MATEMATYKA I INFORMATYKA NA UCZELNIACH TECHNICZNYCH

MINUT 2023 (5), s. 137–148
ISSN 2719-3063

Witold TOMASZEWSKI[1]

[1]Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska,
ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

# Lemat, który nie jest Burnside'a?

**Streszczenie**. Artykuł prezentuje lemat Cauchy'ego-Frobeniusa-Burnside'a na przykładach.

**Słowa kluczowe:** lemat Cauchy'ego-Frobeniusa-Burnside'a, orbity, zliczanie.

## 1. Wstęp

W artykule prezentujemy, jak zliczać, używając lematu Cauchy'ego-Frobeniusa-Burnside'a, rozróżnialne obiekty. Obiekty, o których tu mowa, mogą być utożsamiane ze sobą przy działaniu pewnych przekształceń, które jeden obiekt przekształcają na inny.

Na początek trochę historii. W 1897 William Burnside wydał „Theory of groups of finite order" [1], pierwszą w języku angielskim książkę z teorii grup skończonych[1]. W swojej książce Burnside zawarł najważniejsze odkrycia tej rozwijającej się od połowy XVIII wieku teorii. W paragrafie 118 rozdziału VIII podany został wzór, który okazał się nie tylko ważnym narzędziem w badaniu grup skończonych, lecz również w zastosowaniach w kombinatoryce i teorii grafów. Na początku następnego paragrafu Burnside przypisał autorstwo tego wzoru Ferdinardowi Georgowi Frobeniusowi [4]. Drugie wydanie z roku 1911 [2] zostało w znacznym stopniu przeredagowane. Wzór, o którym mowa, znalazł się w innej partii książki, a informacja o rzeczywistym autorze zniknęła. E.M. Wright w historycznej notce dotyczącej lematu Burnside'a [7], wysunął przypuszczenie, że Burnside musiał sądzić, że ten wzór jest już tak dobrze znany matematykom, że nie musi ponownie przypominać, kto był jego autorem. W tych czasach cytowalność nie była jeszcze istotnym parametrem w ocenie dorobku naukowego. Zapewne część matematyków, którzy korzystali z drugiego wydania książki Burnside'a, nie znała rzeczywistego autora wzoru, więc zaczęli twierdzenie, w którym pojawia się ten wzór, nazywać „lematem Burnside'a". W 1979 roku P.M. Neumann napisał artykuł pod wymownym tytułem „A lemma that is not Burnside's" [6], w którym nie tylko przypomniał, że Burnside zaczerpnął ten wzór z artykułu Frobeniusa, ale że można go również znaleźć w znacznie wcześniejszych pracach francuskiego matematyka Augustina Louisa Cauchy'go (około roku 1845). W związku z tym Neumann zaproponował, żeby zmienić nazwę lematu na „lemat Cauchy'ego-Frobeniusa". Od tego czasu matematycy używają różnych nazw tego lematu. Część pozostała przy starej

Autor korespondencyjny: W. Tomaszewski (Witold.Tomaszewski@polsl.pl).
Data wpłyniecia: 16.07.2023.

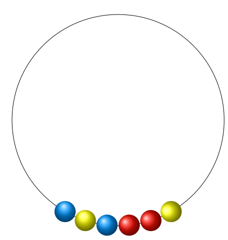
[1]Prawdopodobnie pierwszymi książkami, w których pojawiły się obszerne wykłady z teorii grup skończonych, były trzecie wydanie podręcznika Josepha-Alfreda Serreta „Cours d'Algebre Supérieure" z roku 1866 oraz „Traite des substitutions et des équations algébriques" Camille'a Jordana z 1870 roku.

nazwie „lemat Burnside'a", niektórzy za radą P.M. Neumanna nazywają go „lematem Cauchy-Frobeniusa", a niektórzy, tak jak autorzy książki [5] oraz autor niniejszego artykułu skłaniają się ku nazwie „lemat Cauchy'ego-Frobeniusa-Burnside'a", doceniając wkład Burnside'a w spopularyzowanie lematu. Można też napotkać publikacje, w których używana jest nazwa zaczerpnięta z tytułu artykułu P.M. Neumanna – „lemat, który nie jest Burnside'a". Ta ostania nazwa jest wyjątkowo dziwaczna, bo w matematyce często nazwy przypisane są niewłaściwym osobom. Idąc za tym pomysłem, powinniśmy zmienić wiele nazw. Na przykład „trójkąt, który nie jest Pascala", „wzór, który nie jest Newtona", „wstęga, która nie jest Möbiusa". A jeśli chodzi o dokonania starożytnych matematyków, to przypisanie twierdzeniom nazwisk jest albo niepewne albo wręcz nieprawdopodobne. Zatem może właściwą nazwą byłoby „twierdzenie, które z wielkim prawdopodobieństwem nie jest Talesa" lub „twierdzenie znane znacznie wcześniej przed Pitagorasem"? Warto wspomnieć, że istnieje tak zwane prawo Stiglera [8], które mówi, że żadne odkrycie naukowe nie ma przypisanego nazwiska rzeczywistego odkrywcy. Z tym można dyskutować, bo wydaje się, że prawa Keplera lub zasady dynamiki Newtona mają właściwe nazwy[2].

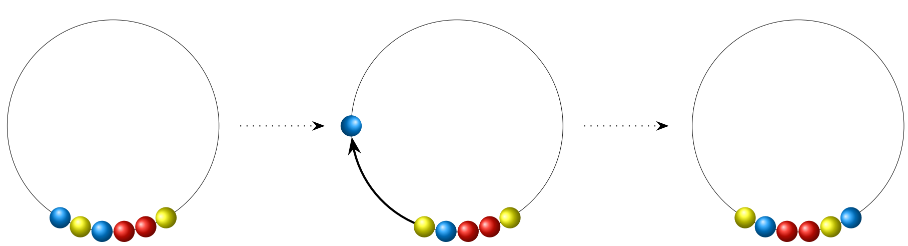
Możemy teraz przystąpić do konstrukcji przykładu, na podstawie którego zaprezentujemy lemat Cauchy'ego-Frobeniusa-Burnside'a.

## 2. Naszyjniki

Na okrągłą żyłkę nawlekamy sześć koralików, z których każdy może mieć jeden z trzech kolorów: czerwony, niebieski lub żółty, tworząc w ten sposób naszyjnik. Oto przykładowy naszyjnik:

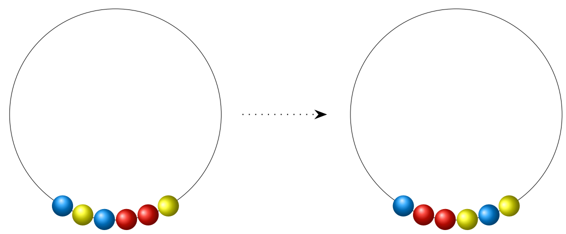


Oznaczmy przez $\mathcal{N}$ zbiór wszystkich naszyjników. Ponieważ każdy koralik może mieć jeden z trzech kolorów, to liczba naszyjników jest równa $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$. To dobra wiadomość, bo jeśli takie naszyjniki chcielibyśmy zakładać na różne uroczystości, to na 729 uroczystościach będziemy mieli różne naszyjniki. Jednakże wśród naszych znajomych mogą być osoby, które zauważą, że jeśli przesuniemy koralik wzdłuż żyłki, to otrzymamy naszyjnik, który już raz mieliśmy założony. Zatem musimy uznać, że ruch polegający na przesuwaniu koralików daje taki sam naszyjnik. Poniższe naszyjniki uznamy za takie same:



[2]Prawo Stiglera też ma niewłaściwe przypisanie, bo zostało odkryte przez socjologa R.K. Mertona.

Teraz chcielibyśmy policzyć ile jest różnych naszyjników z dokładnością do tego utożsamienia? Musimy przyjąć jeszcze jedną zasadę. Od czasów Arystotelesa przyjmujemy, że jeśli obiekt $a$ jest taki jak $b$, a $b$ taki jak $c$, to $a$ jest taki jak $c$. Zatem jeśli będziemy przesuwać jeden, dwa lub więcej koralików, to za każdym razem otrzymamy ten sam naszyjnik. Na przykład poniższe naszyjniki też uznamy za równe.



Przekształcenie, które każdy naszyjnik przekształca na ten sam naszyjnik, nazywamy identycznością i oznaczamy przez $id$. W pewnym sensie identyczność oznacza brak ruchu, ale wiemy, że często wykonanie jakiegoś ruchu lub sekwencji ruchów też daje w efekcie identyczność. Na przykład identycznością jest obrót o $360°$.

Oznaczmy ruch polegający na przesunięciu jednego koralika przez $f$. Jeśli koraliki ustawimy w szeregu $k_1k_2k_3k_4k_5k_6$, to ruch $f$ polega na przesunięciu pierwszego koralika na koniec:

$$f : k_1k_2k_3k_4k_5k_6 \longrightarrow k_2k_3k_4k_5k_6k_1.$$

Przesunięcie dwóch koralików polega na dwukrotnym zastosowaniu $f$. Możemy, więc ten ruch oznaczyć przez $f \cdot f$ lub $f^2$. Podobnie przesunięcie trzech koralików oznaczamy przez $f^3$, czterech przez $f^4$ itd. Wykonując kolejno te przesunięcia zauważymy, że $f^6$ jest identycznością, więc $f^6 = id$. Wypiszmy listę kolejnych przekształceń:

$$\begin{aligned}
id :&\quad k_1k_2k_3k_4k_5k_6 \longrightarrow k_1k_2k_3k_4k_5k_6,\\
f :&\quad k_1k_2k_3k_4k_5k_6 \longrightarrow k_2k_3k_4k_5k_6k_1,\\
f^2 :&\quad k_1k_2k_3k_4k_5k_6 \longrightarrow k_3k_4k_5k_6k_1k_2,\\
f^3 :&\quad k_1k_2k_3k_4k_5k_6 \longrightarrow k_4k_5k_6k_1k_2k_3,\\
f^4 :&\quad k_1k_2k_3k_4k_5k_6 \longrightarrow k_5k_6k_1k_2k_3k_4,\\
f^5 :&\quad k_1k_2k_3k_4k_5k_6 \longrightarrow k_6k_1k_2k_3k_4k_5,
\end{aligned}$$

a $f^6 = id$. Ruch $f^n$ polega na przesunięciu $n$ pierwszych koralików na koniec. Osoby, które grają w karty, może zauważyły, że przełożenie talii kart jest ruchem tego rodzaju.

Zauważmy jeszcze, że $f^5$ jest ruchem odwrotnym do $f$, bo przesuwa ostatni koralik na początek. Podobnie $f^4$ jest odwrotny do $f^2$, a $f^3$ odwrotny do siebie.

Oznaczmy przez $G$ zbiór wszystkich powyższych ruchów, więc $G = \{id, f, f^2, f^3, f^4, f^5\}$. Dla dowolnych dwóch ruchów $g, h$ ze zbioru $G$ możemy te ruchy wykonać kolejno, otrzymując ruch, który oznaczymy przez $g \cdot h$ i który też należy do zbioru $G$ [3]. Wynik $g \cdot h$ będziemy nazywać po prostu iloczynem $g$ i $h$. Na przykład obliczmy $f^2 \cdot f^3$:

$$k_1k_2k_3k_4k_5k_6 \xrightarrow{f^2} k_3k_4k_5k_6\ k_1k_2 \xrightarrow{f^3} k_6\ k_1k_2\ k_3k_4k_5,$$

[3] Jest kwestią umowy czy najpierw wykonujemy $g$ potem $h$, czy odwrotnie najpierw $h$ potem $g$. My przyjmujemy ten pierwszy sposób.

więc $f^2 \cdot f^3 = f^5$.

Ogólniej spełniona jest zasada $f^n \cdot f^m = f^{n+m}$. Oczywiście suma $m+n$ może przekroczyć 6, ale wtedy będziemy korzystać z zasady $f^6 = id$ oraz oczywistych równości $id \cdot f^n = f^n \cdot id = f^n$. Na przykład

$$f^3 \cdot f^4 = f^7 = f^6 \cdot f = id \cdot f = f.$$

Zestawmy wszystkie możliwe wyniki operacji $\cdot$ w tabeli.

| $\cdot$ | $id$ | $f$ | $f^2$ | $f^3$ | $f^4$ | $f^5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $f$ | $f^2$ | $f^3$ | $f^4$ | $f^5$ |
| $f$ | $f$ | $f^2$ | $f^3$ | $f^4$ | $f^5$ | $id$ |
| $f^2$ | $f^2$ | $f^3$ | $f^4$ | $f^5$ | $id$ | $f$ |
| $f^3$ | $f^3$ | $f^4$ | $f^5$ | $id$ | $f$ | $f^2$ |
| $f^4$ | $f^4$ | $f^5$ | $id$ | $f$ | $f^2$ | $f^3$ |
| $f^5$ | $f^5$ | $id$ | $f$ | $f^2$ | $f^3$ | $f^4$ |

Tak określone działanie spełnia cztery zasady.

**1.** Dla każdej pary $g, h$ elementów zbioru $G$, ich iloczyn $g \cdot h$ też jest elementem zbioru $G$.

**2.** Działanie jest łączne. To znaczy dla dowolnej trójki $g, h, k \in G$ spełniona jest równość:

$$(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k).$$

**3.** Działanie ma element neutralny. To znaczy, że istnieje $e \in G$ taki, że $g \cdot e = e \cdot g = g$ dla wszystkich $g \in G$. Tym elementem jest $e = id$.

**4.** Każdy element $g \in G$ posiada element odwrotny $h \in G$ taki, że $g \cdot h = h \cdot g = id$. Element odwrotny do $g$ oznaczmy przez $g^{-1}$.

W naszym przypadku elementem odwrotnym do $f^n$ jest element $f^m$ taki, że $n + m = 6$. Inaczej możemy określić to tak, że jeśli $f^n$ polega na przesunięciu $n$ pierwszych koralików na koniec, to ruch odwrotny polega na przesunięciu $n$ końcowych koralików na początek.

Zbiór $G$, w którym określono operację $\cdot$ spełniającą te cztery powyższe zasady, nazywamy w matematyce grupą[4].

Ponieważ każdy element grupy $G$ wyznacza pewne przekształcenie zbioru naszyjników $\mathcal{N}$, to będziemy mówić, że grupa $G$ działa na zbiorze $\mathcal{N}$. Lemat Cauchy-Frobeniusa-Burnside wypowiada się właśnie o grupach działających na zbiorach.

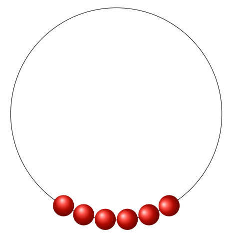
## 3. Orbity

Weźmy dowolny naszyjnik $n$. Po zastosowaniu przekształceń ze zbioru $G$ na naszyjniku $n$ otrzymamy zbiór, który nazywamy orbitą naszyjnika $n$ i oznaczamy przez $\mathrm{Orb}(n)$. Liczba elementów w danej orbicie

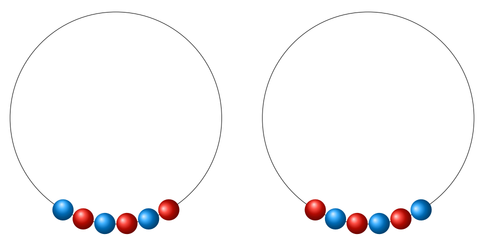
[4] W grupie nie musi być spełniona zasada przemienności tj. $g \cdot h = h \cdot g$.

zależy od naszyjnika i może potencjalnie zawierać od 1 do 6 naszyjników. Podamy przykłady orbit o różnej liczbie elementów.

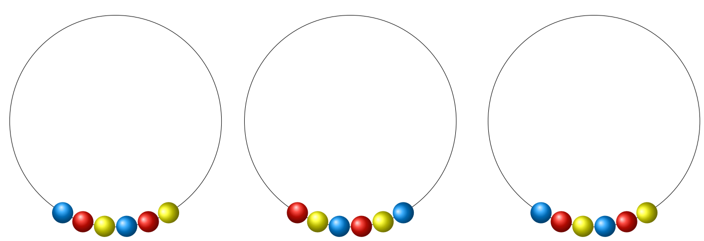
**1.** Orbita jednoelementowa:



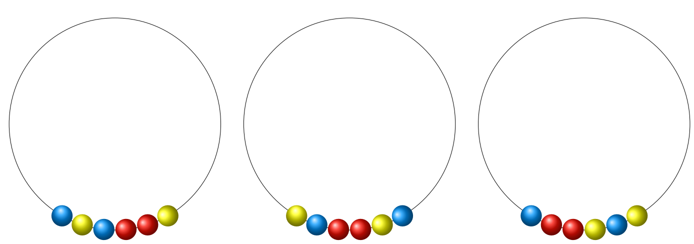
**2.** Orbita dwuelementowa:

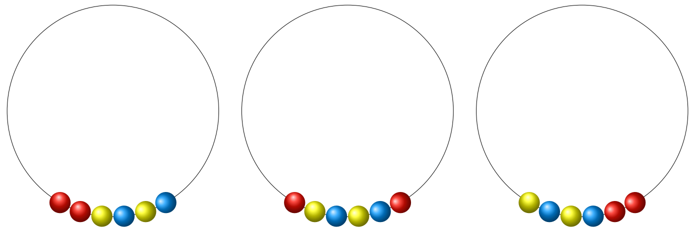


**3.** Orbita trójelementowa:



**4.** Orbita sześcioelementowa:





Nie jest przypadkiem, że liczby elementów w orbicie są dzielnikami liczby 6, która jest ilością elementów grupy $G$.

Ta zasada jest zawsze spełniona:

*Niech $G$ będzie grupą złożoną z $n$ elementów działającą na pewnym zbiorze $\mathcal{X}$. Wtedy liczba elementów w każdej orbicie jest dzielnikiem liczby $n$.*

Orbity spełniają trzy ważne własności.

**1.** Jeśli naszyjniki $n_1$ i $n_2$ należą do tej samej orbity, to ich orbity są równe, to znaczy $\mathrm{Orb}(n_1) = \mathrm{Orb}(n_2)$. Ten warunek jest spełniony, gdy istnieje $g$, które przekształca $n_1$ na $n_2$.

**2.** Jeśli $n_1$ i $n_2$ należą do różnych orbit, to ich orbity są rozłączne, to znaczy nie mają wspólnych elementów.

**3.** Każdy naszyjnik należy do dokładnie jednej orbity.

Z powyższych własności wynika, że liczba rozróżnialnych naszyjników jest równa liczbie różnych orbit.

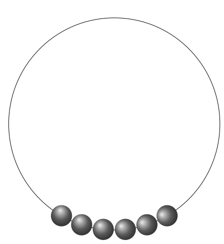
# 4. Charaktery

Jeśli ruch $g$ przekształca naszyjnik $n$ na ten sam naszyjnik, to $n$ nazywamy punktem stałym przekształcenia $g$.

**Przykłady.**

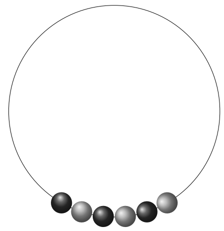
**1.** Każdy naszyjnik jest punktem stałym identyczności.

**2.** Jednokolorowe naszyjniki są punktami stałymi każdego przekształcenia:



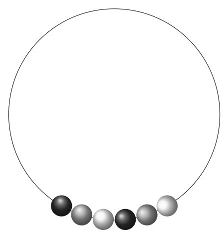
**3.** Punktami stałymi przekształceń $f$ i $f^5$ są tylko jednokolorowe naszyjniki.

**4.** Punkty stałe przekształceń $f^2$ i $f^4$ mają postać:

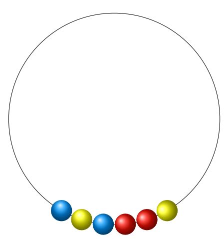


Natura przekształceń $f^2$ i $f^4$ jest podobna. Przekształcenie $f^2$ polega na przeniesieniu dwóch pierwszych koralików z początku na koniec, a $f^4$ na przeniesieniu dwóch ostatnich na początek.

**5.** Punkty stałe przekształcenia $f^3$:



**6.** Naszyjnik



jest punktem stałym jedynie identyczności.

Charakterem przekształcenia $g$ nazywamy liczbę jego punktów stałych i będziemy go oznaczać przez $\chi(g)$.

Teraz jesteśmy przygotowani do sformułowania Lematu Cauchy'ego-Frobeniusa-Burnside'a.

# 5. Lemat Cauchy'ego-Frobeniusa-Burnside'a

Niech $G$ będzie pewną grupą złożoną z $n$ elementów, które oznaczamy przez $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Oznaczmy przez $t(G)$ liczbę różnych orbit przy działaniu $G$ na zbiorze $\mathcal{X}$.

**Lemat Cauchy'ego-Frobeniusa-Burnside'a**

*Liczba orbit przy działaniu grupy $G$ na zbiorze $\mathcal{X}$ jest równa średniej arytmetycznej charakterów wszystkich elementów grupy $G$, to znaczy*

$$t(G) = \frac{\chi(g_1) + \chi(g_2) + \cdots + \chi(g_n)}{n}.$$

Możemy teraz policzyć ile jest rozróżnialnych naszyjników. W tym celu wyznaczymy charaktery poszczególnych przekształceń. Wykorzystamy do tego opisy punktów stałych z powyższych przykładów.

**1.** $\chi(id) = 3^6 = 729$, bo każdy naszyjnik jest punktem stałym identyczności.

**2.** $\chi(f) = \chi(f^5) = 3$, bo tylko jednokolorowe naszyjniki są punktami stałymi tych przekształceń.

**3.** $\chi(f^2) = \chi(f^4) = 3^2 = 9$, bo każdy punkt stały jest określony przez dwa koraliki, z których każdy może być w jednym z trzech kolorów.

**4.** $\chi(f^3) = 3^3 = 27$.

Zatem wykorzystując wzór z lematu Cauchy'ego-Frobeniusa-Burnside'a, otrzymujemy liczbę rozróżnialnych naszyjników:

$$t(G) = \frac{729 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3^3}{6} = 130.$$

To dobra wiadomość, bo różne naszyjniki możemy założyć na 130 spotkań. Gdybyśmy, na przykład, brali udział w dwóch uroczystościach rocznie, to mamy ozdobę na 65 lat.

Możemy w łatwy sposób uogólnić powyższe obliczenia. Najpierw zauważmy, że gdybyśmy używali $k$ kolorów, to w powyższym wzorze wystarczy zamienić każde $3^l$ na $k^l$. Zatem liczba różnych naszyjników, w tym przypadku, jest równa

$$t(G) = \frac{k^6 + 2 \cdot k + 2 \cdot k^2 + k^3}{6}.$$

Na przykład dla $k = 4$ otrzymamy 700 naszyjników.

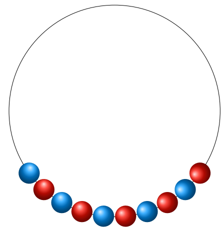
Inne uogólnienie polega na zwiększeniu liczby koralików. Dla dziesięciu koralików i $k$ kolorów otrzymamy wzór

$$t(G) = \frac{k^{10} + 4 \cdot k + 4 \cdot k^2 + k^5}{10}.$$

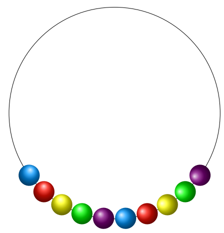
Dzieje się tak, bo w tym przypadku nasza grupa będzie się składała z przekształceń

$$G = \{id, f, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7, f^8, f^9\}.$$

Punktami stałymi przekształceń $f, f^3, f^7, f^9$ są naszyjniki jednokolorowe, przekształceń $f^2, f^4, f^6, f^8$ naszyjniki postaci:



a punkty stałe przekształcenia $f^5$ są następujące:



Wnikliwi czytelnicy zauważyli zapewne, że przekształcenie $f^l$ ma $k^s$ punktów stałych, gdzie $s = \mathrm{NWD}(l, n)$, a $n$ to liczba koralików. To pozwala nam na wyprowadzenie ogólnego wzoru na liczbę naszyjników z $n$ koralikami, z których każdy może mieć jeden z $k$ kolorów. Wyprowadzenie tego wzoru pozostawiamy zainteresowanym czytelnikom.

Oprócz liczby różnych naszyjników otrzymaliśmy jeszcze dodatkowe informacje. Otóż liczba 6 jest dzielnikiem $k^6+2\cdot k+2\cdot k^2+k^3$, bo przecież iloraz jest ilością rozróżnialnych naszyjników, a więc jest liczbą całkowitą. Pewien matematyk nazwał takie dodatkowe wnioski z twierdzeń „odpryskami". „Odpryski" same w sobie mogą stanowić ciekawe fakty lub czasem interesujące zadania. Inny matematyk stwierdził, że o wartości twierdzenia świadczy liczba takich „odprysków", im ich jest więcej, tym twierdzenie jest ważniejsze. A jeśli wśród „odprysków" są inne znane z literatury twierdzenia, to twierdzenie jest tym bardziej wartościowe.

Zobaczmy, co możemy uzyskać z naszego lematu. Przyjmijmy, że $p$ jest dowolną liczbą pierwszą, a $k$ dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Tworzymy naszyjniki z $p$ koralików o $k$ rożnych kolorach. Nasza grupa składa się z przekształceń $id, f, f^2, \ldots, f^{p-1}$. Ponieważ $p$ jest liczbą pierwszą, to $\mathrm{NWD}(l, p) = 1$ dla wszystkich $l$ takich, że $0 < l < p$. To oznacza, że przekształcenia $f, f^2, \ldots, f^{p-1}$ mają charakter równy $k$, a $id$ ma charakter $k^p$. Zatem liczba różnych orbit jest równa

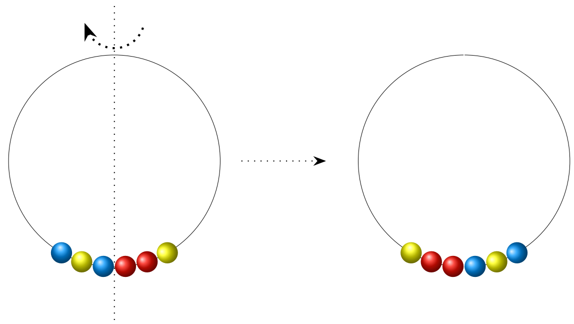
$$t(G) = \frac{k^p + (p-1)\cdot k}{p} = k + \frac{k^p - k}{p}.$$

Otrzymujemy stąd wniosek, że liczba pierwsza $p$ jest dzielnikiem liczby $k^p - k$ dla dowolnej liczby naturalnej $k$. A ten fakt jest znany jako Małe Twierdzenie Fermata[5].

## 6. Dodatkowe przekształcenia

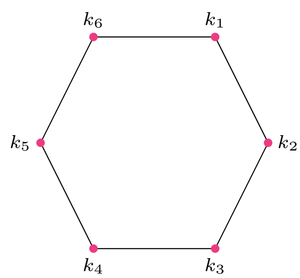
Spostrzegawczy obserwatorzy zauważą, że trzeba uwzględnić jeszcze jedną możliwość. Naszyjnik możemy obrócić w przestrzeni. Na przykład

[5] Łatwo można też to uogólnić na przypadek gdy $k < 0$.

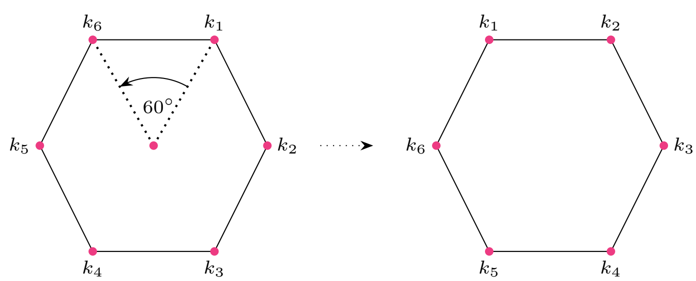


Ten ruch oznaczymy przez $s$.

Żeby skorzystać z lematu Cauchy'ego-Frobeniusa-Burnside'a musimy uzupełnić zbiór przekształceń tak aby była spełniona pierwsza zasada każdej grupy. W tym celu zmodyfikujmy nasze zadanie. Zamiast umieszczać koraliki na okrągłej żyłce, będziemy je umieszczać w wierzchołkach sześciokąta foremnego:

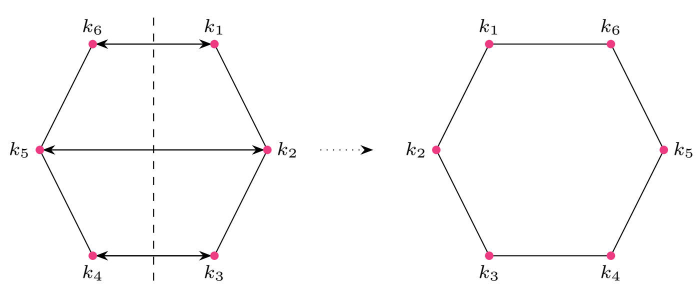



Wtedy przekształcenie $f$ odpowiadające przesunięciu pierwszej współrzędnej na koniec odpowiada obrotowi wokół środka sześciokąta o kąt $60°$.

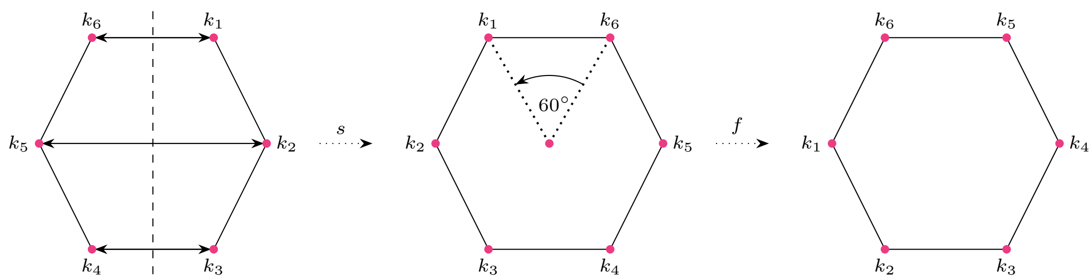



Pozostałe przekształcenia $f^2, f^3, f^4, f^5$ odpowiadają obrotom o kąty $120°, 180°, 240°, 300°$.

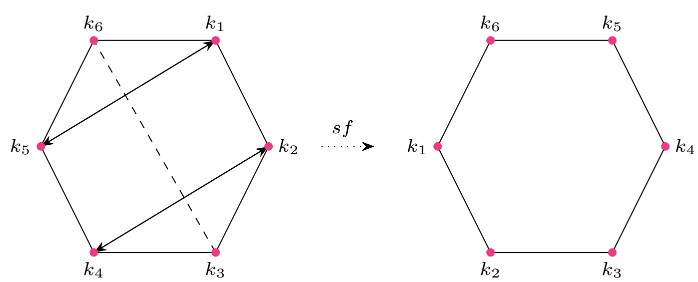
Natomiast $s$ odpowiada symetrii względem symetralnej boku $k_6k_1$.



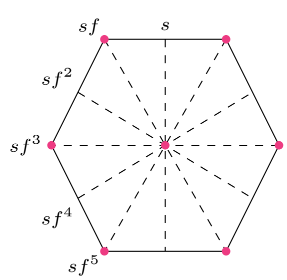
Wyznaczymy teraz grupę, w skład której wchodzą przekształcenia $id, f, f^2, f^3, f^4, f^5$ oraz $s$. Przyjrzyjmy się, jakie przekształcenie otrzymamy, wykonując kolejno ruch $s$, a potem $f$:




Przekształcenie, które otrzymaliśmy jest symetrią względem prostej przechodzącej przez wierzchołki $k_6$ i $k_3$:



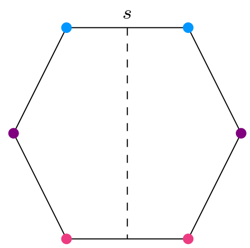

W podobny sposób, analizując wszystkie możliwości, dochodzimy do wniosku, że grupa wszystkich przekształceń składa się z sześciu obrotów $id, f, f^2, f^3, f^4, f^5$ o kąty $0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°$ oraz sześciu symetrii $s, sf, sf^2, sf^3, sf^4, sf^5$. Na poniższym rysunku zaznaczone są osie tych sześciu symetrii.




Przekształcenia, o których tu mowa, są izometriami płaszczyzny nie zmieniającymi położenia sześciokąta. Czytelników zainteresowanych izometriami odsyłamy do książki [3]. Z własności izometrii wynika, że w naszej grupie nie ma innych przekształceń oprócz tych wymienionych.

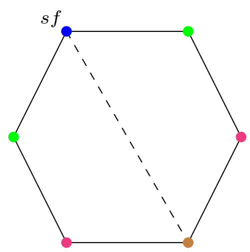
Charaktery obrotów zostały już policzone wcześniej. Obliczymy teraz charaktery symetrii. Symetrie dzielą się na dwa rodzaje. Symetriami pierwszego rodzaju są symetrie, których osie przechodzą przez środki naprzeciwległych boków. Do nich należą $s, sf^2, sf^4$. Osiami symetrii drugiego rodzaju są proste przechodzące przez naprzeciwległe wierzchołki. Do nich należą symetrie $sf, sf^3, sf^5$. Symetrie tego samego rodzaju mają równe charaktery.

Przypatrzmy się punktom stałym symetrii pierwszego rodzaju:




Wynika stąd, że jeśli używamy $k$ kolorów, to $\chi(s) = \chi(sf^2) = \chi(sf^4) = k^3$.

Punkty stałe symetrii drugiego rodzaju są następujące:




Zatem charaktery tych symetrii wynoszą $\chi(sf) = \chi(sf^3) = \chi(sf^5) = k^4$.

Teraz, korzystając z lematu Caucgy-Frobeniusa-Burnside'a, obliczymy liczbę orbit, czyli rozróżnialnych naszyjników:

$$t(G) = \frac{k^6 + 2 \cdot k + 2 \cdot k^2 + k^3 + 3 \cdot k^3 + 3 \cdot k^4}{12}.$$

Dla $k = 3$ kolorów otrzymujemy 92 różne naszyjniki.

## Literatura


1. W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, Cambridge Univ. Press. London, 1897.

   (dostępna pod adresem: https://www.gutenberg.org/files/40395/40395-pdf.pdf [widziane: 3-07-2023])
2. W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, second edition, Cambridge Univ. Press, London, 1911, reprinted by Dover, New York, 1955.

   (dostępna pod adresem: https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/otherpapers/burnside1911.pdf [widziane: 3-07-2023])
3. H. S. M. Coxeter, Wstęp do geometrii dawnej i nowej, PWN, Warszawa 1967.
4. G. Frobenius, Ueber die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul, Crelle's J. 101 (1887), 273-299.
5. M.Ch.Klin, R.Poeschel, K.Rosenbaum, Algebra stosowana dla matematyków i informatyków, WNT, Warszawa 1992.
6. P.M. Neumann, A lemma that is not Burnside's, The Mathematical Scientist, 4 (2) 1979, 133–141.
7. E.M. Wright, Burnside's Lemma: A Historical Note, Journal of Combinatorial Theory, Series B 30, 89-90 (1981).
8. Wikipedia: Stigler's law of eponymy – https://en.wikipedia.org/wiki/Stigler%27s_law_of_eponymy [widziane: 9-07-2023].