

Jan POCHCIAŁ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of Mathematics, Silesian University of Technology, Gliwice, Poland

## Wokół brachistochrony

**Streszczenie.** Praca przedstawia różne aspekty ruchu punktu materialnego w polu grawitacyjnym. W szczególności w oparciu równanie Eulera-Lagrange’a wyprowadza się równanie brachistochrony tj. krzywej realizującej najkrótszy czas ruchu oraz opisuje jej podstawowe własności i modyfikacje. Prezentowane treści ilustrowane są licznymi przykładami.

### 1. Wstęp

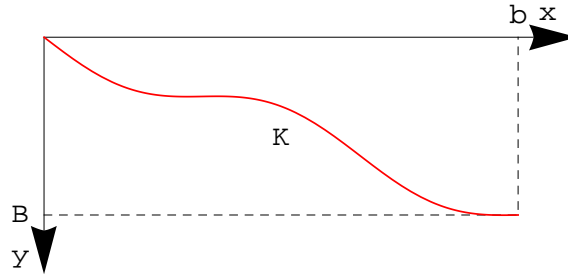
Zagadnienie brachistochrony (*brachistos* – najkrótszy, *chronos* – czas) polegające na znalezieniu krzywej w przestrzeni, łączącej dwa ustalone punkty, dla której czas ruchu punktu materialnego pod wpływem siły ciężkości jest najkrótszy zostało postawione przez J. Bernoulliego w 1696 r. i rozwiązane niezależnie przez I. Bernoulliego, J. Bernoulliego, Newtona i de l’Hospitála. Uogólnienia i problemy z nim związane dały początek rachunkowi wariacyjnemu, zajmującemu się szukaniem ekstremów funkcjonałów całkowitych, który z czasem stał się odrębnym działem analizy matematycznej.

### 2. Czas ruchu

Na wstępie przedstawimy dokładniej zagadnienie ruchu punktu materialnego w polu grawitacyjnym:

Punkt materialny w przestrzeni porusza się pod wpływem siły ciężkości od punktu  $P_0$  do punktu  $P_1$  po gładkiej lub kawałkami gładkiej krzywej  $K$ . Zakładamy, że ruch odbywa się bez strat energii (tarcia). Uwzględniając charakter zagadnień (szukanie czasu najkrótszego) oraz warunki fizyczne, bez zmniejszania ogólności, możemy ograniczyć się do krzywych płaskich. W większości przypadków będziemy ponadto zakładać, że prędkość początkowa w punkcie  $P_0$  jest równa 0.

Wprowadzając układ współrzędnych i współrzędne punktów końcowych, otrzymamy:  $P_0(a, A)$ ,  $P_1(b, B)$ . Dla uproszczenia późniejszych obliczeń przyjmujemy ponadto, że  $(a, A) = (0, 0)$  oraz ustalimy przeciwną orientację osi  $Oy$ .



Rysunek 1

Korzystając z zasady zachowania energii dostaniemy:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy,$$

czyli

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Z drugiej strony przyjmując, że ruch odbywa się po krzywej danej w postaci parametrycznej:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , gdzie  $t$  jest czasem, otrzymamy:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 + (y')^2} \frac{dx}{dt},$$

gdzie  $y'$  oznacza pochodną  $y$  względem zmiennej  $x$ . Stąd:

$$\sqrt{2gy} = \sqrt{1 + (y')^2} \frac{dx}{dt}$$

i ostatecznie, czas ruchu  $T$  po krzywej  $y = y(x)$  wyrazi się wzorem:

$$T = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (1)$$

**Uwaga 1.** W przypadku ruchu z prędkością początkową  $v_0$  otrzymamy:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgy,$$

czyli

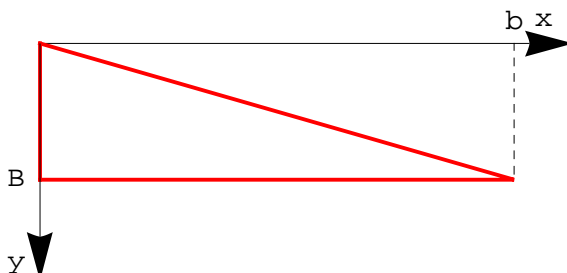
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gy}$$

i podobnie jak w (1),

$$T = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}} dx. \quad (2)$$

**Przykład 1.** Obliczymy czasy ruchu punktu materialnego bez prędkości początkowej od punktu  $(0,0)$  do punktu  $(b, B)$  po:

1. odcinku łączącym te punkty, (czas  $T_1$ ),
2. łamanej  $[(0,0), (0, B), (b, B)]$  (czas  $T_2$ ).



Rysunek 2

$$T_1 = \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \int_0^b \frac{\sqrt{1+(\frac{B}{b})^2}}{\sqrt{2g\frac{B}{b}x}} dx = \frac{\sqrt{1+(\frac{B}{b})^2}}{\sqrt{2g\frac{B}{b}}} \cdot 2\sqrt{b} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{b^2+B^2}}{\sqrt{gB}}.$$

Czas  $T_2$  przedstawimy w postaci sumy czasów ruchu po odcinku  $[(0,0), (0, B)]$  ( $T_3$ ) oraz po odcinku  $[(0, B), (b, B)]$  ( $T_4$ ), przy czym zakładamy, że w punkcie  $(0, B)$  nie następuje strata energii (prędkości).

Ruch po odcinku  $[(0,0), (0, B)]$  jest ruchem jednostajnie przyspieszonym, zatem  $B = \frac{g(T_3)^2}{2}$ ,

czyli  $T_3 = \sqrt{\frac{2B}{g}}$ .

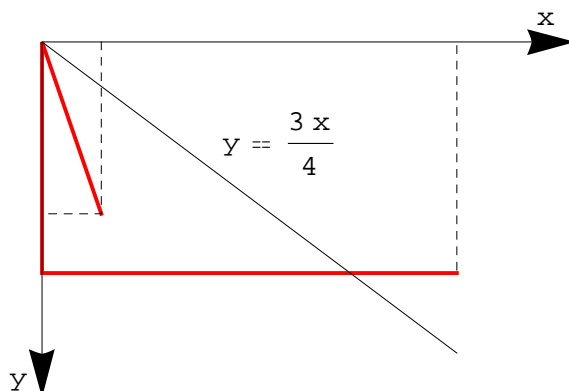
Ruch po odcinku  $[(0, B), (b, B)]$  jest ruchem jednostajnym z prędkością  $V_B = gT_3 = \sqrt{2gB}$ , zatem  $T_4 = \frac{b}{\sqrt{2gB}}$ .

Stąd ostatecznie  $T_2 = T_3 + T_4 = \sqrt{\frac{2B}{g}} + \frac{b}{\sqrt{2gB}}$ .

Porównując czasy  $T_1$  i  $T_2$  otrzymamy:  $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{b^2+B^2}}{\sqrt{gB}} = \sqrt{\frac{2B}{g}} + \frac{b}{\sqrt{2gB}}$ , czyli:

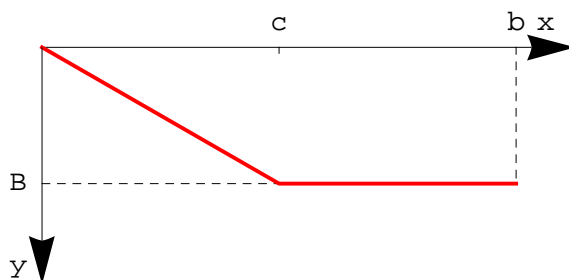
$$\sqrt{2}\sqrt{b^2+B^2} = \sqrt{2} \left( B + \frac{b}{2} \right), \text{ co po prostych przekształceniach prowadzi do zależności: } 3b = 4B.$$

Wynika stąd, że jeśli  $3b < 4B$ , to czas ruchu po odcinku jest krótszy, a gdy  $3b > 4B$ , to krótszy jest czas ruchu po łamanej.



Rysunek 3

**Przykład 2.** Obliczmy teraz czas ruchu punktu materialnego bez prędkości początkowej od punktu  $(0, 0)$  do punktu  $(b, B)$  po łamanej  $[(0, 0), (c, B), (b, B)]$ , gdzie  $0 < c < b$ .



Rysunek 4

Podobnie jak w Przykładzie 1 podzielimy szukany czas  $T(c)$  na dwie części (czasy  $T_3$  i  $T_4$ ).

$$T_3 = \int_0^c \frac{\sqrt{1 + (\frac{B}{c})^2}}{\sqrt{2g\frac{B}{c}x}} dx = \frac{\sqrt{1 + (\frac{B}{c})^2}}{\sqrt{2g\frac{B}{c}}} \cdot 2\sqrt{c} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{c^2 + B^2}}{\sqrt{gB}}, \quad T_4 = \frac{b-c}{\sqrt{2gB}}.$$

Stąd ostatecznie:  $T(c) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{c^2 + B^2}}{\sqrt{gB}} + \frac{b-c}{\sqrt{2gB}}.$

Powstaje naturalne pytanie: dla jakiej wartości  $c$  czas ten jest najkrótszy?

$$T(c) = \frac{1}{\sqrt{gB}} (\sqrt{2}\sqrt{c^2 + B^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(b-c)).$$

Przyrównując pochodną do zera otrzymamy:

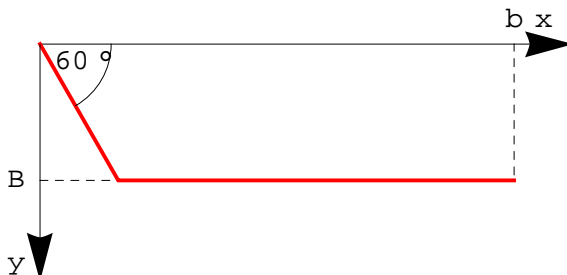
$$T'(c) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{gB}} \left( \frac{c}{\sqrt{c^2 + B^2}} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Stąd:  $\frac{c}{\sqrt{c^2 + B^2}} = \frac{1}{2}$ , co po prostych przekształceniach prowadzi do zależności:  $\frac{B}{c} = \sqrt{3}$ .

Łatwo sprawdzić, że dla  $c = \frac{B}{\sqrt{3}}$ , przy założeniu, że  $c < b$  czas ruchu:

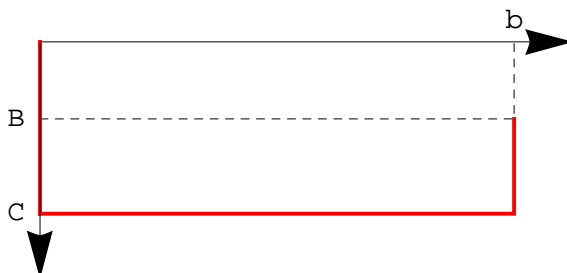
$$T(c) = T\left(\frac{B}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{gB}} \left( \sqrt{2} \sqrt{\frac{B^2}{3} + B^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( b - \frac{B}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{gB}} \left( \frac{B}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}b \right)$$

rzeczywiście jest najkrótszy (w szczególności krótszy od czasów z Przykładu 1).



Rysunek 5

**Przykład 3.** Obliczmy jeszcze czas ruchu punktu materialnego bez prędkości początkowej od punktu  $(0, 0)$  do punktu  $(b, B)$  w przypadku ruchu odbywającego się po odcinkach pionowych i poziomych tj. po łamanej  $[(0, 0), (0, C), (b, C), (b, B)]$ , gdzie  $C \geq B$ .



Rysunek 6

Korzystając z Przykładu 1 otrzymamy:

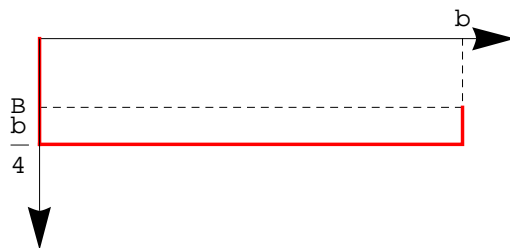
$$T(C) = 2\sqrt{\frac{2C}{g}} - \sqrt{\frac{2B}{g}} + \frac{b}{\sqrt{2gC}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( 2\sqrt{2C} - \sqrt{2B} + \frac{b}{\sqrt{2C}} \right)$$

i analogicznie jak w Przykładzie 2:

$$T'(C) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{C}} + \frac{b}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{2C\sqrt{C}} \right) \right) = 0,$$

co prowadzi do zależności  $C = \frac{b}{4}$ .

Otrzymany wynik oznacza, że dla  $b \leq 4B$  najkrótszy czas ruchu otrzymamy dla łamanej  $[(0, 0), (0, B), (b, B)]$  natomiast dla  $b > 4B$  dla łamanej  $[(0, 0), (0, \frac{b}{4}), (b, \frac{b}{4}), (b, B)]$ .



Rysunek 7

### 3. Równanie Eulera-Lagrange'a

Czasy ruchu wyrażone wzorami (1) i (2) zależne od funkcji  $y(x)$  są przykładami funkcyjonałów całkowych tj. funkcyjonałów danych w postaci całki o wartościach rzeczywistych określonych na pewnym zbiorze funkcji. Badanie funkcyjonałów całkowych, w szczególności szukanie ich ekstremów, należy do podstawowych zagadnień, jakimi zajmuje się rachunek wariacyjny.

Sformułujemy najpierw zagadnienie rachunku wariacyjnego w najprostszej postaci:

Załóżmy, że funkcja trzech zmiennych  $F(x, y, y')$  jest ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi do rzędu drugiego włącznie w zbiorze:  $\Phi = \{(x, y, y'); a \leq x \leq b, y, y' \text{ – dowolne}\}$ .

Szukamy ekstremum (tzw. słabego ekstremum) funkcyjonału:

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (3)$$

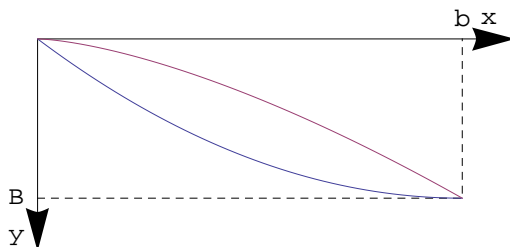
w klasie funkcji  $y(x)$  ciągłych wraz z pierwszą pochodną w przedziale  $[a, b]$ , spełniających warunki brzegowe:

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (4)$$

W ogólniejszej postaci, szukamy ekstremum funkcyjonału  $I(y)$  w klasie funkcji  $y(x)$  ciągłych w przedziale  $[a, b]$  z ciągłą pochodną w przedziale  $(a, b)$ , spełniających warunki brzegowe (4).

Rozważa się ponadto proste uogólnienia nie zakładając spełnienia jednego lub obu warunków brzegowych (zadanie z końcami swobodnymi) lub zakładając, że punkty  $(a, A)$  i  $(b, B)$  leżą na ustalonych krzywych (zadanie z końcami ruchomymi).

W interpretacji geometrycznej, najprostsze zadanie rachunku wariacyjnego oznacza szukanie krzywej łączącej dwa zadane punkty, realizującej ekstremum funkcyjonału  $I(y)$ .



Rysunek 8

Niżej podane twierdzenie (patrz np. [1],[2] lub [3]) jest kluczowe dla rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia:

**Twierdzenie 1.** *Warunkiem koniecznym tego, aby funkcjonal:*

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

*określony w zbiorze funkcji  $y(x)$  ciągłych wraz z pierwszą pochodną w przedziale  $[a, b]$  i spełniających warunki  $y(a)=A$ ,  $y(b)=B$  przyjmował ekstremum lokalne dla danej funkcji  $y(x)$ , jest spełnienie przez tę funkcję następującego równania, nazywanego równaniem Eulera-Lagrange'a:*

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (5)$$

**Uwaga 2.** Rozwiązania równania (5) nazywamy ekstremalami lub funkcjami stacjonarnymi funkcjonału (3).

**Uwaga 3.** Równanie Eulera przedstawia warunek konieczny ekstremum lokalnego funkcjonału (3). W wielu zagadnieniach, co wynika bezpośrednio z sensu fizycznego lub geometrycznego zadania, spełnienie warunku koniecznego wystarcza do rozwiązania zadania, tzn. znaleziona ekstremala realizuje szukane ekstremum lokalne będące jednocześnie ekstremum globalnym.

**Uwaga 4.** Ponieważ

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = F_{x,y'} + F_{y,y'} y' + F_{y',y'} y'',$$

więc równanie Eulera jest równaniem różniczkowym rzędu drugiego postaci:

$$F_y - F_{x,y'} - F_{y,y'} y' - F_{y',y'} y'' = 0, \quad (6)$$

z warunkami brzegowymi (4):  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ .

Oznacza to określone problemy zarówno w znalezieniu całki ogólnej równania (6) jak i, ze względu na warunki brzegowe (zamiast początkowych), możliwość niejednoznaczności lub braku całki szczególnej spełniającej podane warunki brzegowe.

W przypadku zadania z końcami swobodnymi lub ruchomymi warunki brzegowe zastąpione są tzw. warunkami transversalności, które w przypadku funkcji  $F(x, y, y')$  postaci  $G(x, y) \cdot \sqrt{1 + (y')^2}$  sprowadzają się do prostopadłości ekstremali do ograniczenia.

**Uwaga 5.** W przypadku, gdy funkcja  $F$  nie zależy od  $x$  tzn. gdy  $I(y) = \int_a^b F(y, y') dx$  równanie Eulera-Lagrange'a (5) redukuje się do postaci:

$$F_y - F_{y,y'} y' - F_{y',y'} y'' = 0,$$

co, jak łatwo sprawdzić, jest równoważne następującemu równaniu rzędu pierwszego z parametrem  $C$ :

$$F - y'F_{y'} = C. \quad (7)$$

## 4. Brachistochrona

Na wstępie, uwzględniając uwagi podane w rozdziale 2, przedstawimy dokładniej zagadnienie brachistochrony:

Punkt materialny na płaszczyźnie porusza się pod wpływem siły ciężkości bez strat energii od punktu  $P_0(0, 0)$  do punktu  $P_1(b, B)$ . Zakładamy, że ruch odbywa się po krzywej gładkiej oraz, że prędkość początkowa w punkcie  $P_0$  jest równa 0. Szukamy takiej krzywej, dla której czas ruchu jest najkrótszy.

Zagadnienie brachistochrony sprowadza się zatem do najprostszego zadania rachunku wariacyjnego dla funkcjonału:

$$T = I(y) = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx,$$

z warunkami brzegowymi  $y(0) = 0$ ,  $y(b) = B$ .

Ponieważ czas ruchu po krzywej  $y = y(x); x \in [0, b]$  nie zależy od zmiennej  $x$ , więc zgodnie z Twierdzeniem 1 i Uwagą 5, znalezienie rozwiązania sprowadza się do rozwiązania równania:

$$F - y'F_{y'} = C,$$

które przyjmuje tu postać:

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}\sqrt{2gy}} = C,$$

czyli

$$1 + (y')^2 - (y')^2 = C\sqrt{1 + (y')^2}\sqrt{2gy}.$$

Zatem:

$$y = \frac{C_1}{1 + (y')^2}, \quad \text{gdzie } C_1 = \frac{1}{2gC^2} > 0.$$

Znajdziemy rozwiązanie ostatniego równania w postaci parametrycznej stosując podstawienie:

$$y' = \operatorname{tg} \varphi \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Otrzymamy wówczas:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \cos^2 \varphi = \frac{C_1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \\ y' &= -C_1 \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{dx} = -2C_1 \sin \varphi \cos \varphi \frac{d\varphi}{dx}, \\ \frac{dx}{2C_1} &= -\cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi, \end{aligned}$$



czyli:

$$\begin{cases} x = -\frac{C_1}{2}(2\varphi + \sin 2\varphi) + C_2, \\ y = \frac{C_1^2}{2}(1 + \cos 2\varphi), \end{cases}$$

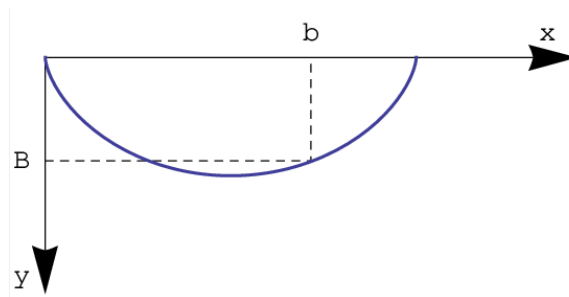
co po podstawieniach:  $2\varphi = \pi - \theta$  ( $0 < \theta < 2\pi$ ),  $r = \frac{C_1}{2}$   $C = C_2 - \frac{C_1\pi}{2}$  prowadzi do postaci:

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin \theta) + C, \\ y = r(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

Uwzględniając warunek brzegowy  $y(0) = 0$  otrzymamy ostateczne rozwiązanie w postaci równania cykloidy:

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin \theta), \\ y = r(1 - \cos \theta), \end{cases} \quad (8)$$

gdzie stała  $r$  wyznaczona jest przez drugi warunek brzegowy  $y(b) = B$ .



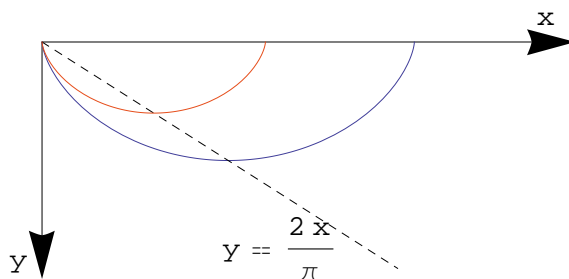
Rysunek 9

**Uwaga 6.** Można wykazać, że otrzymana cykloida (8) jest rozwiązaniem zadania o brachistochronie również w szerszym zbiorze krzywych kawałkami gładkich tj. krzywych dopuszczających tzw. punkty kątowe (jak w Przykładzie 2). Wówczas od funkcji spełniających równanie (5) na odpowiednich podprzedziałach przedziału  $[0, b]$  wraz z warunkami brzegowymi wymaga się spełnienia tzw. warunków Weierstrassa-Erdmanna (patrz np. [1],[2],[3]), które w przypadku funkcjonału (1) sprowadzają się do równości pochodnych jednostronnych w punktach kątowych.

**Uwaga 7.** Ponieważ najniższym punktem cykloidy jest punkt  $(\pi r, 2r)$ , więc prosta  $y = \frac{2}{\pi}x$  dzieli ćwiartkę płaszczyzny  $x, y \geq 0$  na dwie części;

jeśli punkt końcowy  $(b, B)$  spełnia warunek  $B \geq \frac{2}{\pi}b$ , to ruch po cykloidzie odbywa się tylko w dół,

jeśli punkt końcowy  $(b, B)$  spełnia warunek  $B < \frac{2}{\pi}b$ , to druga część ruchu odbywa się w górę (w szczególności, gdy  $B = 0$  rozwiązanie tworzy pełny łuk cykloidy).



Rysunek 10

**Przykład 4.** Obliczmy czas ruchu bez prędkości początkowej po cykloidzie (8) od punktu  $P_0(0, 0)$  do punktu  $P_1(r(\theta_1 - \sin \theta_1), r(1 - \cos \theta_1))$ .

Zgodnie z (1) czas ruchu jest równy:

$$T = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Podstawiając  $x = r(\theta - \sin \theta)$ , co prowadzi do  $y = r(1 - \cos \theta)$ ,  $dx = r(1 - \cos \theta) d\theta$ , po uwzględnieniu odpowiedniej zmiany granic całkowania, otrzymamy:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \int_0^{\theta_1} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)^2}}{\sqrt{2gr(1 - \cos \theta)}} r(1 - \cos \theta) d\theta = \\ &= \int_0^{\theta_1} \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}{2gr(1 - \cos \theta)^3}} r(1 - \cos \theta) d\theta = \int_0^{\theta_1} \sqrt{\frac{2(1 - \cos \theta)}{2gr(1 - \cos \theta)}} r d\theta = \sqrt{\frac{r}{g}} \theta_1. \end{aligned}$$

W szczególności, z uzyskanego rozwiązania wynika, że czas ruchu po części cykloidy (8) wyznaczonej parametrami  $\theta_1$  i  $\theta_2$  jest równy  $\sqrt{\frac{r}{g}}(\theta_2 - \theta_1)$ .

W przypadku  $r = 1$  i  $\theta_1 = \pi$ , czas ruchu od punktu  $(0, 0)$  do punktu  $(\pi, 2)$  jest równy  $\frac{\pi}{\sqrt{g}}$  i, jak łatwo sprawdzić, jest krótszy od czasu ruchu po łamanej  $[(0, 0), (\frac{2}{\sqrt{3}}, 2), (\pi, 2)]$ , a więc również po odcinku  $[(0, 0), (\pi, 2)]$  i łamanej  $[(0, 0), (0, 2), (\pi, 2)]$ .

W kolejnym przykładzie rozpatrzmy ruch z niezerową prędkością początkową.

**Przykład 5.** Znajdziemy najkrótszy czas w jakim punkt materialny przebędzie drogę od punktu  $P_0(0, 0)$  do punktu  $P_1(2 + \pi, 2)$  oraz krzywą, po której ruch się odbywa, jeśli prędkość w punkcie  $P_0(0, 0)$  jest równa  $\sqrt{4g}$ .

Zgodnie z (2), czas ruchu wynosi:

$$T = \int_0^{2+\pi} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{4g + 2gy}} dx.$$

Podstawiając  $\hat{y} = y + 2$  otrzymamy:

$$T = \int_0^{2+\pi} \frac{\sqrt{1 + (\hat{y}')^2}}{\sqrt{2g\hat{y}}} dx,$$

co prowadzi do rozwiązania:

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin \theta) + C, \\ \hat{y} = r(1 - \cos \theta), \end{cases}$$

przy czym  $\hat{y}(0) = 2$ ,  $\hat{y}(2 + \pi) = 4$ .

Uwzględniając warunki brzegowe otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} 0 = r(\theta_1 - \sin \theta_1) + C, \\ 2 + \pi = r(\theta_2 - \sin \theta_2) + C, \\ 2 = r(1 - \cos \theta_1), \\ 4 = r(1 - \cos \theta_2), \end{cases}$$

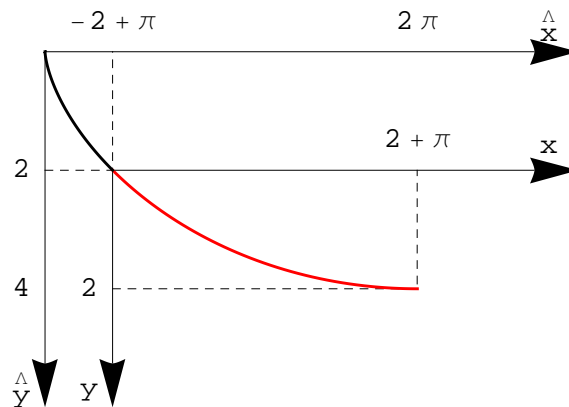
którego rozwiązaniami są liczby:  $r = 2$ ,  $C = 2 - \pi$ ,  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_2 = \pi$ .

Zatem szukana krzywa jest częścią cycloidy:

$$\begin{cases} x = 2(\theta - \sin \theta) + 2 - \pi, \\ \hat{y} = 2(1 - \cos \theta), \end{cases} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

lub, po podstawieniu  $\hat{x} = x - \pi + 2$ , częścią klasycznej cycloidy:

$$\begin{cases} \hat{x} = 2(\theta - \sin \theta), \\ \hat{y} = 2(1 - \cos \theta). \end{cases} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$



Rysunek 11

Czas ruchu obliczamy podobnie jak w Przykładzie 4:

$$T = \int_0^{2+\pi} \frac{\sqrt{1 + (\widehat{y}')^2}}{\sqrt{2g\widehat{y}}} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)^2}}{\sqrt{4g(1 - \cos \theta)}} 2(1 - \cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2g}}.$$

**Przykład 6.** Rozważmy następujące uogólnienie zagadnienia brachistochrony, w którym drugi koniec jest dowolnym punktem ustalonej prostej  $L$ , tzn. szukamy krzywej, dla której czas ruchu od punktu  $(0, 0)$  do prostej  $L$  jest najkrótszy.

Rozważymy dwa przypadki:

1.  $L : x = b$
2.  $L : x + y = b$

Ponieważ  $y(0) = 0$ , więc, jak w podstawowym zagadnieniu brachistochrony, rozwiązaniem równania Eulera w obu przypadkach jest cykloida postaci (8):

$$x = r(\theta - \sin \theta),$$

$$y = r(1 - \cos \theta),$$

gdzie, zgodnie z Uwagą 5, parametr  $r$  wymaga wyznaczenia z warunku prostopadłości rozwiązania do rozpatrywanej prostej.

Przypadek 1.

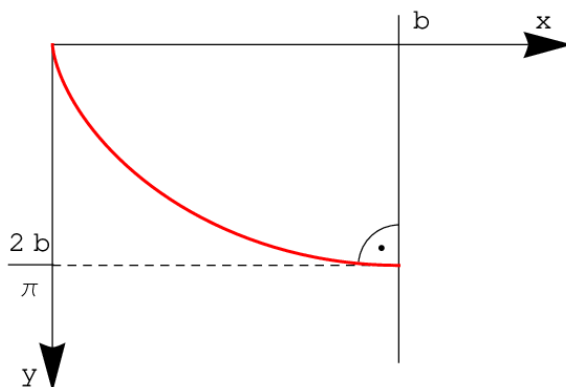
$y'(b) = 0$ , czyli  $\frac{dy}{d\theta} = r \sin \theta = 0$ , a stąd:  $\theta = \pi$  i  $r = \frac{b}{\pi}$ .

Ostatecznie otrzymamy:

$$x = \frac{b}{\pi}(\theta - \sin \theta),$$

$$y = \frac{b}{\pi}(1 - \cos \theta).$$

Oznacza to, że najkrótszy czas ruchu uzyskamy dla punktu końcowego  $(b, \frac{2b}{\pi})$ , który jest najniższym punktem cykloidy.



Rysunek 12

Przypadek 2.

$$y'(x) = 1, \text{ czyli } \frac{dy}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}$$

Stąd, uwzględniając warunek  $x + y = b$ , otrzymamy następujący układ równań:

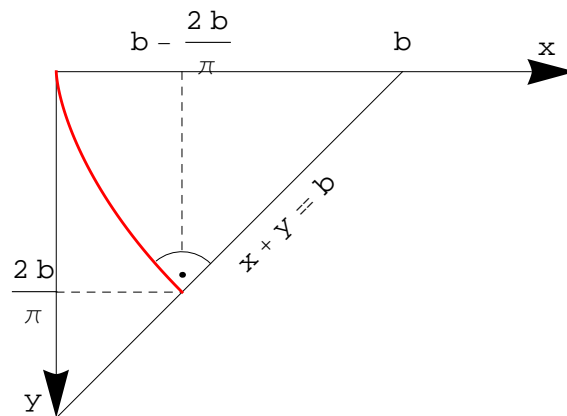
$$\begin{cases} r \sin \theta_1 = r(1 - \cos \theta_1), \\ r(\theta_1 - \sin \theta_1) + r(1 - \cos \theta_1) = b, \end{cases}$$

który prowadzi do rozwiązania:  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $r = \frac{2b}{\pi}$ .

Ostatecznie rozwiązaniem zadania jest cykloida:

$$\begin{cases} x = \frac{2b}{\pi}(\theta - \sin \theta), \\ y = \frac{2b}{\pi}(1 - \cos \theta), \end{cases}$$

a punktem końcowym jest punkt  $\left(b - \frac{2b}{\pi}, \frac{2b}{\pi}\right)$ .



Rysunek 13

Wykażemy, na koniec, następującą istotną własność brachistochrony:

**Twierdzenie 2.** *Brachistochrona jest tautochroną tzn. czas ruchu po brachistochronie, bez prędkości początkowej, z dowolnego jej punktu do punktu najniższego jest stały.*

*Dowód.*

Rozważmy brachistochronę:

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin \theta), \\ y = r(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

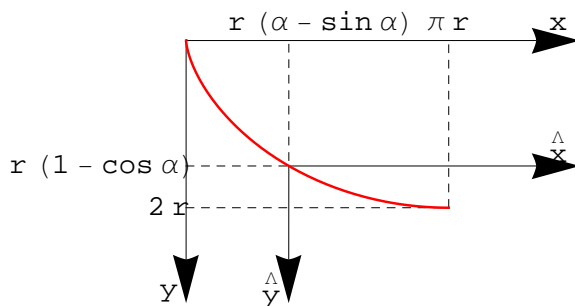
oraz dowolny jej punkt wyznaczony parametrem  $\alpha$  tj. punkt  $P_\alpha(r(\alpha - \sin \alpha), r(1 - \cos \alpha))$ .

Pokażemy, że czas ruchu od tego punktu do punktu  $P_1(r(\pi - \sin \pi), r(1 - \cos \pi))$  jest równy czasowi ruchu od punktu  $P_0(0,0)$  do punktu  $P_1$  tzn. (Przykład 4) jest równy  $\sqrt{\frac{r}{g}}\pi$ .

Przyjmijmy:

$$\begin{cases} \hat{x} = x - r(\alpha - \sin \alpha), \\ \hat{y} = y - r(1 - \cos \alpha). \end{cases}$$

Wówczas  $\hat{x}(\alpha) = 0$  i  $\hat{y}(\alpha) = 0$  oraz  $\hat{x}(\pi) = r\pi - r(\alpha - \sin \alpha)$  i  $\hat{y}(\pi) = 2r - r(1 - \cos \alpha)$ .



Rysunek 14

Zatem, zgodnie z (1) czas ruchu wyrazi się wzorem:

$$T = \int_0^{r\pi - r(\alpha - \sin \alpha)} \frac{\sqrt{1 + (\hat{y}')^2}}{\sqrt{2g\hat{y}}} d\hat{x} = \int_{\alpha}^{\pi} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)^2}}{\sqrt{2gr(\cos \alpha - \cos \theta)}} r(1 - \cos \theta) d\theta = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\alpha}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \alpha - \cos \theta}} d\theta.$$

Po wykonaniu podstawienia  $\cos \theta = z$  ( $\theta = \arccos z$ ) i odpowiedniej zmianie granic całkowania otrzymamy:

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{-1}^{\cos \alpha} \sqrt{\frac{1 - z}{\cos \alpha - z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} dz = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{-1}^{\cos \alpha} \frac{dz}{\sqrt{(\cos \alpha - z)(1 + z)}} dz,$$

co po sprowadzeniu trójmianu  $(\cos \alpha - z)(1 + z)$  do postaci kanonicznej prowadzi do postaci:

$$\frac{2}{1 + \cos \alpha} \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{-1}^{\cos \alpha} \frac{dz}{\sqrt{1 - \left(\frac{2z + 1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right)^2}} dz.$$

Po kolejnym naturalnym podstawieniu:  $w = \frac{2z + 1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$  otrzymujemy ostatecznie:

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{-1}^1 \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} dw = \sqrt{\frac{r}{g}} \pi.$$

□

## Podziękowania

Autor wyraża podziękowania Pani dr hab. Bożenie Piątek i Panu dr. Mariuszowi Pleszczyńskiemu za istotny wkład w redakcję końcowej wersji pracy.

## Literatura

1. I.M.Gelfand, S.V.Fomin, *Rachunek wariacyjny*. PWN. Warszawa 1979.
2. R.Grzymkowski, J.Pochciał *Elementy rachunku wariacyjnego*. WPKJS. Gliwice 2009.
3. K.Tatarkiewicz, *Rachunek wariacyjny*. cz.1 i 2 WNT. Warszawa 1969.