MINUT 2020 (2), s. 84–91
ISSN 2719-3063

Piotr SŁANINA

Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Konkurs "O złoty indeks Politechniki Śląskiej" w dziedzinie matematyki, edycja 2019/2020

Streszczenie. Celem artykułu jest propagowanie Konkursu "O złoty indeks Politechniki Śląskiej" w dziedzinie matematyki, edycja 2019/2020 wśród jak największej rzeszy uczniów i nauczycieli szkół średnich. W artykule przedstawione zostały przykładowe rozwiązania zadań ze wszystkich etapów Konkursu w formie, w jakiej z jednej strony można oczekiwać od uczniów, z drugiej strony wystarczającej do uzyskania maksymalnej liczby punktów.

Słowa kluczowe: Złoty Indeks, konkurs.

1. Wstęp

Konkurs "O złoty indeks Politechniki Śląskiej" jest cyklicznym, dwuetapowym konkursem, organizowanym przez Politechnikę Śląską w Gliwicach. Jego celem jest propagowanie wybranych nauk ścisłych wśród uczniów szkół średnich oraz wyłowienie spośród nich najbardziej utalentowanych. Pierwszy etap polega na zdalnym rozwiązywaniu zadań. Uczestnicy pierwszego etapu, którzy uzyskają odpowiednią liczbę punktów, kwalifikują się do drugiego etapu, który jest organizowany na Politechnice Śląskiej. Najlepsi uczestnicy drugiego etapu otrzymują tytuły Laureatów I, II i III stopnia. Główną nagrodą dla Laureatów I stopnia są miejsca na prawie wszystkich kierunkach studiów na Politechnice Śląskiej, a dla Laureatów II i III stopnia punkty preferencyjne w postępowaniu rekrutacyjnym. Szczegóły dotyczące konkursu można znaleźć na stronie https://rekrutacja.polsl.pl/zloty-indeks/

W edycji 2019/2020, konkurs został przeprowadzony w czterech dziedzinach: matematyki, fizyki, chemii i informatyki.

W każdym z etapów uczestnicy konkursu w dziedzinie matematyki mieli do rozwiązania po cztery zadania wybrane przez komisję przedmiotową. Wymagany do ich rozwiązania zakres materiału nie wykraczał poza podstawę programową dla przedmiotu matematyka, IV etap edukacyjny, zakres rozszerzony. Za każde zadanie można było uzyskać maksymalnie 10 punktów.

W dalszej części artykułu przedstawimy zadania z obydwu etapów w dziedzinie matematyki z przykładowymi rozwiązaniami w formie wystarczającej do uzyskania maksymalnej liczby punktów przez uczest-

Autor korespondencyjny: P. Słanina (piotr.slanina@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 29.04.2020.

nika konkursu. Ponieważ artykuł jest skierowany głównie do uczniów szkół średnich i ich nauczycieli, dlatego narzędzia użyte do rozwiązywania zadań nie będą wykraczać poza podstawę programową. Również przedstawione rozwiązania nie są maksymalnie uproszczone ponieważ chcemy, aby były one wzorem dla uczestników kolejnych edycji konkursu, nie tylko ze względu na prowadzony ciąg rozumowań, ale także ze względu na oczekiwaną dokładność opisu rozwiązania. Przykładowo, pomimo możliwości zdalnego rozwiązywania zadań, niewielu z uczestników konkursu, którzy prawidłowo rozwiązali zadanie 4 z pierwszego etapu, korzystała ze wzoru na objętość ściętego stożka. Dlatego w prezentowanym rozwiązaniu skorzystaliśmy tylko ze wzorów na objętość stożka. Również większość uczestników, którzy rozwiązywali zadanie 1 z etapu pierwszego drugim z przedstawionych dalej sposobów, aby wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty nie korzystała z gotowego wzoru lecz rozwiązywała odpowiedni układ równań, który przedstawiliśmy w tym rozwiązaniu. Przekształcenia, które trudno pominąć w trakcie własnoręcznych obliczeń, nie zostały również pominięte w rozwiązaniach. Mamy przez to nadzieję, że rozwiązania będą łatwiejsze w odbiorze dla szerszego grona uczniów.

Oczywiście, rozwiązania wykraczające poza zakres szkoły średniej też są akceptowane w konkursie. Między innymi zadanie 4 z pierwszego etapu można rozwiązać przy użyciu rachunku całkowego.

Szczególnie w przypadku pierwszego etapu, Komisja starała się unikać wyboru zadań, których rozwiązania znajdują się w internecie lub innych źródłach. W praktyce nie zawsze da się tego uniknąć. Zgodnie z regulaminem konkursu, rozwiązywanie zadania powinno być samodzielne, więc aby uniknąć wykluczenia z konkursu, niedopuszczalne jest ani przepisywanie gotowego rozwiązania z dowolnego źródła ani wspólne rozwiązywanie zadań.

2. Pierwszy etap

W pierwszym etapie z dziedziny matematyki wzięło udział 88 uczestników. 66 uczestników, uzyskując co najmniej 50% możliwych do zdobycia punktów, zakwalifikowało się do drugiego etapu.

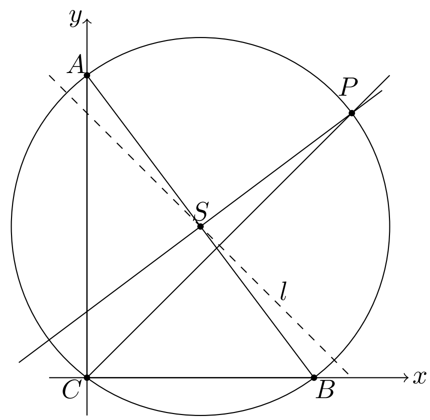
Średnia liczba punktów zdobytych przez uczestników pierwszego etapu za rozwiązanie kolejnych zadań wynosiła 9.65, 7.41, 5.88 i 6.10. Dwóch uczestników uzyskało maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 1. Dany jest trójkąt ABC, którego boki mają długość $|AB| = 10$, $|AC| = 8$, $|BC| = 6$. Punkt P jest położony na przecięciu symetralnej boku AB oraz dwusiecznej kąta $\sphericalangle ACB$. Oblicz pole trójkąta APB.

Rozwiązanie Ponieważ $|AC|^2 + |BC|^2 = 64 + 36 = 100 = |AB|^2$, więc $\measuredangle ACB = 90°$. Niech S będzie środkiem okręgu o opisanego na trójkącie ABC, l - prostą prostopadłą do prostej zawierającej odcinek CP i przechodzącą przez S. Wtedy odcinek CS jest symetryczny do odcinka SP względem prostej l, więc P należy do o. Ponieważ AB jest średnicą okręgu o więc $\measuredangle APB = 90°$. Trójkąt APB jest równoramienny więc $\measuredangle PAB = \measuredangle PBA = 45°$ a $|SP| = \frac{1}{2}|AB| = 5$.

Ostatecznie, pole APB jest równe $P_{APB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |SP| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$. □

Inne rozwiązanie Ponieważ $|AC|^2 + |BC|^2 = 64 + 36 = 100 = |AB|^2$, więc $\measuredangle ACB = 90°$. W kartezjańskim układzie współrzędnych ustalmy $A(0, 8)$, $B(6, 0)$ i $C(0, 0)$. Wtedy prosta zawierająca dwusieczną kąta $\sphericalangle ACB$ dana jest równaniem $y = x$, a równanie prostej $y = ax + b$ zawierającej punkty A i B



Rysunek 1

wyznaczamy z układu równań:

$$\begin{cases} 8 = 0a + b \\ 0 = 6a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = b \\ 0 = 6a + 8 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3} \wedge b = 8,\ y = -\frac{4}{3}x + 8.$$

Symetralna boku AB zawiera punkt $S(3,4)$ i jest prostopadła do prostej $y = -\frac{4}{3}x + 8$. Stąd jej równanie ma postać $y - 4 = \frac{3}{4}(x - 3)$.

Punkt P jest punktem przecięcia się prostych: $y = x$ i $y - 4 = \frac{3}{4}(x - 3)$. Stąd

$$\begin{cases} x - 4 = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x = \frac{7}{4} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow P(7,7).$$

Stąd $|SP| = \sqrt{(7-3)^2 + (7-4)^2} = 5$ i pole szukanego trójkąta to

$$P_{APB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |SP| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25.\square$$

Zadanie 2. Rozwiąż nierówność:

$$\log_{x^2} 2 + \log_{x^4} 2 + \log_{x^8} 2 + \cdots + \log_{x^{2^n}} 2 \leqslant 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Rozwiązanie. Założenia: $\left(x^2 > 0 \wedge x^2 \neq 1\right) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Uprościmy najpierw lewą stronę nierówności:

$$L = \frac{1}{\log_2 x^2} + \frac{1}{\log_2 x^4} + \frac{1}{\log_2 x^8} + \cdots + \frac{1}{\log_2 x^{2^n}} = \frac{1}{\log_2 x^2} + \frac{1}{2\log_2 x^2} + \frac{1}{4\log_2 x^2} \cdots + \frac{1}{2^{n-1}\log_2 x^2} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{\log_2 x^2} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\log_2 x^2} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{2}{\log_2 x^2}.$$

Stąd nasza nierówność ma postać:

$$\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{2}{\log_2 x^2} \leqslant 1-\frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \frac{2}{\log_2 x^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2\log_2 x^2 - \log_2^2 x^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \log_2 x^2(2-\log_2 x^2) \leqslant 0.$$

Niech $t = \log_2 x^2$. Dalej, $t(2-t) = 0$ dla $t = 0 \vee t = 2$, więc $t(2-t) \leqslant 0$ dla $(0 \geqslant t \vee 2 \leqslant t)$. Dalej,

$$\left(0 \geqslant \log_2 x^2 \vee 2 \leqslant \log_2 x^2\right) \Leftrightarrow \left(1 \geqslant x^2 \vee 4 \leqslant x^2\right) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle -1,1\rangle \cup \langle 2,\infty\rangle .$$

Po uwzględnieniu założeń, $x \in (-\infty,-2\rangle \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup \langle 2,\infty\rangle$. □

Zadanie 3. Wyznacz okres podstawowy ciągu (a_n), gdzie $a_n = \sin\frac{\pi n^2}{6}$ *(okresem podstawowym ciągu (a_n) nazywamy najmniejszą liczbę $p \in \mathbb{N}$, dla której dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_{n+p}$).*

Rozwiązanie. Wykorzystamy, że podstawowy okres funkcji $y = \sin x$ wynosi $2\pi = \frac{12\pi}{6}$. Niech $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

$$n = 6k \Rightarrow n^2 = 12\cdot 3k^2 \Rightarrow \sin\left(\frac{(6k)^2\pi}{6}\right) = \sin 0 = 0,$$

$$n = 6k+1 \Rightarrow n^2 = 12\cdot(3k^2+k)+1 \Rightarrow \sin\left(\frac{(6k+1)^2\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$n = 6k+2 \Rightarrow n^2 = 12(3k^2+2k)+4 \Rightarrow \sin\left(\frac{(6k+2)^2\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$n = 6k+3 \Rightarrow n^2 = 12(3k^2+3k)+9 \Rightarrow \sin\left(\frac{(6k+3)^2\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{9\pi}{6}\right) = -1,$$

$$n = 6k+4 \Rightarrow n^2 = 12(3k^2+4k+1)+4 \Rightarrow \sin\left(\frac{(6k+4)^2\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

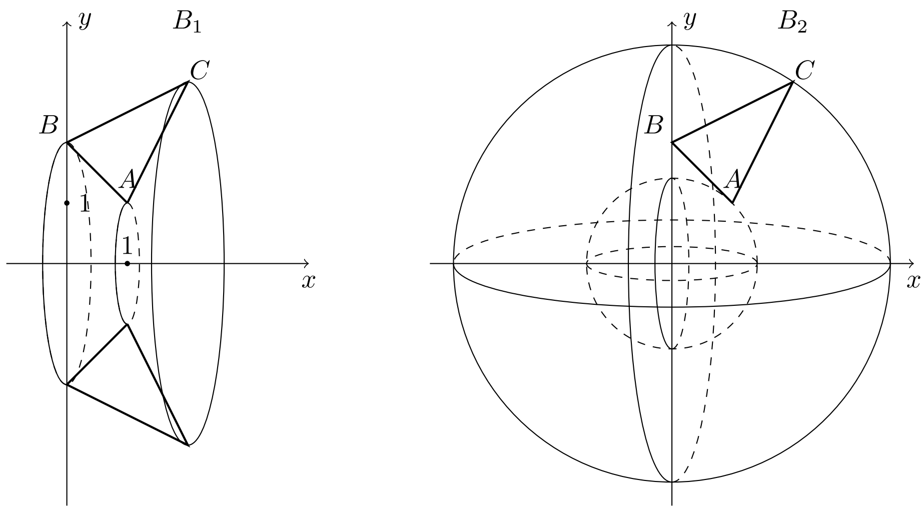
$$n = 6k+5 \Rightarrow n^2 = 12(3k^2+5k+2)+1 \Rightarrow \sin\left(\frac{(6k+5)^2\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Zatem okres podstawowy ciągu (a_n) wynosi 6. □

Zadanie 4. Obracając trójkąt o wierzchołkach $A(1,1)$, $B(0,2)$ i $C(2,3)$ wokół osi OX, otrzymujemy bryłę B_1. Następnie obracając bryłę B_1 dookoła osi OY otrzymujemy bryłę B_2. Ostatecznie, obracając w przestrzeni bryłę B_2 dookoła prostej prostopadłej do osi OX oraz OY i zawierającej środek układu współrzędnych otrzymujemy bryłę B_3. Oblicz objętości brył B_1 i B_3.

Rozwiązanie.
Dalej V będzie oznaczać objętość. Wprowadzimy następujące oznaczenia do stożków o osi symetrii będącej osią OX: Wtedy $B_1 = (S_0 \setminus S_1) \setminus ((S_2 \setminus S_3) \cup (S_4 \setminus S_5))$,

stożek	wierzchołek	środek podstawy	długość prom. podstawy
S_0	$(-4,0)$	$(2,0)$	3
S_1	$(-4,0)$	$(0,0)$	2
S_2	$(\frac{1}{2},0)$	$(2,0)$	3
S_3	$(\frac{1}{2},0)$	$(1,0)$	1
S_4	$(2,0)$	$(0,0)$	2
S_5	$(2,0)$	$(1,0)$	1



Rysunek 2

$$V(B_1) = V(S_0) - V(S_1) - (V(S_2) - V(S_3)) - (V(S_4) - V(S_5)) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 6 - \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4 - \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2 - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1\right) = 6\pi.$$

Zauważmy, że każdy punkt danego trójkąta po wykonaniu wszystkich opisanych w treści zadania obrotów utworzy sferę o środku w środku układu współrzędnych i promieniu równym jego odległości od środka układu współrzędnych. Ze wszystkich punktów trójkąta, punkt A jest najbliżej a punkt C najdalej środka układu współrzędnych S. Ponieważ $|SA| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $|SC| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, więc co B_3 jest kulą o promieniu $\sqrt{13}$ z usuniętą ze środka kulą o promieniu $\sqrt{2}$. Dlatego

$$V(B_3) = \frac{4}{3}\pi\sqrt{13}^3 - \frac{4}{3}\pi\sqrt{2}^3 = \frac{4}{3}\pi\left(13\sqrt{13} - 2\sqrt{2}\right).\square$$

3. Drugi etap

W drugim etapie wzięło udział 62 uczestników. Średnia liczba punktów zdobytych za rozwiązanie kolejnych zadań wynosiła 6.77, 4.43, 4.16 i 5.98. 12 z uczestników zdobyło co najmniej 35 punktów i zostało Laureatami I stopnia. Kolejnych 14 uzyskało co najmniej 28 punktów i zostało Laureatami II stopnia. Nikt nie został Laureatem III stopnia.

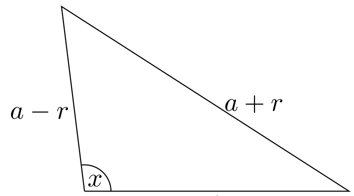
Zadanie 1. Długości boków trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Obwód trójkąta jest równy 30, a cosinus największego kąta wynosi $-\frac{1}{8}$. Oblicz pole tego trójkąta.

Rozwiązanie. Niech dla $a > 0$, $r \geqslant 0$, liczby $a-r$, a, $a+r$ będą długościami boków szukanego trójkąta. Z $(a-r) + a + (a+r) = 30$ mamy $3a = 30$, czyli $a = 10$.

Największy z kątów trójkąta (oznaczmy go x) jest naprzeciw najdłuższego z boków. Stąd z twierdzenia cosinusów:

$$(10+r)^2 = 10^2 + (10-r)^2 - 2 \cdot 10(10-r)\left(-\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100 + 20r + r^2 = 100 + 100 - 20r + r^2 + 25 - \frac{5}{2}r \Leftrightarrow \frac{85}{2}r = 125 \Leftrightarrow r = \frac{50}{17}.$$



Rysunek 3

Z jedynki trygonometrycznej i faktu, że $x < 180°$,

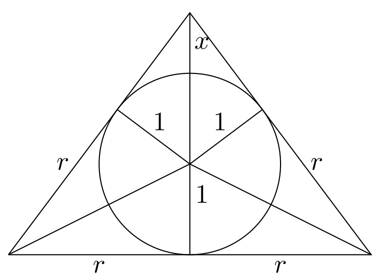
$$\sin^2 x + \left(-\frac{1}{8}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{63}{64} \Leftrightarrow \sin x = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

Pole trójkąta wynosi

$$P = \frac{1}{2}(a-r)a\sin x = \frac{1}{2}\left(10 - \frac{50}{17}\right) \cdot 10 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{225\sqrt{7}}{17}.\Box$$

Zadanie 2. W ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisano kulę o promieniu 1. Oblicz ile wynosi długość krawędzi podstawy tego z ostrosłupów, który ma najmniejszą objętość.

Rozwiązanie. Oznaczmy w ostrosłupie: wysokość: $1+x$, pole podstawy: P_p i długość krawędzi podstawy:



Rysunek 4

$2r$. Zauważmy, że $r > 1$ oraz $x > 1$.

Pole P rzutu bocznego ostrosłupa (Rysunek 4) możemy wyliczyć na dwa sposoby:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot (1+x),\ P = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (r + \sqrt{x^2-1}) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (r + \sqrt{x^2-1}) \cdot 1.$$

Po przyrównaniu ich do siebie mamy

$$r(1+x) = r + \frac{1}{2} \cdot (r + \sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{2} \cdot (r + \sqrt{x^2-1}) \ \Leftrightarrow\ r + rx = 2r + \sqrt{x^2-1} \ \Leftrightarrow$$

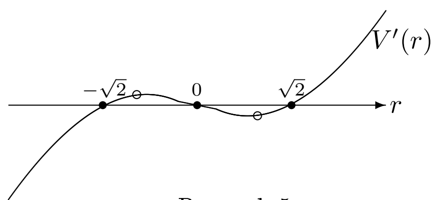
$$\Leftrightarrow\ r(x-1) = \sqrt{x^2-1} \ \Leftrightarrow\ r^2(x-1)^2 = (x-1)(x+1) \ \Leftrightarrow\ xr^2 - r^2 = x+1 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{r^2+1}{r^2-1}.$$

Objętość ostrosłupa wynosi

$$V(r) = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot (1+x) = \frac{1}{3} \cdot (2r)^2 \cdot \left(1 + \frac{r^2+1}{r^2-1}\right) = \frac{4r^2}{3} \cdot \frac{r^2-1+r^2+1}{r^2-1} = \frac{8}{3} \cdot \frac{r^4}{r^2-1}.$$

$$V'(r) = \frac{8}{3} \cdot \frac{4r^3(r^2-1) - r^4 2r}{(r^2-1)^2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{4r^5 - 4r^3 - 2r^5}{(r^2-1)^2} = \frac{16r^3(r^2-2)}{3(r^2-1)^2}.$$

$V'(r) = 0 \Leftrightarrow r \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$. Zmiany znaku $V'(r)$ przedstawia Rysunek 5. Stąd funkcja $V(r)$ ma w przedziale $(1, \infty)$ minimalną wartość dla $r = \sqrt{2}$. Ostatecznie długość krawędzi podstawy ostrosłupa o najmniejszej objętości wynosi $2\sqrt{2}$. □

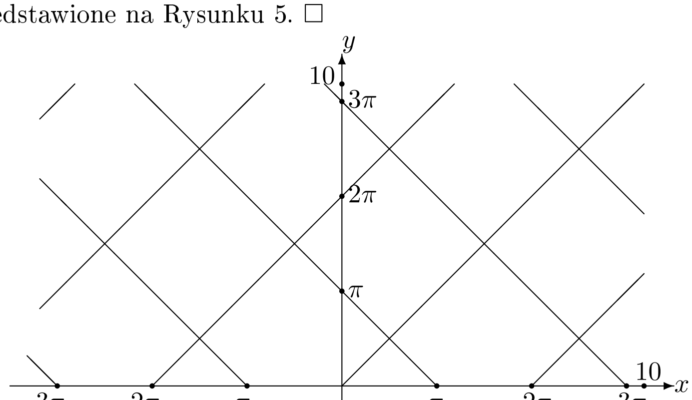


Rysunek 5

Zadanie 3. Przedstaw na płaszczyźnie zbiór punktów

$$\{(x,y) : -10 \leqslant x \leqslant 10 \ \wedge \ 0 \leqslant y \leqslant 10 \ \wedge \ \sin x = \sin y \ \wedge \ x \in \mathbb{R} \ \wedge \ y \in \mathbb{R}\}.$$

Rozwiązanie. $\sin y = \sin x \Leftrightarrow (y = x + 2k\pi \vee y = \pi - x + 2k\pi)$. Rozwiązaniem są fragmenty opisanych powyżej prostych, przedstawione na Rysunku 5. □



Rysunek 6

Zadanie 4. Oblicz

$$(1-2^{-2})(1-3^{-2})(1-4^{-2})\ldots(1-200^{-2}).$$

Rozwiązanie.

$$(1-2^{-2})(1-3^{-2})(1-4^{-2})\ldots(1-200^{-2}) = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \frac{4^2-1}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{200^2-1}{200^2} =$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)(4-1)(4+1)\dots(200-1)(200+1)}{3^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 200^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 199 \cdot 201}{(200!)^2} = \frac{199! \cdot \frac{201!}{2}}{200! \cdot 200!} = \frac{199! \cdot 200! \cdot 201}{199! \cdot 200 \cdot 200! \cdot 2} = \frac{201}{400}. \square$$