproponowany w 2020 roku [7]. Ma on 509 wierzchołków i 2442 krawędzie.

Wszelkie nowinki dotyczące tego problemu (jak i wielu innych) można sprawdzać na blogu PolyMath [8]. Projekt PolyMath16 [6], rozpoczęty przez Aubrey de Greya [5], dotyczy w szczególności naszego problemu.

3.3. Ograniczenia górne

Poznaliśmy już największe znane ograniczenie dolne problemu Hadwigera-Nelsona. Do ustalenia tego ograniczenia potrzebowaliśmy grafu o krawędziach długości 1 i liczbie chromatycznej równej 5. Z kolei istnienie ograniczeń górnych pokazuje, że płaszczyzna będzie miała skończoną liczbę chromatyczną oraz pozwala ograniczyć zbiór możliwych liczb, które mogą być równe liczbie chromatycznej płaszczyzny.



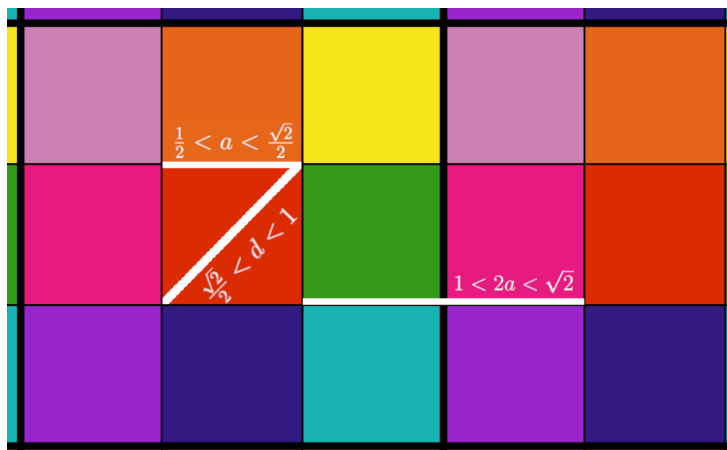
Rysunek 7. Kolorowanie płaszczyzny dziewięcioma kolorami

Aby znaleźć ograniczenie górne, wystarczy pokolorować odpowiednio fragment płaszczyzny tak, aby dało się go okresowo powielić na całej płaszczyźnie. Liczba kolorów, jaką otrzymamy w takim kolorowaniu stanowi wówczas ograniczenie górne w problemie Hadwigera-Nelsona. Niektóre z takich kolorowań Czytelnik szybko może sam skonstruować.

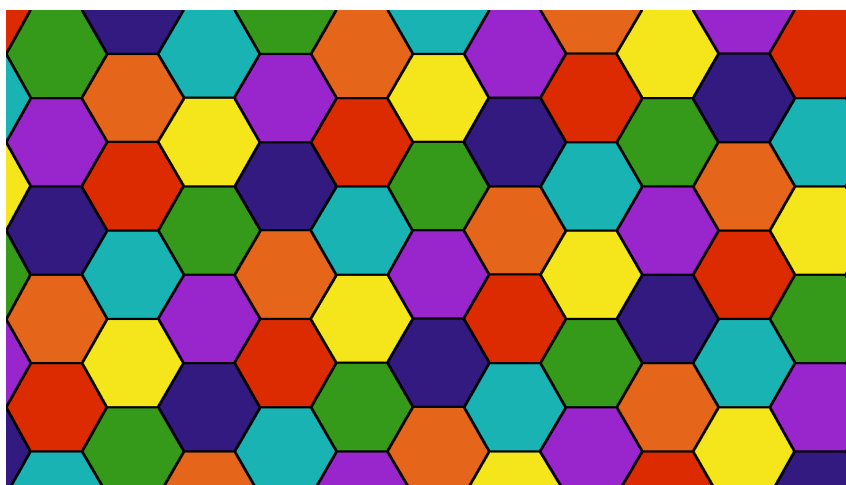
Przykładem może być podział płaszczyzny na kwadraty o przekątnej nieznacznie mniejszej od 1 (dokładniej, o boku długości mniejszej niż $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ale większej niż $\frac{1}{2}$).

Taki podział płaszczyzny pozwala na pokolorowanie jej dziewięcioma kolorami. Powstały większy kwadrat, składający się z dziewięciu oryginalnych mniejszych kwadratów, „kopiujemy” w nieskończoność na całą płaszczyznę. Przekątna nieznacznie mniejsza niż 1 gwarantuje nam, że w obrębie jednego kwadratu nie będziemy mieć monochromatycznego odcinka długości 1; z kolei najmniejsza odległość między kwadratami tego samego koloru jest nieznacznie mniejsza niż $\sqrt{2}$, ale nadal większa od 1. Na rysunku 8 białe odcinki oznaczają bok a jednego z czerwonych kwadratów i jego przekątną d – oba nieprzekraczające 1 oraz najmniejszą możliwą odległość między czerwonymi kwadratami.

Czy taki podział jest już najmniejszym możliwym ograniczeniem górnym? Okazuje się, że po podzieleniu płaszczyzny na sześciokąty foremne o dłuższej przekątnej długości nieznacznie mniejszej niż



Rysunek 8. Kolorowanie płaszczyzny dziewięcioma kolorami z zaznaczonymi możliwymi odległościami na czerwonym kwadracie oraz pomiędzy najbliższymi czerwonymi kwadratami

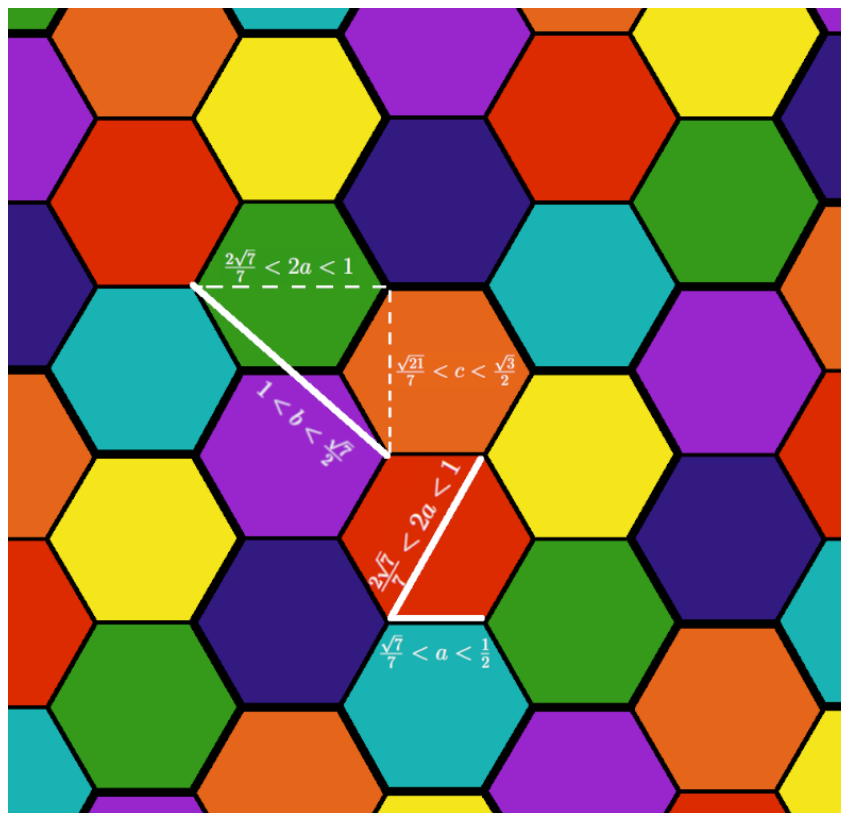


Rysunek 9. Kolorowanie płaszczyzny siedmioma kolorami

1 (dokładniej o boku długości mniejszej niż $\frac{1}{2}$, ale większej niż $\frac{\sqrt{7}}{7}$), możemy użyć pierwszego koloru dla jednego sześciokąta i sześciu innych kolorów dla sześciokątów sąsiadujących z pierwszym. Taki wzór powtarzamy okresowo, uzyskując kolorowanie całej płaszczyzny za pomocą 7 kolorów. Fragment tak pokolorowanej płaszczyzny widzimy na rysunku 9.

W obrębie jednego sześciokąta nie mamy wówczas monochromatycznego odcinka długości 1, zaś najmniejsza odległość między dwoma sześciokątami tego samego koloru wynosi nieznacznie mniej niż $\frac{\sqrt{7}}{2}$, zatem pozostaje większa niż 1. Dokładniej, jeżeli długość boku sześciokąta należy do przedziału $\left(\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{1}{2}\right)$, to dłuższa przekątna ma długość z przedziału $\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}, 1\right)$, czyli jest mniejsza niż 1. Najmniejsza odległość między sześciokątami tego samego koloru jest z przedziału $\left(1, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$. Na rysunku 10, białe odcinki oznaczają bok a sześciokąta i jego dłuższą przekątną $2a$ – oba nieprzekraczające 1 oraz najmniejszą możliwą odległość między dwoma czerwonymi sześciokątami – większą niż 1.

Nie jest to jedyny sposób na poprawne 7-kolorowanie płaszczyzny – zadanie to pozostawiamy Czytelnikowi, a w przypadku szczególnej ciekawości odsyłamy do książki Alexandra Soifera [10].



Rysunek 10. Kolorowanie płaszczyzny siedmioma kolorami z zaznaczonymi możliwymi odległościami na czerwonym sześciokącie oraz pomiędzy najbliższymi czerwonymi sześciokątami

4. Nie tylko liczba chromatyczna płaszczyzny

Wraz z wielkimi problemami w matematyce często pojawiają się inne. Ich liczba zazwyczaj wzrasta, gdy nie udaje się rozwiązać głównego problemu, ponieważ rozwiązanie problemów podobnych lub nieco uproszczonych może prowadzić do znalezienia sposobu na oryginalne zadanie. Ciężko wymienić wszystkie problemy, które są pokrewne problemowi Hadwigera-Nelsona. Postaramy się jednak przedstawić kilka najbardziej oczywistych oraz najciekawszych z nich.

- a) Naturalnie, jeśli pytamy o liczbę chromatyczną płaszczyzny, możemy rozważać analogię dla innych przestrzeni, na przykład przestrzeni trójwymiarową, a nawet przestrzenie o większej liczbie wymiarów. [9, 10]

Przykładowo liczba chromatyczna przestrzeni trójwymiarowej mieści się między 6 a 15.

b) Liczbę polichromatyczną płaszczyzny χ_p zaproponował Paul Erdős w 1958 roku.

Mamy zbiór zabronionych odległości $D = \{d_1, d_2, \dots\}$. Chcemy pokolorować płaszczyznę w taki sposób, aby dla każdego koloru odległość między żadnymi dwoma punktami w tym kolorze nie była równa pewnej odległości ze zbioru D .

Dane kolory mogą unikać tych samych lub różnych odległości ze zbioru D , a nawet więcej niż jednej odległości. Warunkiem koniecznym jest jednak, aby każdy kolor unikał przynajmniej jednej odległości. Znane ograniczenia dotyczące najmniejszej możliwej liczby kolorów potrzebnej do takiego kolorowania to:

$$4 \leq \chi_p \leq 6.$$

W przypadku tylko jednej zabronionej odległości, równej 1, otrzymujemy problem Hadwigera-Nelsona. Dla zbioru zabronionych odległości $D = \{\frac{1}{2}, 1\}$ istnieje kolorowanie płaszczyzny za pomocą sześciu kolorów, w którym 4 kolory unikają odległości 1, a 2 pozostałe – odległości $\frac{1}{2}$.

Może Czytelnik sam znajdzie kolorowanie płaszczyzny odpowiadające takiemu zbiorowi?

c) Górną liczbę chromatyczną płaszczyzny nazywamy najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą m o następującej własności: dla każdego ciągu liczb dodatnich (d_j) istnieje kolorowanie przy użyciu m kolorów takie, że dla każdego $i = 1, \dots, m$ żadne dwa punkty pokolorowane i -tym kolorem nie są od siebie oddalone o odległość d_i . Oznaczamy ją przez $\hat{\chi}(\mathbb{R}^2)$.

Pojęcie to zostało wprowadzone już w 1992 roku przez Greenwella i Johnsona [3]. Wiemy z tej samej pracy, że $\hat{\chi}(\mathbb{R}) = 3$. Jednak w przypadku górnej liczby chromatycznej płaszczyzny wiemy bardzo niewiele – nie wiadomo nawet, czy taka liczba jest skończona.

5. Na zakończenie

Problem Hadwigera-Nelsona jest jednym z tych problemów w matematyce, które są przystępne w zrozumieniu, ale niełatwe w rozwiązywaniu. Może się jednak okazać, iż kolejne ulepszenia znanych ograniczeń będą wymagały skomplikowanych narzędzi matematycznych.

Zatem nasz smok z opowieści Jaana Partsa ma więc już tylko trzy głowy: 5, 6, 7. Numer 4 został wyeliminowany przez Aubrey de Greya po 70 latach od ostatnich postępów w rozwiązywaniu tego problemu.

Co ciekawe, Aubrey de Grey, który dokonał ostatniego największego przełomu, jest biogerontologiem i bioinformatykiem, a matematyką zajmuje się tylko z pasji. Zachęcamy tym samym Czytelników do próby rozwiązywania tego lub pokrewnych problemów i zabawy z matematyką.

Literatura

1. A. Abrams, *Upper chromatic numbers: An update*, Geombinatorics 10(1), (2000), pp. 4-11.
2. M. Gardner, P. Johnson, *A new collections of "brain teasers"*, Sci. Am. 206, (1960), pp. 172-180.
3. D. Greenwell, P. Johnson, *Forbidding prescribed distances for designated colors*, Geombinatorics 2, (1992), pp. 13-16.
4. A. de Grey, *The Chromatic Number of the Plane Is at Least 5*, Geombinatorics 28(1), (2018), pp. 18-31.
5. A. de Grey, *Polymath proposal: finding simpler unit distance graphs of chromatic number 5* (2018)

- <https://polymathprojects.org/2018/04/10/polymath-proposal-finding-simpler-unit-distance-graphs-of-chromatic-number-5/> [dostęp 14-09-2026]
6. A. de Grey, D. G. Mixon, *Polymath16, first thread: Simplifying de Grey's graph*, (2018)
<https://dustingmixon.wordpress.com/2018/04/14/polymath16-first-thread-simplifying-de-greys-graph/> [dostęp 14-09-2026]
 7. J. Parts, *Graph minimization focusing on the example of 5-chromatic unit-distance graphs in the plane*, Geombinatorics 29(4), (2020), pp. 137-166.
 8. PolyMath: <https://polymathprojects.org/> [dostęp 14-09-2026]
 9. R. Radoicic, G. Tóth, *Note on chromatic number of the space*, [in:] *Discrete and Computational Geometry: the Goodman-Pollack Festschrift*, B. Aronov, S. Basu, J. Pach, M. Sharir (eds.), Springer, Berlin 2003, pp. 695-698.
 10. A. Soifer, *The New Mathematical Coloring Book*, Springer, Nowy Jork 2024.